DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.02.007
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(2): 119～122

一类非线性脉冲时滞微分方程正周期解的存在性

Existence of Positive Periodic Solutions for a Class of Nonlinear Differential Equation with Impulsive and Delay

姚晓洁
YAO Xiao-jie

(广西柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州 545004)
(Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi 545004, China)

摘要:在不要求极限 f_0,f_∞ 是 0或 ∞ 且 $f-g\geqslant 0$ 的条件下,利用锥不动点定理,获得一类非线性脉冲时滞微分方程至少存在 1～2个正 ω-周期解的充分条件.

关键词:脉冲 时滞 周期解 不动点定理
中图法分类号: O175.14 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)02-0119-04

Abstract By using the fixed-point theorem, some sufficient conditions were obtained for the existence and multiplicity solutions of positive periodic solutions of a class of nonlinear differential equation with impulsive and delay.

Key words impulsive, delay, periodic solutions, fixed point theorem

近年来,脉冲泛函微分方程的周期解问题受到人们的广泛关注[1～3],文献[1]研究脉冲泛函微分方程

$$\begin{cases} y'(t)=-ay(t)+f(t,y(t-\tau)),t\neq t_k, \\ \Delta y(t)=I_k(y(t^-)),t=t_k,k=1,2,\cdots \end{cases} \quad (1)$$

的正周期解的存在性.文献[2]研究非自治时滞脉冲微分方程

$$\begin{cases} y'(t)=-a(t)y(t)+f(t,y(t-\tau)),t\neq t_k, \\ \Delta y(t)=I_k(y(t^-)),t=t_k,k=1,2,\cdots \end{cases} \quad (2)$$

的正周期解的存在性,改进了文献[1]的相关结果.但文献[1,2]的结果都要求 $f\geqslant 0$ 且其极限 f_0,f_∞ 都是 0或 ∞,而且只获得至少存在一个周期解的充分条件.文献[4]研究时滞泛函微分方程

$$x'(t)=-a(t,x(t))x(t)+f(t,x_t)-g(t,x_t) \quad (3)$$

的正周期解的存在性,不再要求 $f(t,x_t)-g(t,x_t)\geqslant 0$,但所要求的极限还是 0或 ∞.对于一类更为广泛的非线性脉冲时滞微分方程

$$\begin{cases} x'(t)=-h(t,x(t))+f(t,x(t-\tau))- \\ \qquad g(t,x(t-\tau)),t\neq t_k, \\ \Delta x(t)=I_k(x(t^-)),t=t_k, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $h\in C(R\times R^+,R^+)$,$h(t+\omega,x)=h(t,x)$,$f,g\in C(R\times R^+,R^+)$,$f(t+\omega,x)=f(t,x)$,$g(t+\omega,x)=g(t,x)$,$I_k\in C(R^+,R^+)$,$t_k\in R$ 且 $t_{k+1}>t_k$,$\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\infty$,$\Delta x(t_k)=x(t_k^+)-x(t_k^-)$,$k\in Z$($Z$为整数集),这里 $x(t_k^+)$,$x(t_k^-)$ 分别表示 $x(t)$ 在 $t=t_k$ 处的右极限和左极限,且 $x(t_k^+)=x(t_k)$,$R^+=[0,+\infty)$,$\omega>0$为常数,本文利用锥不动点定理,在不要求极限 f_0,f_∞ 是 0或 ∞ 且 $f-g\geqslant 0$ 的条件下,获得了方程(4)周期解的存在性和多解性的充分条件,推广和改进了[1,2,4]的相关结果.

不失一般性,假设 $[0,\omega]\cap\{t_k:k\in Z\}=(t_1,t_2,\cdots,t_p\}$,$h(t,x)$ 满足条件:

(H_1) 存在非负连续 ω-的周期函数 $a_1(t)$,$a_2(t)$,使得 $a_1(t)x\leqslant h(t,x)\leqslant a_2(t)x$,$\forall x>0$,且 $\int_0^\omega a_1(t)\mathrm{d}t>0$.

