DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.02.010
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(2): 128- 130, 137

$\tilde{\rho}$混合序列的几乎处处收敛性*

Almost Sure Convergence for $\tilde{\rho}$ Mixing Random Variable Sequences

胡光辉,吴群英,居先祥
HU Guang-hui, WU Qun-ying, JU Xian-xiang

(桂林工学院数理系 广西桂林 541004)
(Department of Mathematics and Physics, Guilin Institute of Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 讨论$\tilde{\rho}$混合序列级数的收敛性,得到$\tilde{\rho}$混合序列的几个几乎处处收敛定理,把文献[2]中$\tilde{\varphi}$混合序列的相关收敛性质推广到$\tilde{\rho}$混合序列.

关键词: $\tilde{\rho}$混合序列 几乎处处收敛 三级数定理
中图法分类号: O211.4 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)02-0128-03

Abstract Initially, the studying of the Kolmogorov-type inequality of $\tilde{\rho}$-mixing random variable sequences illiminates us to discuss almost the sure convergences and obtain the three series theorem, and extend the corresponding results of $\tilde{\varphi}$-mixing random variable sequences of reference[2].

Key words $\tilde{\rho}$ mixing random variable sequences, almost sure convergences, three series theorem

2004年文献[1]引入$\tilde{\rho}$混合序列,$\tilde{\rho}$混合序列和通常的ρ混合序列类似,但并不相同,它们不互相包含.$\tilde{\rho}$混合序列是一类极为广泛的混合序列,由于引入较晚,对其进行研究很有意义.吴群英[1,2]研究了$\tilde{\rho}$混合序列的完全收敛性和强收敛性及$\tilde{\varphi}$混合序列[3]的几乎处处收敛性和三级数定理.本文主要推广$\tilde{\varphi}$混合序列的相关结论[2]到$\tilde{\rho}$混合序列,得到更为广泛的几乎处处收敛性和三级数定理.本文中的c表示与n无关的正常数,"$\ll$"表示通常的"O".

1 相关定义及引理

设$\{X_n; n\geqslant 1\}$是概率空间(Ω, B, P)上的随机变量序列,$F_S=\sigma(X_i, i\in S\subset N)$为$\sigma$域,在$B$中给定$\sigma$域$F, R$,令$\rho(F,R)=\sup\{|P(B|A)-P(B)|, A\in F, P(A)>0, B\in R\}$.$\forall k\geqslant 0$,令$\tilde{\rho}(k)=\sup\{\rho(F_S, R_T)$,有限子集$S, T\subset N$,且$\mathrm{dist}(S,T)\geqslant k\}$,显然$0\leqslant\tilde{\rho}(k+1)\leqslant\tilde{\rho}(k)\leqslant 1$,且$\tilde{\rho}(0)=1$.

定义 1.1 若存在$k\in N$,使$\tilde{\rho}(k)<1$,则称$\{X_n; n\geqslant 1\}$为$\tilde{\rho}$混合序列.

引理 1.1[4] 设$\{X_n; n\geqslant 1\}$是$\tilde{\rho}$混合序列,$EX_i=0$, $E|X_i|^q<\infty$, $q\geqslant 1$,则存在仅依赖于$\tilde{\rho}$的常数c,使对$\forall n\geqslant 1$,有

$$E|S_n|^q\leqslant c\sum_{i=1}^n E|X_i|^q,\ 1<q\leqslant 2,$$

$$E\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|^q\leqslant c\log^q n\{\sum_{i=1}^n E|X_i|^q\},\ 1\leqslant q\leqslant 2.$$

引理 1.2[4] 设$\{X_n; n\geqslant 1\}$是任意的随机序列,如存在r.v.X,使对任意$x>0$及$n\geqslant 1$,有

$$P(|X_n|\geqslant x)\leqslant cP(|X|\geqslant x),$$

则对$\forall\lambda>0$, $\forall t>0$有

$$E|X_n|^\lambda\leqslant cE|X|^\lambda+t^\lambda P(|X|>t).$$

引理 1.3 $\{X_n; n\geqslant 1\}$是任意的同分布随机变量,记$N(x)=\#\{n: c_n\leqslant x\}$,则

$$\sum_{n=1}^\infty P(|X_n|>c_n)\ll EN(|X_1|).$$

证明 $\sum_{n=1}^\infty P(|X_n|>c_n)=\sum_{j=1}^\infty\sum_{j<c_n\leqslant j+1}P(|X_n|>j)\leqslant\sum_{j=1}^\infty(N(j+1)-N(j))P(|X_1|>j)\ll\sum_{j=1}^\infty N(j)(P(|X_1|>j-1)-P(|X_1|>j))=\sum_{j=1}^\infty N(j)P(j-1<|X_1|\leqslant j)\ll EN(|X_1|)$.

