DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.02.005

广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(2): 113~116

具有特殊分解分块矩阵的秩等式

Rank Equalities Through the Special Factorizations of the Block Matrix

李燕如

LI Yan-ru

(南宁师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西龙州 532400)

(Department of Mathematics and Computer Science, Nanning Teachers College, Longzhou, Guangxi, 532400, China)

摘要:在复数域上,研究具有特殊分块矩阵的秩,给出几个秩等式,并由文献[2]中的一些秩等式得到一些分块矩阵的 Moore-Penrose逆.

关键词:特殊分解 分块矩阵 秩等式

中图法分类号: O153 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)02-0113-04

Abstract In the sense of complex number, some rank equalities through the special factorizations of the block matrix are studied in this paper, and some Moore-Penrose inverse of the block matrix are come through some rank qualities and other rank equalities from biliography[2].

Key words special factorization, block matrix, rank equality

矩阵的秩等式是一个古老的课题,很多学者对其进行了研究.文献[1]研究几个重要的秩等式;文献[2]给出分块矩阵的一些秩等式,并由秩等式得到一些分块矩阵的 Moore-Penrose逆.本文研究具有特殊分解分块矩阵的秩等式,并给出一些分块矩阵的 Moore-Penrose逆.

文中 $C^{m\times n}$ 表示复数域上 $m\times n$矩阵,A^* 表示矩阵 A的共轭转置,$\overline{A}$表示矩阵 A的共轭;若矩阵 A可逆,则 A^{-1}表示矩阵 A的逆矩阵,$R(A)$表示矩阵 A的值域,其他符号和标记与文献[3]类似.

1 相关概念和引理

在线性代数中,复数域上元素 $a=a_0+a_1\mathrm{i}$及其共轭$\overline{a}=a_0-a_1\mathrm{i}$满足相似分解等式

$$P\begin{bmatrix} a_0+a_1\mathrm{i} & 0 \\ 0 & a_0-a_1\mathrm{i}\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0\end{bmatrix}=\phi_2(a),\ P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}. \quad (1)$$

很显然,矩阵 P满足 $P=P^*=P^{-1}$.(1)式中 P与 a_0和 a_1无关,即 P通用于任意的复数 a,因此,(1)式可以称为复数域C上通用相似分解等式[4];(1)式中的矩阵 $\phi_2(a)$称为复数 a的一个实矩阵表示;(1)式可以推广到任意的 2×2分块矩阵

$$P_m^{(2)}\begin{bmatrix} A_0+A_1\mathrm{i} & 0 \\ 0 & A_0-A_1\mathrm{i}\end{bmatrix}P_n^{(2)}=\begin{bmatrix} A_0 & -A_1 \\ A_1 & A_0\end{bmatrix}=\phi_2(A),\ P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_t & \mathrm{i}I_t \\ -\mathrm{i}I_t & I_t\end{bmatrix},$$

$$t=m,n. \quad (2)$$

显然 $P_t^{(2)}=(P_t^{(2)})^{-1}(t=m,n)$,且都与矩阵 A_0和 A_1无关.

定义 1.1 设 $A\in C^{m\times n}$,若有矩阵 $B\in C^{n\times m}$满足:

(i) $ABA=A$; (ii) $BAB=B$; (iii) $(AB)^*=AB$; (iv) $(BA)^*=BA$, (3)

则矩阵 B称为矩阵 A的 Moore-Penrose逆,记为 $B=A^+$.

引理 1.1[1] 设 $A\in C^{m\times n}$,$B\in C^{m\times k}$,$C\in C^{l\times n}$,那么有以下的秩等式:

(i) $r(A,B)=r(A)+r(B-AA^-B)=r(B)+r(A-BB^-A)$;

(ii) $r\begin{bmatrix} A \\ C\end{bmatrix}=r(A)+r(C-CA^-A)=r(C)+$

收稿日期: 2007-08-30

修回日期: 2007-12-10

作者简介:李燕如(1979-),女,助教,主要从事高等代数研究工作。

$r(A - AC^{-}C)$;

(iii) $r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C) + r[(I_m - BB^{-})A(I_n - C^{-}C)]$.