1 预备知识

令 $E=\{x(t):x(t)\in PC(R,R),x(t+\omega)=$

收稿日期: 2007-05-29
作者简介:姚晓洁(1970-),女,讲师,主要从事微分方程的研究工作。

$x(t)\}$,其中 $PC(R,R)=\{x: R\to R|$ 当 $t\neq t_k$ 时 $x(t)$ 是连续的,当 $t=t_k$ 时,$x(t_k^+)$ 和 $x(t_k^-)$ 都存在且 $x(t_k^-)=x(t_k)\}$.对 $x\in E$,定义范数为 $\|x\|=\sup\limits_{t\in[0,\omega]}|x(t)|$,那么 E 是一个 Banach空间.记

$$R'=R-\{t_k\},\ G(t,s)=\frac{\exp\left(\int_t^s\frac{h(\theta,x(\theta))}{x(\theta)}\mathrm{d}\theta\right)}{\exp\left(\int_0^\omega\frac{h(\theta,x(\theta))}{x(\theta)}\mathrm{d}\theta\right)-1}.$$

引理 1 对于 $x\in PC(R,R)\cap C^1(R',R)$,方程(4)存在一个 ω-周期解当且仅当积分方程

$$x(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)[f(s,x(s-\tau))-g(s,x(s-\tau))]\mathrm{d}s+\sum_{t<t_k<t+\omega}G(t,t_k)I_k(x(t_k^-))$$

存在一个 ω-周期解.

引理 2[5,6] 设 X 是一个 Banach空间,K 是 X 中的一个锥.假定 Ω_1,Ω_2 是 X 中的开集,且 $0\in\Omega_1$,$\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$.设 $\Phi: K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 是全连续算子,满足

(i) $\|\Phi x\|\leqslant\|x\|$,当 $x\in K\cap\partial\Omega_1$;

(ii) 存在 $\psi\in K\backslash\{0\}$ 满足 $x\neq\Phi x+\lambda\psi$,当 $x\in K\cap\partial\Omega_2$,$\lambda>0$.

或者

(i*) $\|\Phi x\|\leqslant\|x\|$,当 $x\in K\cap\partial\Omega_2$;

(ii*) 存在 $\psi\in K\backslash\{0\}$ 满足 $x\neq\Phi x+\lambda\psi$,当 $x\in K\cap\partial\Omega_1$,$\lambda>0$.

则 Φ 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中有一个不动点.

定义算子 $A: E\to E$,

$$(Ax)(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)[f(s,x(s-\tau))-g(s,x(s-\tau))]\mathrm{d}s+\sum_{t<t_k<t+\omega}G(t,t_k)I_k(x(t_k^-)).\qquad(5)$$

显然,寻找方程(5)的 ω-周期解等价于在 E 中寻找映射 A 的不动点.

设(H_1)满足,并且记

$$M_1=\inf_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant\omega}\exp\left(\int_t^s a_1(\theta)\mathrm{d}\theta\right),\ M_2=\sup_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant\omega}\exp\left(\int_t^s a_2(\theta)\mathrm{d}\theta\right),$$

$$k_1=\exp\left(\int_0^\omega a_1(t)\mathrm{d}t\right),\ k_2=\exp\left(\int_0^\omega a_2(t)\mathrm{d}t\right),\ \delta=\frac{M_1(k_1-1)}{M_2(k_2-1)}.$$

显然,$\frac{M_1}{k_2-1}\leqslant G(t,s)\leqslant\frac{M_2}{k_1-1}$,$0<\delta<1$.

再假设:

(H_2) 存在常数 $\sigma(0<\sigma<\delta<1)$,使得

$$\int_0^\omega f(t,x(t-\tau))\mathrm{d}t\geqslant\frac{M_2(k_2-1)-\sigma M_1(k_1-1)}{M_1(k_1-1)-\sigma M_2(k_2-1)}\int_0^\omega g(t,x(t-\tau))\mathrm{d}t,\ \forall x\in E,x(t)\geqslant 0,x(t)\geqslant\sigma\|x\|.$$

在 E 中定义锥 $K=\{x\in E: x(t)\geqslant 0,x(t)\geqslant\sigma\|x\|\}$.

引理 3 $A(K)\subset K$.

证明 $\forall x\in K$,有 $x(t)\geqslant 0,x(t)\geqslant\sigma\|x\|$.又

$$\frac{M_2(k_2-1)-\sigma M_1(k_1-1)}{M_1(k_1-1)-\sigma M_2(k_2-1)}\geqslant\frac{M_2(k_2-1)}{M_1(k_1-1)},$$

所以,由条件(H_2)得

$$\int_0^\omega f(t,x(t-\tau))\mathrm{d}t\geqslant\frac{M_2(k_2-1)}{M_1(k_1-1)}\int_0^\omega g(t,x(t-\tau))\mathrm{d}t,$$