收稿日期: 2007-08-06
修回日期: 2008-01-08
作者简介: 胡光辉(1982-),男,硕士研究生,主要从事概率极限理论和数理统计研究工作。
* 国家自然科学基金项目(10661006)资助。

2 主要结果及其证明

定理 2.1 设$\{X_n;n\geq 1\}$是$\tilde{\rho}$混合序列,满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log^p nE|X_n - EX_n|^p < \infty,\ 1 < p\leq 2. \tag{2.1}$$

则$\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - EX_n)$ a.s.收敛.

证明 不失一般性,设$EX_n = 0$,记$S_n = \sum_{i=1}^{n}X_i$,当正整数$m > n\to\infty$时,由(2.1)式,有

$$E(S_m - S_n)^p \ll \sum_{k=n+1}^{m}E|X_k|^p\to 0. \tag{2.2}$$

因此,$\{S_n;n\geq 1\}$是L_p的Cauchy序列,故由L_p的完备性,存在r.v. S,使得$E(S_n - S)^p\to 0$.所以由Markov不等式[5]及(2.2)式得

$$P(|S_{2^k} - S| > \varepsilon)\ll E|S_{2^k} - S|^p\ll \limsup_{n\to\infty}E|S_n - S_{2^k}|^p \ll \sum_{i=2^k+1}^{\infty}E|X_i|^p = \sum_{i=2^k+1}^{\infty}E|X_i|^p\log^p i\,\frac{1}{\log^p i}\ll \frac{1}{(\log 2^k)^p}\sum_{i=2^k+1}^{\infty}E|X_i|^p\log^p i\ll k^{-p}.$$

故$\sum_{k=1}^{\infty}P(|S_{2^k} - S| > \varepsilon) < \infty$.

再由引理1.1及(2.1)式得

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(\max_{2^{k-1}<j\leq 2^k}|S_j - S_{2^{k-1}}| > \varepsilon)\ll \sum_{k=1}^{\infty}(\log 2^k)^p\sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k}E|X_j|^p\ll \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k}(\log j)^pE|X_j|^p = \sum_{n=1}^{\infty}\log^p n\cdot E|X_n - EX_n|^p < \infty. \tag{2.3}$$

因此,由(2.2)式和(2.3)式及Borel-Cantelli引理,当$k\to\infty$时,$S_{2^k}\xrightarrow{a.s.}S$,$\max_{2^{k-1}<j\leq 2^k}|S_j - S_{2^{k-1}}|\xrightarrow{a.s.}0$,故$S_n\xrightarrow{a.s.}S$.

推论 2.1 设$\{X_n;n\geq 1\}$满足(2.1)式,设$\{b_n;n\geq 1\}$是一非负数列,且$b_n\uparrow\infty$.若$\sum_{n=1}^{\infty}\log^p nE|X_n|^p/b_n^p < \infty$,则$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i)\to 0$, a.s..

取$b_n = n^{1/p}$和$b_n = n^{1/p}(\log n)^{(p+1+\delta)/p}$,则由推论2.1可得推论2.2.

推论 2.2 设$\{X_n;n\geq 1\}$是$\tilde{\rho}$混合序列,若$E|X_n|^p\leq c(\log n)^{-(p+1+\delta)}$,$1 < p\leq 2$,$\delta > 0$,$n\geq 2$则$n^{-1/p}\sum_{i=1}^{n}X_i\to 0$, a.s..

推论 2.3 设$\{X_n;n\geq 1\}$是$\tilde{\rho}$混合序列,若$E|X_n|^p\leq c$,则$n^{-1/p}(\log n)^{-(p+1+\delta)/p}\sum_{i=1}^{n}X_i\to 0$, a.s..

定理 2.2 (三级数定理)设$\{X_n;n\geq 1\}$是$\tilde{\rho}$混合序列,对某$c > 0$,记$X_n^c\triangleq X_nI(|X_n|\leq c)$.如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n| > c) < \infty, \tag{2.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}EX_n^c < \infty, \tag{2.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log^p nE|X_n^c|^p < \infty,\ 1 < p\leq 2, \tag{2.6}$$

则$\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ a.s.收敛.

