DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.02.011
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(2): 131- 134

ρ-混合序列 VaR核估计的强收敛性和 Bahadur表达*

Strong Convergence and Bahadur Representation of the Kernel Estimation of Value at Risk on ρ-mixing Sequences

杨秀桃,杨善朝,韦香兰
YANG Xiu-tao, YANG Shan-chao, WEI Xiang-lan

(广西师范大学数学科学学院,广西桂林 541004)
(College of Mathematics Science, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 在 ρ-混合序列下,运用矩不等式讨论 VaR核估计 $\hat{\xi}_{p,h}$ 的强收敛性和 Bahadur表达,得到2个 a.s.收敛定理.

关键词: 混合序列 VaR 强收敛 Bahadur表达 矩不等式
中图法分类号: O211.67 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)02-0131-04

Abstract The strong convergence and Bahadur's representation of $\hat{\xi}_{p,h}$ for ρ-mixing series, which is the kernel estimation of VaR are discussed by using moment inequalities, and geting the two convergense theorem.

Key words mixing sequence, value at risk, strong convergence, Bahadur's representation, moment inequalities

VaR是建立在正常市场环境中一定置信水平下预期最大损失的一种风险度量,现已得到广泛认同和应用[1,2].许多学者对相依混合序列下 VaR核估计的性质进行研究,如:文献[3]在 α-混合序列下讨论 VaR基于分布的非参数核估计 $\hat{\xi}_{p,h}$ 的强相结合性;文献[4]在 T-混合序列下给出 VaR样本分位数的核估计 Bahadur表示,但其收敛速度不是最优形式.除了文献[3]在 T-混合情形下对 VaR核估计 $\hat{\xi}_{p,h}$ 的强收敛速度和渐进正态性进行过讨论之外,还未见有文献在其他的混合情形下对此性质作出过相关讨论.本文运用矩不等式[5],在 ρ-混合序列下讨论 VaR基于分布的核估计 $\hat{\xi}_{p,h}$ 的强收敛性和 Bahadur表达.

1 相关概念及引理

假设 $\|X\|_r =: (E|X|^r)^{1/r}$ 是随机变量 X 的 r阶模, $[x]$是实数 x 的整数部分.对任意随机变量 X,记 $F_X(x) =: P(X < x)$, $L_p = \{X: X$是 $r.v.$,且 $E|X|^p < \infty\}(0 < p < \infty)$.记 C为任意常数.

设 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 为随机变量序列,记 $F_n^k = \sigma(X_j, n \leqslant j \leqslant k)$,若当 $n \to \infty$ 时有

$$\rho(n) = \sup_k \sup_{X \in L_2(F_1^k), Y \in L_2(F_{k+n}^\infty)} \frac{|EXY - EXEY|}{\sqrt{E(X-EX)^2 E(Y-EY)^2}} \to 0,$$

则称 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 为 ρ-混合的.

对于严平稳收益序列 $\{X_t: t \geqslant 1\}$,给定 $p \in (0,1)$,在 $1-p$置信水平下其 VaR值为 $\xi_p = -\inf\{u: F(u) \geqslant p\}$.

设 $G(x) = \int_{-\infty}^x K(u)\mathrm{d}u$,其中 $G_h(\cdot) = G(\cdot/h)$, $K(x)$为核函数. $\hat{F}_{n,h}(x) = n^{-1}\sum_{j=1}^n G_h(x - X_j)$作为 $F(x)$的估计量,考虑满足 $\hat{F}_{n,h}(x) = p$的 $\hat{\xi}_{p,h}$,作为 ξ_p 核估计量.

引理 1.1[5] 设 $\{X_i: i \geqslant 1\}$为 ρ-混合随机变量序列,存在某个 $\lambda > 0$,使 $\rho(n) = O(n^{-\lambda})$,又设 $EX_i = 0$, $E|X_i|^r < \infty$,其中 $r > 1$,则对任意整数 $m \geqslant 1$,存在正常数 $C(m)$ 使得当 $r > 2$时,有

$$E|\sum_{i=1}^n X_i|^r \leqslant C(m) n^{w(m)} \{\sum_{i=1}^n E|X_i|^r + (\sum_{i=1}^n E$$

收稿日期: 2007-12-04
修回日期: 2007-12-10
作者简介: 杨秀桃(1983-),女,硕士研究生,主要从事金融统计研究。
* 国家自然科学基金项目(10661003),广西自然科学基金项目(0728091),广西研究生教育创新计划项目(2007106020701M49)资助。

$X_i^2)^{r/2}\}$, (1)

其中 $\psi(m) = (r-1)\theta^r$ 且 $0 < \theta < 1$.