即

$$\frac{M_1}{k_2-1}\int_0^\omega f(t,x(t-\tau))\mathrm{d}t\geqslant\frac{M_2}{(k_1-1)}\int_0^\omega g(t,x(t-\tau))\mathrm{d}t.$$

则

$$(Ax)(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)[f(s,x(s-\tau))-g(s,x(s-\tau))]\mathrm{d}s+\sum_{t<t_k<t+\omega}G(t,t_k)I_k(x(t_k^-))\geqslant\frac{M_1}{k_2-1}\int_0^\omega f(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s-\frac{M_2}{k_1-1}\int_0^\omega g(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s\geqslant 0.$$

由(5)式和条件(H_2)得

$$(Ax)(t)\geqslant\frac{M_1}{k_2-1}\int_0^\omega f(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s-\frac{M_2}{k_1-1}\int_0^\omega g(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s+\frac{M_1}{k_2-1}\sum_{0<t_k<\omega}I_k(x(t_k^-))\geqslant$$

$$\sigma\left[\frac{M_2}{k_1-1}\int_0^\omega f(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s-\frac{M_1}{k_2-1}\int_0^\omega g(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s+\frac{M_2}{k_1-1}\sum_{0<t_k<\omega}I_k(x(t_k^-))\right].$$

又由(5)式得

$$\|Ax\|\leqslant\frac{M_2}{k_1-1}\int_0^\omega f(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s-\frac{M_1}{k_2-1}\int_0^\omega g(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s+\frac{M_2}{k_1-1}\sum_{0<t_k<\omega}I_k(x(t_k^-)).$$

从而

$$(Ax)(t)\geqslant\sigma\left[\frac{M_2}{k_1-1}\int_0^\omega f(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s-\frac{M_1}{k_2-1}\int_0^\omega g(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s+\frac{M_1}{k_2-1}\sum_{0<t_k<\omega}I_k(x(t_k^-))\right]\geqslant\sigma\|Ax\|.$$

故 $A(K)\subset K$.

引理 4 算子 A 是全连续的.

2 主要结果

定理 1 假设条件(H_1)、(H_2)成立,并且满足:

$$(H_3)\ \liminf_{u\to 0}\frac{\frac{M_1}{k_2-1}f(t,u)-\frac{M_2}{k_1-1}g(t,u)}{u}>$$

$\frac{1}{\mathrm{k}}, \lim_{u\to+\infty}\inf\frac{\frac{M_1}{k_2-1}f(t,u)-\frac{M_2}{k_1-1}g(t,u)}{u} > \frac{1}{\mathrm{k}}, \forall t\in [0,\mathrm{k}]$;

(H_4) 存在常数 $R_1>0$,使得

$f(t,u) < \frac{R_1}{\mathrm{k}}, \forall t\in [0,\mathrm{k}], 0\leqslant |u|\leqslant R_1$.

(H_5) 存在常数 $N_1\geqslant 0$,对 $\forall k$ 使得 $|I_k(x)|\leqslant N_1|x|$.

则当 $\frac{M_2}{k_1-1}(1+pN_1)<1$ 时,方程(4)至少存在 2个正 k-周期解.

证明 由条件

$$\lim_{u\to 0^+}\inf\frac{\frac{M_1}{k_2-1}f(t,u)-\frac{M_2}{k_1-1}g(t,u)}{u} > \frac{1}{\mathrm{k}}$$ 知,存在常数 $\mathrm{X}>0$ 和 $r_1(0<r_1<R_1)$,使得

$$\frac{M_1}{k_2-1}f(t,u)-\frac{M_2}{k_1-1}g(t,u)\geqslant\frac{1}{\mathrm{k}}u, \forall t\in R, 0<u\leqslant r_1. \quad (6)$$

因此,对 $\forall x\in K$ 且 $\|x\|=r_1$,有 $r_1\geqslant x(t)\geqslant \mathrm{V}\|x\|=\mathrm{V}r_1>0$.

取 $\mathrm{J}\equiv 1$,当 $t\in R$ 时,证明

$$x\neq Ax+\lambda \mathrm{J}\ (x\in K\cap \partial \mathrm{K}_1 \text{ 且 } \lambda>0), \quad (7)$$

其中,$\mathrm{K}_1=\{x\in E: \|x\|<r_1\}$.若不然,存在 $x_0\in K\cap\partial\mathrm{K}_1$ 和 $\lambda_0>0$ 满足 $x_0=Ax_0+\lambda_0\mathrm{J}$.