证明 由Cr不等式得$\sum_{n=1}^{\infty}\log^p nE|X_n^c - EX_n^c|^p\leq c\sum_{n=1}^{\infty}\log^p nE|X_n^c|^p < \infty$.由此及定理2.1得$\sum_{n=1}^{\infty}(X_n^c - EX_n^c) < \infty$ a.s.,再由(2.5)式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}X_n^c < \infty \text{ a.s.}. \tag{2.7}$$

结合(2.4)式得$\sum_{n=1}^{\infty}P(X_n\neq X_n^c) = \sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n| > c) < \infty$,所以由Borel-Cantelli引理得$P(\{X_n\neq X_n^c\}, \text{i.o.}) = 0$.由此及(2.7)式得$\sum_{n=1}^{\infty}X_n < \infty$ a.s.即$\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ a.s.收敛.

定理 2.3 设$\{X_n;n\geq 1\}$是$\tilde{\rho}$混合序列,$\{g_n(x);n\geq 1\}$是偶函数序列,它们在区间$x > 0$中取正值,不减,而且对每一个n满足条件:(1)在区间$x > 0$中,$x/g_n(x)$不减,或者(2)在同一区间中,$x/g_n(x)$和$g_n(x)/x^p$都是不增的,且$EX_n = 0$.

此外,$\{a_n;n\geq 1\}$是常数列,满足$0 < a_n\uparrow\infty$和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log^p nEg_n(X_n)/g_n(a_n) < \infty, \tag{2.8}$$

则$\sum_{n=1}^{\infty}X_n/a_n$ a.s.收敛.从而由Kronecker引理[5],有$a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{a.s.}0, n\to\infty$.

证明 因为$g_n(x)$当$x > 0$时单调不减,故

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{|X_n|\geq a_n\}\leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{|X_n|\geq a_n}g_n(X_n)/g_n(a_n)\,dP\leq \sum_{n=1}^{\infty}Eg_n(X_n)/g_n(a_n) < \infty.$$

假设对某个n,函数$g_n(x)$满足条件(1),则在区间$|x|\leq a_n$,有$\frac{x^p}{a_n^p}\leq \frac{g_n^p(x)}{g_n^p(a_n)}\leq \frac{g_n(x)}{g_n(a_n)}$.若满足条件(2),在同一区间中,有$\frac{x^p}{g_n(x)}\leq \frac{a_n^p}{g_n(a_n)}$.因此,无论$g_n(x)$满足条件(1)还是条件(2)都有$\frac{x^p}{a_n^p}\leq \frac{g_n(x)}{g_n(a_n)}$.

记$X_n^{a_n} = X_nI(|X_n|\leq a_n)$,则对任一$n$,由于$g_n(x)$不减,因此,

$$E|X_n^{a_n}|^p\leq E(|X_n|^pI(|X_n|\leq a_n)) = \int_{|X_n|\leq a_n}|X_n|^p\,dP\leq \frac{a_n^p}{g_n(a_n)}\int_{|X_n|\leq a_n}g_n(X_n)\,dP\leq \frac{a_n^p}{g_n(a_n)}Eg_n(X_n).$$

再由(2.8)式得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^p nE|X_n^{a_n}|^p}{a_n^p}\ll \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^p nEg_n(X_n)}{g_n(a_n)} < \infty$.

最后,若条件(1)被满足,则

$$|EX_n^{a_n}| = |EX_nI(|X_n|\le a_n)| \le \left|\int_{|X_n|\le a_n} X_n\,\mathrm{d}P\right|$$
$$\le \frac{a_n}{g_n(a_n)}\int_{|X_n|\le a_n} g_n(X_n)\,\mathrm{d}P \le \frac{a_n}{g_n(a_n)}Eg_n(X_n).$$
若条件(2)被满足,由于此时 $EX_n=0$, $x/g_n(x)$ 不减,那么
$$|EX_n^{a_n}| = |EX_nI(|X_n|>a_n)| \le \frac{a_n}{g_n(a_n)}\cdot \int_{|X_n|>a_n} g_n(X_n)\,\mathrm{d}P \le \frac{a_n}{g_n(a_n)}Eg_n(X_n),$$
所以 $\sum_{n=1}^\infty E\frac{X_n^{a_n}}{a_n} \le \sum_{n=1}^\infty \frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)} < \infty$.故由三级数定理可知定理 2.3成立.

