DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.02.009
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(2): 125- 127

$\tilde{\varphi}$混合序列的若干收敛性质*

Convergence Properties of $\tilde{\varphi}$ Mixing Random Sequences

冯凤香
FENG Feng-xiang

(桂林工学院数理系,广西桂林 541004)
(Department of Mathematics and Physics, Guilin University of Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 讨论$\tilde{\varphi}$混合序列的收敛性质,得到3个完全收敛定理,将$\tilde{\varphi}$混合序列独立情形下的收敛性质较好地推广到相依情形.

关键词: $\tilde{\varphi}$混合序列 收敛 完全收敛性
中图法分类号: O211.4 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)02-0125-03

Abstract The convergence properties of $\tilde{\varphi}$ mixing random sequences are studied. Three convergence theorems are obtained. As a result, we extend some convergence properties of independent sequences to the case $\tilde{\varphi}$ mixing of random sequences.

Key words $\tilde{\varphi}$ mixing random sequences, convergence, complete convergence

$\tilde{\varphi}$混合序列与通常的φ混合序列有一定的类似,但并不相同,它们互不包含.$\tilde{\varphi}$混合序列是一类极为广泛的相依混合序列,对其进行研究很有价值.文献[1~3]讨论它的若干收敛性质,文献[4]讨论同分布的加权和的完全收敛性和强收敛性.本文进一步讨论它的若干收敛性质.若无特别说明,以c记与n无关的正常数,"$\ll$"表示通常的大"O".

1 相关定义及引理

设$\{X_i, i\in N\}$是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上随机变量序列,$F_S=\sigma(X_i, i\in S\subset N)$为$\sigma$-域,在$\mathcal{F}$中给定$\sigma$-域$F,R$.令

$\varphi(F,R)=\sup\{|P(B|A)-P(B)|;A\in F,P(A)>0,B\in R|\}$.

对$k\geqslant 0$,令

$\tilde{\varphi}(k)=\sup\{\varphi(F_S,F_T)$,有限子集$S,T\subset N$,且$\mathrm{dist}(S,T)\geqslant k\}$,

显然,$0\leqslant\tilde{\varphi}(k+1)\leqslant\tilde{\varphi}(k)\leqslant 1$,且$\tilde{\varphi}(0)=1$.

定义1 对随机序列$\{X_i, i\in N\}$,若存在$k\in N$,使$\tilde{\varphi}(k)<1$,则称$\{X_i, i\in N\}$为$\tilde{\varphi}$混合序列.

对$\tilde{\varphi}$混合序列,可不失一般性假设$\tilde{\varphi}(1)<1$.

引理1[1] 设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是$\tilde{\varphi}$混合序列,满足:$\sum_{n=1}^{\infty} VarX_n<\infty$,则$\sum_{n=1}^{\infty}(X_n-EX_n)$ a.s.收敛.

引理2[5] 设$\{X_i, i\in N\}$是$\tilde{\varphi}$混合序列,$EX_i=0$,$E|X_i|^2<\infty$,则存在仅依赖于$\tilde{\varphi}$的常数c,使得对$\forall n\geqslant 1$,有$E|S_n|^2\leqslant c\sum_{i=1}^{n}EX_i^2$,其中$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

引理3[1] 设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是同分布$\tilde{\varphi}$混合序列,$0<p<2$,$\alpha p\geqslant 1$,当$\alpha\leqslant 1$时,进一步假设$EX_1=0$,则存在自然数N,使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|\geqslant\varepsilon n^{\alpha})<\infty,\ \forall\varepsilon>0 \quad (1)$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_{j+N}-S_N|\geqslant\varepsilon n^{\alpha})<\infty,\ \forall\varepsilon>0 \quad (2)$$

等价,而且

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_{N+j}-S_N|>\varepsilon n^{\alpha})\leqslant c^{-1}P(|S_{N+n}-S_N|>\varepsilon n^{\alpha}/3). \quad (3)$$

2 主要结果

定理1 (三级数定理)设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是$\tilde{\varphi}$混合序列,对某个$c>0$,记$X_n^c\triangleq X_n I_{(|X_n|\leqslant c)}$,如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>c)<\infty, \quad (4)$$

收稿日期: 2007-08-24
作者简介: 冯凤香(1975-),女,讲师,主要从事概率极限理论和数学教育研究工作。
* 广西自然科学基金项目(桂科自0447096)资助。

$$\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^c < \infty \text{ 收敛}, \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} VarX_n^c < \infty, \tag{6}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s.收敛.