引理 1.2[3] 设 $B\in C^{m\times n}$,$A\in C^{m\times m}$和$C\in C^{n\times n}$为 2个可逆矩阵.令 $M = ABC$,则

$$r[(ABC)^{+} - C^{-1}B^{+}A^{-1}] = r\begin{bmatrix} B \\ BCC^{*} \end{bmatrix} + r[B, A^{*}AB] - 2r(B). \qquad (4)$$

引理 1.3[2] 设 $B\in C^{m\times n}$,$A\in C^{m\times m}$和$C\in C^{n\times n}$为 2个可逆矩阵.令 $M = ABC$,则

(i) $r(MM^{+} - ABB^{+}A^{-1}) = r[B, A^{*}AB] - r(B)$;

(ii) $r(M^{+}M - C^{-1}B^{+}BC) = r\begin{bmatrix} B \\ BCC^{*} \end{bmatrix} - r(B)$;

(iii) $r(M^{+} - C^{-1}B^{+}A^{-1}) = r(MM^{+} - ABB^{+}A^{-1}) + r(M^{+}M - C^{-1}B^{+}BC)$.

2 主要结论

定理 2.1 设 $A,B\in C^{m\times n}$,如果 $p,q\in C$, $pq\neq 0$,且设

$$M = \begin{bmatrix} A & pB \\ qB & A \end{bmatrix},\ N = \begin{bmatrix} A+\sqrt{pq}B & 0 \\ 0 & A-\sqrt{pq}B \end{bmatrix}.$$

(i) 如果 $\sqrt{\frac{p}{q}} = 1$,则

$$\begin{bmatrix} A & pB \\ qB & A \end{bmatrix}^{+} = P_{2n}\begin{bmatrix} (A+\sqrt{pq}B)^{+} & 0 \\ 0 & (A-\sqrt{pq}B)^{+} \end{bmatrix}P_{2m}, \qquad (5)$$

其中

$$P_{2t} = P_{2t}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_t & \sqrt{\frac{p}{q}}I_t \\ \sqrt{\frac{q}{p}}I_t & -I_t \end{bmatrix},\ t = m,n.$$

特别地,

$$\begin{bmatrix} A & iB \\ iB & A \end{bmatrix}^{+} = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (A+iB)^{+} & 0 \\ 0 & (A-iB)^{+} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I_m & I_m \\ I_m & -I_m \end{bmatrix}.$$

(ii) 如果 $\sqrt{\frac{p}{q}}\neq 1$,则

$$r(M^{+} - P_{2n}N^{+}P_{2m}) = 2r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + 2r[A,B] - 2r(A+\sqrt{pq}B) - 2r(A-\sqrt{pq}B). \qquad (6)$$

(iii) $\sqrt{\frac{p}{q}}\neq 1$时,(6)式成立当且仅当 $R(A)\subseteq R(A+\sqrt{pq}B)$,并且 $R(A^{*})\subseteq R(A^{*}-\overline{\sqrt{pq}}B^{*})$.

证明 矩阵 M显然可以分解为 $M = P_{2m}NP_{2n}$,其中 P_{2m}和 P_{2n}均为非奇异的,且有 $P_{2m}^{2} = I_{2m}$,$P_{2n}^{2} = I_{2n}$.在此情形下,由引理 1.2可得

$$r[M^{+} - P_{2n}^{-1}N^{+}P_{2M}^{-1}] = r[M^{+} - P_{2n}N^{+}P_{2m}] = r\begin{bmatrix} N \\ NP_{2n}P_{2n}^{*} \end{bmatrix} + r[N, P_{2m}^{*}P_{2m}N] - 2r(N), \qquad (7)$$