引理 1.1中 θ 是一个充分小的正数.另外,因为当 $m \to \infty$ 时,$\psi(m) \to 0$,所以在应用中,$n^{\psi}(m)$ 常常被忽略.

引理 **1.2**[6] $\{b_1, b_2, \cdots, s\}$ 是一个非减无界正数序列,$\{a_1, a_2, \cdots, s\}$ 是一列非负数,r 是一取定正数,假若对每一个 $n \geqslant 1$ 有 $E(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k|)^r \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j$.如果 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j / b_j^r < \infty$,那么

$$\lim_{n \to \infty} S_n / b_n = 0 \quad \text{a.s.}. \tag{2}$$

引理 **1.3**[7] 设核函数 $K(u)$ 和密度函数 $f(x)$ 满足:

(i) $K(u)$ 在 R^1 上有界,$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(u)| \mathrm{d}u < \infty$,$\int_{-\infty}^{+\infty} K(u)\mathrm{d}u = 1$;

(ii) $\lim_{|u| \to \infty} K(u) = 0$ 或者 $f(x)$ 在 R^1 上有界.

如果 $h \to 0$,则对 $f(x)$ 的任一连续点 x,有

$$\lim_{n \to \infty} E\hat{f}_{n,h}(x) = f(x). \tag{3}$$

如果 $f(x)$ 在 R^1 上一致连续,则有

$$\lim_{n \to \infty} \sup |E\hat{f}_{n,h}(x) - f(x)| = 0. \tag{4}$$

这里 $\hat{f}_{n,h}(x) = (nh)^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_h(x - X_i)$.

引理 **1.4**[8] 设 $\{X_n: n \geqslant 1\}$ 为随机变量序列,若对任一 $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \to \infty} \sup P(\bigcup_{m=n}^{\infty} |X_m - X| \geqslant \varepsilon) = 0$,那么 $X_n \to X$ a.s..

2 主要结论

给出 4个条件:

条件 **2.1** $\{X_t: t \geqslant 1\}$ 是严平稳且是 α-混合序列,$\alpha(n) = O(n^{-\lambda})$ $(\lambda > 1)$,这里 $t \geqslant 1$,X_t 有连续分布函数 $F(x)$ 和连续密度函数 $f(x)$.

条件 **2.2** $f(\xi_p) > 0$, $p \in (0,1)$, $f(\cdot)$ 在 ξ_p 的邻域 $B(\xi_p)$ 中有连续三阶导数.对于 (X_1, X_{k+1}), $k \geqslant 1$ 的联合分布函数 F_k,其三阶偏导数在 $B(\xi_p)$ 中关于 k 一致有界.

条件 **2.3** 核函数 K 是一元概率密度函数,有连续有界二阶导数,且满足以下的矩条件:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} uK(u)\mathrm{d}u = 0 \text{和} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u)\mathrm{d}u = \sigma_K^2 < \infty.$$

条件 **2.4** 平滑窗宽 h 满足 $h \to 0$,而且对 $\forall \varepsilon > 0$, $nh^{3-\varepsilon} \to \infty$,以及当 $n \to \infty$ 时,$nh^4 \log^2(n) \to 0$.

引理 **2.1** 在条件 2.1~2.4下,如果 $x_0 \in B(\xi_p)$,那么

(i) $EG_h(x_0 - X_1) = F(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f'(x_0)\sigma_K^2 + o(h^2)$, (5)

(ii) $h^{-1}EK_h(x_0 - X_1) = f(x_0) + O(h^2)$, (6)

(iii) $h^{-2}EK_h'(x_0 - X_1) = f^{2\prime}(x_0) + O(h)$. (7)

证明 作变换 $u = (x_0 - y)/h$, $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0,1)$,则

(i) $EG_h(x_0 - X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} G((x_0 - y)/h)\mathrm{d}F(y) = G((x_0 - y)/h)F(y)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\mathrm{d}G((x_0 - y)/h) = h^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)K((x_0 - y)/h)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} F(x_0 - uh)K(u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} (F(x_0) - f(x_0)uh + \frac{1}{2}f'(x_0)u^2h^2 - \frac{1}{6}f''(x_0 - \theta_1 uh)u^3h^3)K(u)\mathrm{d}u = F(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f'(x_0)\sigma_K^2 + o(h^2)$.