设 $\_=\min_{t\in R}x_0(t)$,则对一切 $t\in R$,由(4)式和(5)式有

$$x_0(t)=(Ax_0)(t)+\lambda_0=\int_t^{t+\mathrm{k}}G(t,s)[f(s,x_0(s-\mathrm{f}))-g(s,x_0(s-\mathrm{f}))]ds+\sum_{t<t_k<t+\mathrm{k}}G(t,t_k)I_k(x_0(t_k^-))+\lambda_0\geqslant\int_t^{t+\mathrm{k}}G(t,s)[f(s,x_0(s-\mathrm{f}))-g(s,x_0(s-\mathrm{f}))]ds+\lambda_0\geqslant\int_t^{t+\mathrm{k}}[\frac{M_1}{k_2-1}f(s,x_0(s-\mathrm{f}))-\frac{M_2}{k_1-1}g(s,x_0(s-\mathrm{f}))]ds\geqslant\_+\lambda_0.$$

可知 $\_\geqslant\_+\lambda_0$.矛盾,从而(7)式成立.

另一方面,由条件

$$\lim_{u\to+\infty}\inf\frac{\frac{M_1}{k_2-1}f(t,u)-\frac{M_2}{k_1-1}g(t,u)}{u} > \frac{1}{\mathrm{k}}$$ 知,存在常数 $\mathrm{X}>0$ 和 $\bar{r}_2(\bar{r}_2>R_1)$,使得

$$\frac{M_1}{k_2-1}f(t,u)-\frac{M_2}{k_1-1}g(t,u)\geqslant\frac{1}{\mathrm{k}}u, \forall t\in R, u>\bar{r}_2. \quad (8)$$

取 $r_2>\frac{\bar{r}_2}{\mathrm{V}}$,则对 $\forall x\in K$ 且 $\|x\|=r_2$,有 $x(t)\geqslant\mathrm{V}\|x\|=\mathrm{V}r_2>\bar{r}_2>R_1$.由(5)式和(8)式,用类似方法可得

$$x\neq Ax+\lambda\mathrm{J}, \forall x\in K\cap\partial\mathrm{K}_2, \lambda>0. \quad (9)$$

这里 $\mathrm{K}_2=\{x|x\in E: \|x\|<r_2\}$, $\mathrm{J}\equiv 1$.

取 $\mathrm{K}_3=\{x|x\in E: \|x\|<R_1\}$,对 $\forall x\in K\cap\partial\mathrm{K}_3$,有 $\|x\|\leqslant R_1$,再由条件(H_4)和(H_5)得

$$\|Ax\|\leqslant\int_t^{t+\mathrm{k}}G(t,s)f(s,x(s-\mathrm{f}))ds+\sum_{t<t_k<t+\mathrm{k}}G(t,t_k)I_k(x(t_k^-))\leqslant\frac{M_2}{k_1-1}[\int_t^{t+\mathrm{k}}f(s,x(s-\mathrm{f}))ds+\sum_{t<t_k<t+\mathrm{k}}I_k(x(t_k^-))]\leqslant\frac{M_2}{k_1-1}(R_1+pN_1R_1)\leqslant R_1\leqslant\|x\|.$$

这意味着,对 $\forall x\in K\cap\partial\mathrm{K}_3$,有 $\|Ax\|\leqslant\|x\|$.

两次应用引理 2知,算子 A 存在 2个不动点 x_1, x_2,其中 $x_1\in K\cap(\bar{\mathrm{K}}_3\backslash\mathrm{K}_1)$, $x_2\in K\cap(\bar{\mathrm{K}}_2\backslash\mathrm{K}_3)$,且 $\|x_1\|\geqslant\mathrm{V}r_1>0$, $\|x_2\|\geqslant\mathrm{V}r_2>0$,则方程(4)至少存在 2个正 k-周期解 $x_1(t)$, $x_2(t)$.

推论 1 假设条件(H_1)、(H_2)、(H_4)和(H_5)成立,并且满足

$$(H_2^*)\ \lim_{u\to 0^+}\inf\frac{\frac{M_1}{k_2-1}f(t,u)-\frac{M_2}{k_1-1}g(t,u)}{u}=+\infty, \lim_{u\to+\infty}\inf\frac{\frac{M_1}{k_2-1}f(t,u)-\frac{M_2}{k_1-1}g(t,u)}{u}=+\infty.$$

则 $\frac{M_2}{k_1-1}(1+pN_1)<1$ 时,方程(4)至少存在 2个正 k-周期解.