其中

$$P_{2m}^{*}P_{2m} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_m & \overline{\sqrt{\frac{q}{p}}}I_m \\ \overline{\sqrt{\frac{p}{q}}}I_m & -I_m \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_m & \sqrt{\frac{p}{q}}I_m \\ \sqrt{\frac{q}{p}}I_m & -I_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (1+|\frac{q}{p}|)I_m & (\sqrt{\frac{p}{q}}-\overline{\sqrt{\frac{q}{p}}})I_m \\ (\overline{\sqrt{\frac{p}{q}}}-\sqrt{\frac{q}{p}})I_m & (1+|\frac{p}{q}|)I_m \end{bmatrix},$$

$$P_{2n}P_{2n}^{*} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_n & \sqrt{\frac{p}{q}}I_n \\ \sqrt{\frac{q}{p}}I_n & -I_n \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_n & \overline{\sqrt{\frac{q}{p}}}I_n \\ \overline{\sqrt{\frac{p}{q}}}I_n & -I_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (1+|\frac{p}{q}|)I_n & (\overline{\sqrt{\frac{q}{p}}}-\sqrt{\frac{p}{q}})I_n \\ (\sqrt{\frac{q}{p}}-\overline{\sqrt{\frac{p}{q}}})I_n & (1+|\frac{q}{p}|)I_n \end{bmatrix}.$$

如果 $\sqrt{\frac{p}{q}} = 1$,则 $P_{2m}^{*}P_{2m} = I_{2m}$,$P_{2n}P_{2n}^{*} = I_{2n}$.因为(7)式右边为零,所以 $M = P_{2n}N^{+}P_{2m}$,即(5)式.如果 $|\frac{p}{q}|\neq 1$,则

$$r[N, P_{2m}^{*}P_{2m}N] = r\begin{bmatrix} 0 & A-\sqrt{pq}B & A+\sqrt{pq}B & 0 \\ A+\sqrt{pq}B & 0 & 0 & A-\sqrt{pq}B \end{bmatrix} = 2r[A,B].$$

类似地 $r\begin{bmatrix} N \\ NP_{2n}P_{2n}^{*} \end{bmatrix} = 2r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$.

定理 2.2 设 $A,B\in C^{m\times n}$,如果 $p,q\in C$, $pq\neq 0$,且有

$$M = \begin{bmatrix} A & pB \\ qB & A \end{bmatrix},\ N =$$

$$\begin{bmatrix} A+\sqrt{pq}B & 0 \\ 0 & A-\sqrt{pq}B \end{bmatrix}.$$

(i) 如果 $\sqrt{\frac{p}{q}} = 1$,则

$$\begin{bmatrix} A & pB \\ qB & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & pB \\ qB & A \end{bmatrix}^{+} =$$

$$P_{2m}\begin{bmatrix} A+\sqrt{pq}B & 0 \\ 0 & A-\sqrt{pq}B \end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} (A+\sqrt{pq}B)^{+} & 0 \\ 0 & (A-\sqrt{pq}B)^{+} \end{bmatrix} P_{2m}, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} A & pB \\ qB & A \end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix} A & pB \\ qB & A \end{bmatrix} =$$

$$P_{2n}\begin{bmatrix} (A+\sqrt{pq}B)^{+} & 0 \\ 0 & (A-\sqrt{pq}B)^{+} \end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} A+\sqrt{pq}B & 0 \\ 0 & A-\sqrt{pq}B \end{bmatrix} P_{2n}, \tag{9}$$

其中

$$P_{2t} = P_{2t}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_t & \sqrt{\frac{p}{q}} I_t \\ \sqrt{\frac{q}{p}} I_t & -I_t \end{bmatrix}, t = m,n.$$

特别地,

$$\begin{bmatrix} A & iB \\ iB & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & iB \\ iB & A \end{bmatrix}^{+} = \begin{bmatrix} I_m & I_m \\ I_m & -I_m \end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (A+iB)^{+} & 0 \\ 0 & (A-iB)^{+} \end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} I_m & I_m \\ I_m & -I_m \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A & iB \\ iB & A \end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix} A & iB \\ iB & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} (A+iB)^{+} & 0 \\ 0 & (A-iB)^{+} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}.$$

(ii) 如果 $\sqrt{\frac{p}{q}} \neq 1$,则有

$$r(MM^{+} - P_{2m}NN^{+}P_{2m}) = 2r[A,B] - r(A+\sqrt{pq}B) - r(A-\sqrt{pq}B), \tag{10}$$

$$r(M^{+}M - P_{2n}N^{+}NP_{2n}) = 2r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} - r(A+\sqrt{pq}B) - r(A-\sqrt{pq}B). \tag{11}$$

(iii) $\sqrt{\frac{p}{q}} \neq 1$时,(8)成立当且仅当 $R(A) \subseteq R(A+\sqrt{pq}B)$ and $R(A) \subseteq R(A-\sqrt{pq}B)$;(9)成立当且仅当 $R(A^{*}) \subseteq R(A^{*}+\overline{\sqrt{pq}}B^{*})$ 且 $R(A^{*}) \subseteq R(A^{*}-\overline{\sqrt{pq}}B^{*})$.