证明 由(6)式及引理1得 $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n^c - EX_n^c) < \infty$ a.s..再由(5)式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n^c < \infty \quad \text{a.s.}. \tag{7}$$

由(4)式得 $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq X_n^c) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > c) < \infty$,所以由 Borel-Cantelli引理得 $P(\{X_n \neq X_n^c\}, i.o.) = 0$.由此及(7)式得 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$ a.s.,即 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s.收敛.

定理 2 设 $\{X_n; n \geq 1\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合序列,$\{g_n(x); n \geq 1\}$ 是偶函数序列,它们在区间 $x > 0$ 中取正值、不减,而且对每一个 n 满足:(i)在区间 $x > 0$ 中,$\frac{x}{g_n(x)}$ 不减,或者(ii)在同一区间中,$\frac{x}{g_n(x)}$ 和 $\frac{g_n(x)}{x^2}$ 都不增,且 $EX_n = 0$.
此外 $\{a_n; n \geq 1\}$ 是常数列,满足 $0 < a_n \uparrow \infty$ 及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)} < \infty, \tag{8}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a_n}$ a.s.收敛.

证明 因为 $g_n(x)$ 当 $x > 0$ 时不减,故

$$P\{|X_n| \geq a_n\} \leq \int_{|X_n| \geq a_n} \frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)} \mathrm{d}P \leq \frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)},$$

所以由(8)式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| \geq a_n\} < \infty. \tag{9}$$

假设对某个 n,$g_n(x)$ 满足条件(i),则在区间 $|x| \leq a_n$ 中有 $\frac{|x|}{g_n(x)} \leq \frac{a_n}{g_n(a_n)}$,所以 $\frac{x^2}{a_n^2} \leq \frac{g_n^2(x)}{g_n^2(a_n)} \leq \frac{g_n(x)}{g_n(a_n)}$.

对于满足条件(ii)的 n,在同一区间中,由于 $\frac{g_n(x)}{x^2}$ 不增,所以 $\frac{x^2}{g_n(x)} \leq \frac{a_n^2}{g_n(a_n)}$.
因此无论 $g_n(x)$ 满足条件(i)或(ii)都有

$$\frac{x^2}{a_n^2} \leq \frac{g_n(x)}{g_n(a_n)}. \tag{10}$$

记 $X_n^{a_n} = X_n I_{(|X_n| \leq a_n)}$,则对任意 n 有 $E(X_n^{a_n})^2 \leq EX_n^2 I_{(|X_n| \leq a_n)}$.由于 $g_n(x)$ 是偶函数而且不减,又由(10)式,

$$EX_n^2 I_{(|X_n| \leq a_n)} = \int_{|X_n| \leq a_n} X_n^2 \mathrm{d}P \leq \frac{a_n^2}{g_n(a_n)} \int_{|X_n| \leq a_n} g_n(X_n) \mathrm{d}P \leq \frac{a_n^2}{g_n(a_n)} Eg_n(X_n),$$

故 $E(X_n^{a_n})^2 \ll \frac{a_n^2}{g_n(a_n)} Eg_n(X_n)$.再由(8)式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(X_n^{a_n})^2}{a_n^2} \ll \sum_{n=1}^{\infty} Eg_n(X_n)/g_n(a_n) < \infty. \tag{11}$$

此外,若条件(i)被满足,则

$$|EX_n^{a_n}| = |EX_n I_{(|X_n| \leq a_n)}| \leq \left|\int_{|X_n| \leq a_n} X_n \mathrm{d}P\right| \leq \frac{a_n}{g_n(a_n)} \int_{|X_n| \leq a_n} g_n(X_n) \mathrm{d}P \leq \frac{a_n}{g_n(a_n)} Eg_n(X_n).$$

另一方面,若条件(ii)被满足,由 $EX_n = 0$,$\frac{x}{g_n(x)}$ 不增得

$$|EX_n^{a_n}| = |EX_n I_{(|X_n| \leq a_n)}| \leq \frac{a_n}{g_n(a_n)} \int_{|X_n| > a_n} g_n(X_n) \mathrm{d}P \leq \frac{a_n}{g_n(a_n)} Eg_n(X_n).$$

所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{EX_n^{a_n}}{a_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} Eg_n(X_n)/g_n(a_n) < \infty \tag{12}$$

故结合(9)式,(11)式,(12)式及定理1得 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n/a_n$ a.s.收敛.