定理 2.4 设 $\{a_n;n\ge 1\}$, $\{b_n;n\ge 1\}$都是非负数列, $b_n\uparrow\infty$.记 $c_1=b_1/a_1$, $c_n=b_na_n^{-1}\log^{-1}n$, $n\ge 2$; $\{X_n;n\ge 1\}$是不同分布的 $\tilde{\rho}$混合序列,并对任意 $x>0$及 $n\ge 1$,有 $P(|X_n|\ge x)\le cP(|X|\ge x)$.记 $N(x)=\#\{n: c_n\le x\}$, $x\in R$. $1<p\le 2$.如果满足 $EN(|X|)<\infty$, $\sum_{k=1}^\infty k^{p-1}P(|X|>k)\sum_{j=k}^\infty N(j)/j^{p+1}<\infty$,则存在 $d_n\in R$, $n\ge 1$,使得
$$b_n^{-1}\sum_{i=1}^n a_iX_i - d_n\to 0,\ \text{a.s.}.$$

证明 记 $S_n=\sum_{i=1}^n a_iX_i$, $T_n=\sum_{i=1}^n a_iX_i^{c_i}$, $n\ge 1$.因为
$$\sum_{n=1}^\infty P(X_n\ne X_n^{c_n}) = \sum_{n=1}^\infty P(|X_n|>c_n)\le c\sum_{n=1}^\infty P(|X|>c_n) = c\sum_{n=1}^\infty\sum_{j<c_n\le j+1}P(|X|>j)\le$$
$$\sum_{n=1}^\infty (N(j+1)-N(j))P(|X|>j)\ll \sum_{n=1}^\infty N(j)(P(|X|>j-1)-P(|X|>j)) =$$
$$\sum_{n=1}^\infty N(j)P(j-1<|X|\le j)\ll EN(|X|)<\infty,$$
则由 Borel-Cantelli引理[5]知,对 $\{d_n;n\ge 1\}$, $b_n^{-1}S_n-d_n$与 $b_n^{-1}T_n-d_n$同 a.s.收敛.又
$$\sum_{n=1}^\infty \log^p nE|a_n(X_n^{c_n}-EX_n^{c_n})|^p/b_n^p\le$$
$$\sum_{n=1}^\infty c_n^{-p}E|X_n|^pI(X\le c_n)\le c\sum_{n=1}^\infty c_n^{-p}(c_n^pP(|X|>c_n)+E|X|^pI(|X|\le c_n))\ll EN(|X|)+\sum_{n=1}^\infty c_n^{-p}E|X|^pI(|X|\le c_n),$$
而
$$\sum_{n=1}^\infty c_n^{-p}E|X|^pI(|X|\le c_n)\ll$$
$$\sum_{n=1}^\infty c_n^{-p}\sum_{k=0}^{c_n}k^{p-1}P(|X|>k) = \sum_{k=1}^\infty k^{p-1}\cdot P(|X|>k)\sum_{n:c_n>k}c_n^{-p} = \sum_{k=1}^\infty k^{p-1}P(|X|>k)\sum_{j=k}^\infty\sum_{j<c_n\le j+1}j^{-p} = \sum_{k=1}^\infty k^{p-1}P(|X|>k)\sum_{j=k}^\infty(N(j+1)-N(j))j^{-p} = \sum_{k=1}^\infty k^{p-1}\cdot P(|X|>k)\sum_{j=k}^\infty N(j)((j-1)^{-p}-j^{-p}) = \sum_{k=1}^\infty k^{p-1}P(|X|>k)\sum_{j=k}^\infty N(j)/j^{p+1}<\infty.$$
故 $\sum_{n=1}^\infty \log^p nE|a_n(X_n^{c_n}-EX_n^{c_n})|^p/b_n^p<\infty$.
由推论 2.1知 $\sum_{n=1}^\infty a_n(X_n^{c_n}-EX_n^{c_n})/b_n$几乎处处收敛.所以,由 Kronecker引理[5],得 $b_n^{-1}\sum_{i=1}^n a_i(X_i^{c_i}-EX_i^{c_i})\to 0$, a.s..只需取 $d_n=b_n^{-1}\sum_{i=1}^n a_iEX_i^{c_i}$, $n\ge 1$,即得到结论.