定理 2 假设条件(H_1)、(H_2)和(H_5)成立,并且存在常数 $R_2>0$,满足

$(H_6)\ \lim_{u\to 0^+}\max\frac{f(t,u)}{u}<\frac{1}{\mathrm{k}}, \lim_{u\to+\infty}\max\frac{f(t,u)}{u}<\frac{1}{\mathrm{k}}, \forall t\in[0,\mathrm{k}]$;

$(H_7)\ \frac{M_1}{k_2-1}f(t,u)-\frac{M_2}{k_1-1}g(t,u)>\frac{R_2}{\mathrm{k}}, \forall t\in[0,\mathrm{k}], \mathrm{V}R_2\leqslant|u|\leqslant R_2$,

则当 $\frac{M_2}{k_1-1}(1+pN_1)<1$ 时,方程(4)至少存在 2个正 k-周期解.

证明 由条件 $\lim_{u\to 0^+}\max\frac{f(t,u)}{u}<\frac{1}{\mathrm{k}}$ 知,存在常数 $\mathrm{X}>0$ 和 $r_3(0<r_3<R_2)$,使得

$$f(t,u)\leqslant\frac{1}{\mathrm{k}}u, \forall t\in R, 0\leqslant u\leqslant r_3. \quad (10)$$

取 $\mathrm{K}_4=\{x|x\in E: \|x\|<r_3\}$,对 $\forall x\in K\cap\partial\mathrm{K}_3$,有 $\|x\|\leqslant r_3$.于是由(5)式和(10)式及条件(H_5)有

$$\|Ax\|\leqslant\int_t^{t+\mathrm{k}}G(t,s)f(s,x(s-\mathrm{f}))ds+$$

$$\sum_{t<t_k<t+k} G(t,t_k) I_k(x(\bar{t_k})) \leqslant \frac{M_2}{k_1-1}[\int_t^{t+k} f(s,x(s-$$

$$f))ds+ \sum_{t<t_k<t+k} I_k(x(\bar{t_k}))] \leqslant \frac{M_2}{k_1-1}(R_2+pN_1R_2) <$$

$R_2 = \|x\|$.

这意味着,对 $\forall\, x\in K\cap \partial K_4$,有 $\|Ax\|\leqslant \|x\|$.

再由条件 $\lim\limits_{u\to+\infty}\max \frac{f(t,u)}{u} < \frac{1}{k}$ 知,存在常数 X > 0和 $\bar{r_4}(\bar{r_4} > R_2)$,使得

$$f(t,u)\leqslant \frac{1}{k}u, \forall\, t\in R, u > \bar{r_4}. \tag{11}$$

取 $r_4 > \frac{\bar{r_4}}{V}$,则对 $\forall\, x\in K$且 $\|x\| = r_2$,有 $x(t)\geqslant V\|x\| = Vr_4 > \bar{r_4} > R_2$.

由(5)式和(11)式用相同的方法,可证得 $\|Ax\|\leqslant \|x\|, \forall\, x\in K\cap \partial K_5$,其中 $K_5 = \{x| x\in E: \|x\| < r_4\}$.

另一方面,由取 $K_6 = \{x| x\in E: \|x\| < R_2\}$,对 $\forall\, x\in K\cap \partial K_6$,有 $\|x\|\leqslant R_2$.

取 $J\equiv 1$,当 $t\in R$时,往证

$$x\neq Ax + \lambda J \ (当\ x\in K\cap \partial K_6 且\ \lambda > 0). \tag{12}$$

若不然,存在 $x_0\in K\cap \partial K_6$和 $\lambda_0 > 0$满足 $x_0 = Ax_0 + \lambda_0 J$.

设 $\_ = \min\limits_{t\in R} x_0(t)$,则 $\_\leqslant R_2$.则对一切 $t\in R$,由条件(H7)有

$$x_0(t) = (Ax_0)(t) + \lambda_0 = \int_t^{t+k} G(t,s)[f(s,x_0(s-f)) - g(s,x_0(s-f))]ds + \sum_{t<t_k<t+k} G(t,t_k) I_k(x_0(\bar{t_k})) + \lambda_0 \geqslant \int_t^{t+k} G(t,s)[f(s,x_0(s-f)) - g(s,x_0(s-f))]ds + \lambda_0 \geqslant \int_t^{t+k}[\frac{M_1}{k_2-1}f(s,x_0(s-f)) - \frac{M_2}{k_1-1}g(s,x_0(s-f))]ds \geqslant R_2+\lambda_0 > R_2.$$

这与 $_\leqslant R_2$矛盾,从而(12)式成立.