由 Kronecker引理,有 $a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, n \to \infty$.
在定理2中,令 $g_n(x) = |x|^p$,$p > 0$,可得推论1.

推论 1 设 $\{X_n; n \geq 1\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合序列,$0 < a_n \uparrow \infty$,$0 < p \leq 2$,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E|X_n|^p}{a_n^p} < \infty$,且当 $1 \leq p \leq 2$ 时,$EX_n = 0$,则 $a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, n \to \infty$.

定理 3 设 $\{X_n; n \geq 1\}$ 是同分布 $\tilde{\rho}$ 混合序列,$\{g_n(x); n \geq 1\}$ 是偶函数序列,它们在区间 $x > 0$ 中取正值,且 $\frac{g_n(x)}{x}$ 关于 x 单调不减,$\frac{g_n(x)}{x^2}$ 关于 x 单调不增,此外 $\{a_n; n \geq 1\}$ 是常数列,满足 $0 < a_n \uparrow \infty$ 及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} Eg_i(X_i)/g_i(a_n) < \infty, \tag{13}$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \geq \varepsilon a_n) < \infty, \forall \varepsilon > 0, \tag{14}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\max_{1 \leq j \leq n} |S_j| \geq \varepsilon a_n) < \infty, \forall \varepsilon > 0. \tag{15}$$

证明 不失一般性,假设 $EX_i = 0$,记 $Y_i \triangleq X_i I_{(|X_i| \leq a_n)}$.先证

$$a_n^{-1} \max_{1 \leq j \leq n} \left|\sum_{i=1}^{j} EY_i\right| \to 0, n \to \infty. \tag{16}$$

因为 $g_i(x)$ 是偶函数，且 $\frac{g_i(x)}{x}$ 当 $x>0$ 时关于 x 单调不减，故当 $|X_i|>a_n$ 时，有 $\frac{g_i(X_i)}{|X_i|}\geqslant\frac{g_i(a_n)}{a_n}$，即

$$\frac{|X_i|}{a_n}\leqslant\frac{g_i(X_i)}{g_i(a_n)},\ |X_i|>a_n. \tag{17}$$

又由 $EX_i=0$ 得 $EY_i\triangleq -EX_iI_{(|X_i|>a_n)}$，再结合(13)式和(17)式有

$$a_n^{-1}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{j}EY_i\Big|\leqslant a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|EY_i|\leqslant a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|I_{(|X_i|>a_n)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}Eg_i(X_i)/g_i(a_n)\to 0,$$

$n\to\infty$.

因此 $\forall\varepsilon>0$，当 n 充分大时，有

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{j}EY_i\Big|<\frac{\varepsilon}{2}a_n,\ \Big|\sum_{i=1}^{n}EY_i\Big|<\frac{\varepsilon}{2}a_n.$$

故

$$\{|S_n|\geqslant\varepsilon a_n\}=\{|S_n|\geqslant\varepsilon a_n,\exists i:1\leqslant i\leqslant n,|X_i|>a_n\}\cup\{|S_n|\geqslant\varepsilon a_n,\forall i:1\leqslant i\leqslant n,|X_i|\leqslant a_n\}\subset\bigcup_{i=1}^{n}\{|X_i|>a_n\}\cup\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{n}Y_i\Big|\geqslant\varepsilon a_n\Big\}\subset\bigcup_{i=1}^{n}\{|X_i|>a_n\}\cup\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{n}(Y_i-EY_i)\Big|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}a_n\Big\}\triangleq A_n\cup B_n.$$

同样还有

$$\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|\geqslant\varepsilon a_n\}\subset\bigcup_{i=1}^{n}\{|X_i|>a_n\}\cup\Big\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{j}Y_i\Big|\geqslant\varepsilon a_n\Big\}\subset\bigcup_{i=1}^{n}\{|X_i|>a_n\}\cup\Big\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{j}(Y_i-EY_i)\Big|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}a_n\Big\}\triangleq A_n\cup C_n.$$