证明　矩阵 M 显然可以分解为 $M = P_{2m}NP_{2n}$,其中 P_{2m}, P_{2n} 均为非奇异的,且 $P_{2m}^{2} = I_{2m}, P_{2n}^{2} = I_{2n}$. 在这种情形下,由引理 1.3有

$$r(MM^{+} - P_{2m}NN^{+}P_{2m}) = r[N, P_{2m}^{*}P_{2m}N] - r(N), \tag{12}$$

其中

$$P_{2m}^{*}P_{2m} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_m & \overline{\sqrt{\frac{q}{p}}} I_m \\ \overline{\sqrt{\frac{p}{q}}} I_m & -I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & \sqrt{\frac{p}{q}} I_m \\ \sqrt{\frac{q}{p}} I_m & -I_m \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} (1+|\sqrt{\frac{q}{p}}|)I_m & (\sqrt{\frac{p}{q}} - \overline{\sqrt{\frac{q}{p}}})I_m \\ (\overline{\sqrt{\frac{p}{q}}} - \sqrt{\frac{q}{p}})I_m & (1+|\sqrt{\frac{p}{q}}|)I_m \end{bmatrix}.$$

$$P_{2n}P_{2n}^{*} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_n & \sqrt{\frac{p}{q}} I_n \\ \sqrt{\frac{q}{p}} I_n & -I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & \overline{\sqrt{\frac{q}{p}}} I_n \\ \overline{\sqrt{\frac{p}{q}}} I_n & -I_n \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} (1+|\sqrt{\frac{p}{q}}|)I_n & (\overline{\sqrt{\frac{q}{p}}} - \sqrt{\frac{p}{q}})I_n \\ (\sqrt{\frac{q}{p}} - \overline{\sqrt{\frac{p}{q}}})I_n & (1+|\sqrt{\frac{q}{p}}|)I_n \end{bmatrix}.$$

如果 $\sqrt{\frac{p}{q}} = 1$,则 $P_{2m}^{*}P_{2m} = I_{2m}, P_{2n}P_{2n}^{*} = I_{2n}$.因此(12)式的右边为零,所以 $M = P_{2m}NN^{+}P_{2m}$,即(8)式.如果 $\sqrt{\frac{p}{q}} \neq 1$,则有

$$r[N, P_{2m}^{*}P_{2m}N] = r\cdot$$

$$\begin{bmatrix} 0 & A-\sqrt{pq}B & A+\sqrt{pq}B & 0 \\ A+\sqrt{pq}B & 0 & 0 & A-\sqrt{pq}B \end{bmatrix} =$$

$$2r[A,B].$$

因此(12)式变为(10)式.类似地(9)式和(11)式同理可得.

定理 2.3　设 $A,B \in C^{m\times n}$.如果 $0 \neq p \in C$,且设

$$M = \begin{bmatrix} A & p^{2}B \\ B & A \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} A+pB & 0 \\ 0 & A-pB \end{bmatrix}$$

(i) 如果 $|p| = 1$,则

$$\begin{bmatrix} A & p^{2}B \\ B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & p^{2}B \\ B & A \end{bmatrix}^{+} = P_{2m}\begin{bmatrix} A+pB & 0 \\ 0 & A-pB \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}(A+pB)^+ & 0\\ 0 & (A-pB)^+\end{bmatrix}P_{2m}, \qquad (13)$$

$$\begin{bmatrix}A & p^2B\\ B & A\end{bmatrix}^+\begin{bmatrix}A & p^2B\\ B & A\end{bmatrix} = P_{2n}\begin{bmatrix}(A+pB)^+ & 0\\ 0 & (A-pB)^+\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}A+pB & 0\\ 0 & A-pB\end{bmatrix}P_{2n}, \qquad (14)$$