(ii) $h^{-1}EK_h(x_0 - X_1) = h^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} K((x_0 - y)/h)f(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} K(u)f(x_0 - uh)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x_0) - f'(x_0)uh + \frac{1}{2}f''(x_0 - \theta_2 uh)u^2h^2)K(u)\mathrm{d}u = f(x_0) + C\sigma_K^2 h^2 = f(x_0) + O(h^2)$.

(iii) 由引理 1.3有 $h^{-2}EK'_h(x_0 - X_1) = h^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} K'((x_0 - y)/h)f(y)\mathrm{d}y = h^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} (-f(y))\mathrm{d}K((x_0 - y)/h) = -h^{-1}f(y)K_h(x_0 - y)|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} K(u)f'(x_0 - uh)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} (f'(x_0) - f''(x_0)uh + \frac{1}{2}f'''(x_0 - \theta_3 uh)u^2h^2)K(u)\mathrm{d}u = f'(x_0) + C\sigma_K^2 h^2 = f'(x_0) + O(h^2)$.

引理 **2.2** 如果 $k \geqslant 1$,则存在仅与 k 有关的正常数 C,使得

$$\sum_{j=1}^{n} j^{k-1} \geqslant Cn^k. \tag{8}$$

证明 $\sum_{j=1}^{n} j^{k-1} \geqslant \sum_{r: 2^r \leqslant n} \sum_{2^{r-1} \leqslant j < 2^r} j^{k-1} \geqslant \sum_{r: 2^r \leqslant n} \sum_{2^{r-1} \leqslant j < 2^r} (2^{r-1})^{k-1} = \sum_{r: 2^r \leqslant n} 2^{r-1} 2^{(r-1)(k-1)} = \sum_{1 \leqslant r \leqslant \log_2 n} 2^{k(r-1)} = (1 - 2^{k[\log_2 n]})/(1 - 2^k) \geqslant (2^{k(\log_2 n - 1)} - 1)/2^k \geqslant 2^{k(\log_2 n - 2)}/2^k = n^k 2^{-2k}/2^k = Cn^k$.

定理 **2.1** 如果条件 2.1~2.4成立,那么有 $\hat{\xi}_{p,h} = \xi_p + o(n^{-1/2}\log^{1/2}(n))$ a.s..

证明 令 $\varepsilon_n = n^{-1/2}\log^{1/2}(n)$, $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$,记 $c_1 = :\inf_{x \in [\xi_p - \delta, \xi_p + \delta]} f(x)$, $\forall \delta > 0$,根据引理 1.4有

$$\hat{\xi}_{p,h}-\xi_p=o(n^{-1/2}\log^{1/2}(n))\quad \text{a.s.}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{k\to\infty}P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|\hat{\xi}_{p,h}-\xi_p|>\varepsilon u_n))=0, \tag{9}$$

由于

$P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|\hat{\xi}_{p,h}-\xi_p|>\varepsilon u_n))=P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(F(\xi_p+\varepsilon u_n)-\hat{F}_{p,h}(\xi_p+\varepsilon u_n)>F(\xi_p+\varepsilon u_n)-\hat{F}_{p,h}(\hat{\xi}_{p,h})))+P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(F(\xi_p-\varepsilon u_n)-\hat{F}_{p,h}(\xi_p-\varepsilon u_n)<F(\xi_p-\varepsilon u_n)-\hat{F}_{p,h}(\hat{\xi}_{p,h})))=P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(F(\xi_p+\varepsilon u_n)-\hat{F}_{p,h}(\xi_p+\varepsilon u_n)>f(\xi_p+\theta_1\varepsilon u_n)\varepsilon u_n))+P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(F(\xi_p-\varepsilon u_n)-\hat{F}_{p,h}(\xi_p-\varepsilon u_n)<-f(\xi_p-\theta_2\varepsilon u_n)\varepsilon u_n))\leqslant P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|F(\xi_p+\varepsilon u_n)-\hat{F}_{p,h}(\xi_p+\varepsilon u_n)|>c_1\varepsilon u_n))+P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|F(\xi_p-\varepsilon u_n)-\hat{F}_{p,h}(\xi_p-\varepsilon u_n)|>c_1\varepsilon u_n))$,

因而,$\hat{\xi}_{p,h}-\xi_p=o(n^{-1/2}\log^{1/2}(n))$ a.s.,转化为证明

$$\lim_{k\to\infty}P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|F(\xi_p+\lambda\varepsilon u_n)-\hat{F}_{p,h}(\xi_p+\lambda\varepsilon u_n)|>c_1\varepsilon u_n))=0,\ \forall\varepsilon>0, \tag{10}$$

这里 $\lambda=\pm1$.