所以，$\forall\varepsilon>0$，当 n 充分大时，有 $P\{|S_n|\geqslant\varepsilon a_n\}\leqslant P(A_n)+P(B_n)$，$P\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|\geqslant\varepsilon a_n\}\leqslant P(A_n)+P(C_n)$. 故要证(14)式和(15)式，只需证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty, \tag{18}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)<\infty, \tag{19}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(C_n)<\infty. \tag{20}$$

先证明(18)式. 由 Markov 不等式，$g_i(x)$ 是偶函数，且 $\frac{g_i(x)}{x}$ 当 $x>0$ 时是关于 x 单调不减，故当 $|X_i|>a_n$ 时，有 $\frac{g_i(X_i)}{|X_i|}\geqslant\frac{g_i(a_n)}{a_n}$. 由此得 $g_i(X_i)\geqslant g_i(a_n)\frac{|X_i|}{a_n}>g_i(a_n)$，故 $P(A_n)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(|X_i|>a_n)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(g_i(X_i)>g_i(a_n))\leqslant\sum_{i=1}^{n}Eg_i(X_i)/g_i(a_n)$.

结合(13)式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}Eg_i(X_i)/g_i(a_n)<\infty.$$

再证明(19)式. 因为 $g_i(x)$ 是偶函数，且 $\frac{g_i(x)}{x^2}$ 当 $x>0$ 时关于 x 单调不增，故当 $|X_i|\leqslant a_n$ 时，有 $\frac{g_i(X_i)}{|X_i^2|}\geqslant\frac{g_i(a_n)}{a_n^2}$，即 $\frac{X_i^2}{a_n^2}\leqslant\frac{g_i(X_i)}{g_i(a_n)}$，$|X_i|\leqslant a_n$.

故结合引理 2 及 Markov 不等式得

$$P(B_n)\ll a_n^{-2}E\Big|\sum_{i=1}^{n}(Y_i-EY_i)\Big|^2\ll a_n^{-2}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i-EY_i)^2\leqslant a_n^{-2}\sum_{i=1}^{n}EY_i^2=a_n^{-2}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2I_{(|X_i|\leqslant a_n)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}Eg_i(X_i)/g_i(a_n). \tag{21}$$

再由(13)式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}Eg_i(X_i)/g_i(a_n)<\infty.$$

最后证明(20)式. 记 $U_j\triangleq\sum_{i=1}^{j}(Y_i-EY_i)$，为证(20)式，即要证

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|U_j|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}a_n)<\infty. \tag{22}$$

由引理 3 的(1)式等价于(2)式，当 $p=2$ 时可知(22)式等价于

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|U_{j+N}-U_N|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}a_n)<\infty\quad(N\text{是某个自然数}).$$

而由引理 3 的(3)式，Markov 不等式、引理 2 及(21)式的证明过程有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|U_{j+N}-U_N|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}a_n)\ll\sum_{n=1}^{\infty}P(|U_{n+N}-U_N|\geqslant\frac{\varepsilon}{6}a_n)\ll\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-2}E\Big(\sum_{i=N+1}^{N+n}(Y_i-EY_i)\Big)^2\ll\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-2}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i-EY_i)^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}Eg_i(X_i)/g_i(a_n)<\infty.$$

故(20)式成立.

参考文献:

[1] 吴群英，林亮. φ混合序列的完全收敛性和强收敛性[J]. 工程数学学报，2004，21(1): 75-80.

[2] 何宝珠. φ混合序列的几乎处处收敛速度[J]. 桂林工学院学报，2006，25(2): 256-258.

[3] 邓光明，贾贞. 不同分布φ混合序列的强收敛性[J]. 桂林工学院学报，2006，26(4): 583-585.

[4] 唐国强，伍艳春. φ混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性[J]. 桂林工学院学报，2004，24(1): 100-102.

[5] 杨善朝. 一类随机变量部分和的矩不等式及其应用[J]. 科学通报，1998，43(17): 1823-1827.

(责任编辑：尹　闯)