其中

$$P_{2t} = P_{2t}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}I_t & pI_t\\ p^{-1}I_t & -I_t\end{bmatrix}, t = m,n.$$

(ii) 如果 $|p| \neq 1$,则

$$r(MM^+ - P_{2m}NN^+P_{2m}) = 2r[A,B] - r(A+pB) - r(A-pB). \qquad (15)$$

$$r(M^+M - P_{2n}N^+NP_{2n}) = 2r\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix} - r(A+pB) - r(A-pB). \qquad (16)$$

(iii) $|p| \neq 1$时,(13)成立当且仅当 $R(A) \subseteq R(A+pB)$ 且 $R(A) \subseteq R(A-pB)$;(11)成立当且仅当 $R(A^*) \subseteq R(A^* + \bar{p}B^*)$ 且 $R(A^*) \subseteq R(A^* - \bar{p}B^*)$.

类似地,我们可以得到

定理 2.4 设 $A_0, A_1, A_2, A_3 \in C^{m\times n}$.如果 $\lambda, \_ \in$ C且有 $\lambda\_ \neq 0$,则有

$$M = \begin{bmatrix}A_0 & \lambda^2A_1 & \_^2A_2 & \_^2\lambda^2A_3\\ A_1 & A_0 & \_^2A_3 & \_^2A_2\\ A_2 & \lambda^2A_3 & A_0 & \lambda^2A_1\\ A_3 & A_2 & A_1 & A_0\end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix}N_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & N_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & N_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & N_4\end{bmatrix}, \qquad (17)$$

其中

$N_1 = A_0 + \lambda A_1 + \_A_2 + \_\lambda A_3$, $N_2 = A_0 - \lambda A_1 + \_A_2 - \_\lambda A_3$, $N_3 = A_0 + \lambda A_1 - \_A_2 - \_\lambda A_3$, $N_4 = A_0 - \lambda A_1 - \_A_2 + \_\lambda A_3$.

(i) 如果 $|\lambda| = 1, |\_| = 1$,则

$$\begin{bmatrix}A_0 & \lambda^2A_1 & \_^2A_2 & \_^2\lambda^2A_3\\ A_1 & A_0 & \_^2A_3 & \_^2A_2\\ A_2 & \lambda^2A_3 & A_0 & \lambda^2A_1\\ A_3 & A_2 & A_1 & A_0\end{bmatrix}^+ = Q_n^{(4)}\begin{bmatrix}N_1^+ & 0 & 0 & 0\\ 0 & N_2^+ & 0 & 0\\ 0 & 0 & N_3^+ & 0\\ 0 & 0 & 0 & N_4^+\end{bmatrix}Q_m^{(4)}, \qquad (18)$$

其中

$$Q_t^{(4)} = (Q_t^{(4)})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}I_t & \lambda I_t & \_I_t & \lambda\_I_t\\ \lambda^{-1}I_t & -I_t & \lambda^{-1}\_I_t & -\_I_t\\ \_^{-1}I_t & \lambda\_^{-1}I_t & -I_t & -\lambda I_t\\ \lambda\_^{-1}I_t & -\_^{-1}I_t & -\lambda^{-1}I_t & I_t\end{bmatrix}, t = m,n.$$

(ii) 如果 $|\lambda| \neq 1, |\_| \neq 1$,则

$$r(M^+ - Q_n^{(4)}N^+Q_m^{(4)}) = 2r\begin{bmatrix}A_0\\ A_1\\ A_2\\ A_3\end{bmatrix} + 2r[A_0, A_1, A_2, A_3] - 2r(N_1) - 2r(N_2) - 2r(N_3) - 2r(N_4). \qquad (19)$$

参考文献:

[1] Marsaglia G, Styan G P H. Equalities and inequalities for ranks of matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1974, 2(3): 269-292.

[2] Tian Y. Rank equalities related to generalized inverses of matrices and their applications [J]. Graduated Dissertation, 1999.

[3] 左可正.关于幂等矩阵与幂么矩阵的几个秩等式[J].湖北师范学院学报,2005,25(3): 4-6.

[4] Tian Y. Universal similarity factorization equalities over generalized clifford algebra [J]. Acta Mathematica Sinica, 2006, 22(1): 289-300.

(责任编辑:尹 闯)