两次应用引理 2知,算子 H存在 2个不动点 x_1^*, x_2^*,其中 $x_1^*\in K\cap(\overline{K_6}\backslash K_4)$, $x_2^*\in K\cap(\overline{K_5}\backslash K_6)$, $\|x_1^*\|\geqslant Vr_3 > 0$, $\|x_2^*\|\geqslant VR_2 > 0$,则方程(4)至少存在 2个正 k-周期解 $x_1^*(t), x_2^*(t)$.

推论 2 假设条件(H1)、(H2)、(H5)和(H7)成立,并且满足

$$(H_6^*)\lim_{u\to0^+}\max\frac{f(t,u)}{u} = 0, \lim_{u\to+\infty}\max\frac{f(t,u)}{u} = 0,$$

则当 $\frac{M_2}{k_1-1}(1+pN_1) < 1$时,方程(4)至少存在 2个正 k-周期解.

推论 3 假设存在常数 $N_1 > 0, R_1 > 0, R_2 > 0$,且条件(H1)、(H2)和(H5)成立,当条件

(H8) $\lim\limits_{u\to0^+}\max\frac{f(t,u)}{u} < \frac{1}{k}, \forall\, t\in[0,k]$; $\frac{M_1}{k_2-1}f(t,u) - \frac{M_2}{k_1-1}g(t,u) > \frac{R_2}{k}, \forall\, t\in[0,k]$, $VR_2\leqslant |u|\leqslant R_2$.且 $\frac{M_2}{k_1-1}(1+pN_1) < 1$;

(H9) $\lim\limits_{u\to+\infty}\inf\frac{\frac{M_1}{k_2-1}f(t,u) - \frac{M_2}{k_1-1}g(t,u)}{u} > \frac{1}{k}, \forall\, t\in[0,k]$; $f(t,u) < \frac{R_1}{k}, \forall\, t\in[0,k], 0\leqslant |u|\leqslant R_1$,且 $\frac{M_2}{k_1-1}(1+pN_1) < 1$;

(H10) $\lim\limits_{u\to0^+}\max\frac{f(t,u)}{u} < \frac{1}{k}, \forall\, t\in[0,k]$; $\frac{M_1}{k_2-1}f(t,u) - \frac{M_2}{k_1-1}g(t,u) > \frac{R_2}{k}, \forall\, t\in[0,k]$, $VR_2\leqslant |u|\leqslant R_2$.且 $\frac{M_2}{k_1-1}(1+pN_1) < 1$;

(H11) $\lim\limits_{u\to+\infty}\max\frac{f(t,u)}{u} < \frac{1}{k}, \forall\, t\in[0,k]$; $\frac{M_1}{k_2-1}f(t,u) - \frac{M_2}{k_1-1}g(t,u) > \frac{R_2}{k}, \forall\, t\in[0,k]$, $VR_2\leqslant |u|\leqslant R_2$.且 $\frac{M_2}{k_1-1}(1+pN_1) < 1$;

(H12) $f(t,u) < \frac{R_1}{k}, \forall\, t\in[0,k], 0\leqslant |u|\leqslant R_1$; $\frac{M_1}{k_2-1}f(t,u) - \frac{M_2}{k_1-1}g(t,u) > \frac{R_2}{k}, \forall\, t\in[0,k]$, $VR_2\leqslant |u|\leqslant R_2$,其中 $R_1\neq R_2$,且 $\frac{M_2}{k_1-1}(1+pN_1) < 1$,之一成立时,方程(4)至少存在 1个正 k-周期解.

参考文献:

[1] 李建利,申建华.一类脉冲微分方程正周期解的存在性[J].应用数学, 2004, 17(3): 456-463.

[2] 张小芝,刘斌.一类非自治时滞脉冲微分方程正周期解的存在性[J].数学杂志, 2007, 27(2): 157-164.

[3] Li Xu, Zhang X Y, Jiang D Q. A new existence theory for positive periodic solutions to functional differential equation with impulse effects [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2006, 51: 1761-1772.

[4] Hu Xiulin, Zhou Zongfu. Existence of positive periodic solutions for infinite delay functional differential equation [J]. Ann of Diff Eqs, 2006, 22(3): 270-276.

[5] Deimling K. Nonlinear functional analysis[M]. New York: Springer-Verlag, 1985.

[6] Lan K, Webb J L R. Positive solutions of semilinear differential equation with singularities[J]. J Differential Equations, 1998, 148(3): 407-421.

(责任编辑:尹 闯)