推论 2.4 若定理 2.4的条件都满足,且 $EX_n=0$, $n\ge 1$,并有 $\sum_{n=1}^\infty EN(|X/n|)<\infty$,则 $b_n^{-1}\sum_{i=1}^n a_iX_i\to 0$, a.s..

证明 因为
$$\sum_{n=1}^\infty a_n\log nEX_nI(|X_n|\le c_n)/b_n\le$$
$$\sum_{n=1}^\infty c_n^{-1}EX_nI(|X_n|\le c_n)\le\sum_{n=1}^\infty c_n^{-1}(c_nP(|X|>c_n)+E|X|I(|X|\le c_n))\ll EN(|X|)+$$
$$\sum_{n=1}^\infty\int_1^\infty P(|X|>t)\,\mathrm{d}t/c_n = EN(|X|)+$$
$$\sum_{n=1}^\infty\int_1^\infty P(|X|>t)\,\mathrm{d}t/c_n = EN(|X|)+$$
$$\sum_{n=1}^\infty\sum_{i=1}^\infty P(|X|>ic_n) = EN(|X|)+$$
$$\sum_{j=1}^\infty\sum_{i=1}^\infty\sum_{j<c_n\le j+1}P(|X|>ji) = EN(|X|)+$$
$$\sum_{j=1}^\infty\sum_{i=1}^\infty(N(j+1)-N(j))P(|X|>ji)\ll EN(|X|)+\sum_{i=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty N(j)P((j-1)i<|X|\le ji)\ll EN(|X|)+\sum_{i=1}^\infty EN(|X/i|)<\infty.$$
故
$$\sum_{n=1}^\infty a_nEX_nI(|X_n|\le c_n)/b_n\le\sum_{n=1}^\infty a_n\log n\cdot EX_nI(|X_n|\le c_n)/b_n<\infty.$$
由 Kronecker引理[5]及定理 2.4知结论成立.

定理 2.5 设 $\{a_n;n\ge 1\}$, $\{b_n;n\ge 1\}$都是非负数列, $b_n\uparrow\infty$.记 $c_1=b_1/a_1$, $c_n=b_na_n^{-1}\log^{-1}n$, $n\ge 2$. $\{X_n;n\ge 1\}$是不同分布的 $\tilde{\rho}$混合序列,并对任意 $x>0$及 $n\ge 1$,有 $P(|X_n|\ge x)\le cP(|X|\ge x)$.记 $N(x)=\#\{n: c_n\le x\}$, $x\in R$. $1<p\le 2$,如果满足 $EN(|X|)<\infty$, $\sum_{n=1}^\infty EN(|X/n|)<\infty$, $\max_{1\le j\le n}c_j^p\sum_{j=n}^\infty c_j^{-p}=O(n)$.则 $b_n^{-1}\sum_{i=1}^n a_iX_i\to 0$, a.s. $n\to\infty$.

证明 因为

(下转第 137页 Continue on page 137)

$\tilde{R}_1 =$

$$\begin{bmatrix} (0.85, 0.92, 0.92, 1.0) & (0.15, 0.31, 0.46, 0.62) & (0.0, 0.14, 0.14, 0.38) & (0.5, 0.63, 0.75, 0.88) \\ (0.77, 0.85, 0.92, 1.0) & (0.0, 0.15, 0.31, 0.46) & (0.14, 0.24, 0.33, 0.43) & (0.38, 0.63, 0.63, 0.88) \\ (0.69, 0.69, 0.92, 0.92) & (0.77, 0.77, 1.0, 1.0) & (0.48, 0.57, 0.67, 0.76) & (0.63, 0.75, 0.88, 1.0) \\ (0.46, 0.54, 0.69, 0.85) & (0.69, 0.77, 0.92, 1.0) & (0.43, 0.48, 0.57, 0.62) & (0.25, 0.5, 0.5, 0.75) \\ (0.54, 0.62, 0.69, 0.77) & (0.69, 0.77, 0.85, 0.92) & (0.90, 0.95, 0.95, 1.0) & (0.38, 0.5, 0.63, 0.75) \end{bmatrix}$$

5) 根据 (6) 式计算属性权重向量 k_j.

$k_1 = 0.0410, k_2 = 0.3711, k_3 = 0.5370, k_4 = 0.0509$.

6) 利用 $\tilde{z}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{r}_{ij} k_j$ 计算方案 x_i 的模糊效用值 $\tilde{z}_i$,并由 (4) 式计算 $E[\tilde{z}_i](i = 1, 2, 3, 4, 5)$.

$E[\tilde{z}_1] = 0.3044, E[\tilde{z}_2] = 0.3068, E[\tilde{z}_3] = 0.7359, E[\tilde{z}_4] = 0.6470, E[\tilde{z}_5] = 0.8654$.

7) 根据 $E[\tilde{z}_i](i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 的大小得到方案的优劣排序为:

$x_5 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2 \succ x_1$,

故最优方案为 x_5.

此方案经实践证明有效、可行而且计算简单.

4 结束语

模糊多属性决策是一个大有前途的研究方向,它在决策科学中的研究相当活跃.本文针对属性值为梯形模糊数的模糊多属性决策问题,给出了一种基于信息熵的决策方法.该方法中的属性权重是通过对调查的数据利用信息熵而计算出来的,比专家主观给出的属性权重更客观,更可靠.因此,本文得到的方案排序更合理.实例表明该决策方法有效、可行而且计算简单,易于实现.该方法为解决模糊多属性决策问题提供了新途径.

参考文献:

[1] 曾玲.具有属性优先序信息的模糊多属性决策方法 [C].中国运筹学会第八届学术交流会论文集, 2006(6): 706–710.

[2] Chen S J, Hwang C L. Fuzzy multiple attribute decision making: methods and application [M]. New York: Springer, 1992.

[3] 李荣钧.模糊多准则决策理论与应用 [M].北京:科学出版社, 2002.

[4] Hwang C L, Yoon K S. Multiple attribute decision making and application [M]. New York: Springer–Verlag, 1981.

[5] Liu B. Theory and practice of uncertain programming [M]. Heidelberg: Physica–Verlag, 2002.

[6] 徐泽水.不确定多属性决策方法及应用 [M].北京:清华大学出版社, 2004.

(责任编辑:尹 闯)

(上接第 130页 Continue from page 130)

$\sum_{n=1}^{\infty} \log^p n E|a_n(X_n^{c_n} - EX_n^{c_n})|^p / b_n^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-p} \cdot E|X_n|^p I(|X| \leqslant c_n) \leqslant c\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-p} (c_n^p P(|X| > c_n) + E|X|^p I(|X| \leqslant c_n)) \leqslant EN(|X|) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-p} E|X|^p I(|X| \leqslant c_n)$,

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-p} E|X|^p I(|X| \leqslant c_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-p} \cdot E|X|^p I(|X| \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} c_j) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} EX^p c_n^{-p} \cdot I(\max_{1\leqslant j\leqslant n} c_{j-1} \leqslant |X| \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} c_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} c_{j-1} \leqslant |X| \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} c_j) \max_{1\leqslant j\leqslant n} c_j^p \sum_{n=j}^{\infty} c_n^{-p} \leqslant c\sum_{j=1}^{\infty} j \cdot P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} c_{j-1} \leqslant |X| \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} c_j) \leqslant c\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{j} P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} c_{j-1} \leqslant |X| \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} c_j) = c\sum_{j=1}^{\infty} P(|X| > \max_{1\leqslant j\leqslant n} c_{j-1}) \leqslant c(1 + \sum_{j=1}^{\infty} P(|X| > c_n)) \leqslant c(1 + EN(|X|)) < \infty$.

由推论 2.1可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(X_n^{c_n} - EX_n^{c_n})/b_n$ 几乎处处收敛.所以,再由 Kronecker引理[5],得

$b_n^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} a_i(X_i^{c_i} - EX_i^{c_i}) \to 0, n \to \infty$, a. s..

由推论 2.4的证明可知 $b_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} a_i EX_i I(|X_i| \leqslant c_i) \to 0, n \to \infty$.则结论成立.

参考文献:

[1] 吴群英,林亮. $\tilde{\varphi}$ 混合序列的完全收敛性和强收敛性 [J].工程数学学报, 2004, 21(1): 75–80.

[2] 吴群英. $\tilde{\rho}$ 混合序列的若干极限性质 [J].工程数学学报, 2004, 21(1): 58–64.

[3] Bradley R C. Eqnivalent mixing conditions for random fields [J]. Institute of Mathematical Statistics, 1993, 21(4): 1921–1926.

[4] 吴群英.混合序列的概率极限理论 [M].北京:科学出版社, 2006: 210–211.

[5] 林正炎,陆传荣,苏中根.概率极限理论基础 [M].北京:高等教育出版社, 1999.

(责任编辑:尹 闯)