当 $n\to\infty$ 时,$\xi_p+\lambda\varepsilon u_n\in B(\xi_p)$,且由条件 2.4,$h^2/u_n=h^2/[n^{-1/2}\log^{1/2}(n)]\to0$,以及引理 2.1的(5)式,有

$|E\hat{F}_{p,h}(\xi_p+\lambda\varepsilon u_n)-F(\xi_p+\lambda\varepsilon u_n)|=|E[n^{-1}\sum_{t=1}^{n}G_h(\xi_p+\lambda\varepsilon u_n-X_t)]-F(\xi_p+\lambda\varepsilon u_n)|=|EG_h(\xi_p+\lambda\varepsilon u_n-X_1)-F(\xi_p+\lambda\varepsilon u_n)|=|\frac{1}{2}h^2\cdot f'(\xi_p+\lambda\varepsilon u_n)\sigma_k^2+o(h^2)|=O(h^2)=o(u_n)$. (11)

令 $Z_t=G_h(\xi_p+\lambda\varepsilon u_n-X_t)-EG_h(\xi_p+\lambda\varepsilon u_n-X_t)$,由(11)式,有

$P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|F(\xi_p+\lambda\varepsilon u_n)-\hat{F}_{p,h}(\xi_p+\lambda\varepsilon u_n)|>c_1\varepsilon u_n))\leqslant P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|n^{-1}\sum_{t=1}^{n}Z_t|+|F(\xi_p+\lambda\varepsilon u_n)-E\hat{F}_{p,h}(\xi_p+\lambda\varepsilon u_n)|>c_1\varepsilon u_n))=P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|n^{-1}\sum_{t=1}^{n}Z_t|>c_1\varepsilon u_n))$. (12)

进而,证明(10)式又转化为证明

$$\lim_{k\to\infty}P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|n^{-1}\sum_{t=1}^{n}Z_t|>c_1\varepsilon u_n))=0. \tag{13}$$

事实上,由于 $EZ_t=0,|Z_t|\leqslant2$,取 $r>2$,有 $E|Z_t|^r<\infty$,根据引理 1.1,引理 1.2以及引理 2.2,可得当 m 充分大时,$\delta(m)\to0$,有

$E(\max_{1\leqslant j<n}|\sum_{t=1}^{j}Z_t|)^r\leqslant E(|\sum_{t=1}^{n}Z_t|)^r\leqslant C(m)n^{\delta(m)}\{nE|Z_1|^r+n^{r/2}(EZ_1^2)^{r/2}\}\leqslant Cn^{1+\delta(m)}+Cn^{r/2}\leqslant Cn^{r/2}\leqslant C\sum_{j=1}^{n}j^{r/2-1}$.

这里记 $a_j=j^{r/2-1}\geqslant0, b_j=ju_j=j^{1/2}\log^{1/2}j>0, j\geqslant1$,这里 $\{b_j,j\geqslant1\}$ 是一个非减无界正数序列,有

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_j/b_j^r=\sum_{j=1}^{\infty}j^{-1}\log^{-r/2}j<\infty,$$

那么 $\lim_{n\to\infty}\sum_{t=1}^{n}\frac{Z_t}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{t=1}^{n}\frac{Z_t}{nu_n}=0$ a.s.. 又 $n^{-1}\sum Z_t=o(u_n)$ a.s.$\Leftrightarrow\lim_{k\to\infty}P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|n^{-1}\sum_{t=1}^{n}Z_t|>c_1\varepsilon u_n))=0$,

即(13)式得证.

定理 2.2 如果条件 2.1~ 2.4成立,那么有 $\hat{\xi}_{p,h}-\xi_p=(p-\hat{F}_{n,h}(\xi_p))/f(\xi_p)+O(n^{-3/5})$ a.s..

证明 由 $\hat{F}_{n,h}(\hat{\xi}_{p,h})=p$,对 $\hat{F}_{n,h}(\hat{\xi}_{p,h})$ 在 ξ_p 上泰勒展开,得

$$p=\hat{F}_{n,h}(\xi_p)+\hat{f}_{n,h}(\xi_p)(\hat{\xi}_{p,h}-\xi_p)+\frac{1}{2}\hat{f}'_{n,h}(\xi_p+\theta(\hat{\xi}_{p,h}-\xi_p))(\hat{\xi}_{p,h}-\xi_p)^2, \tag{14}$$

其中 $\theta\in(0,1)$.而(14)式可转变为

$f(\xi_p)(\hat{\xi}_{p,h}-\xi_p)=p-\hat{F}_{n,h}(\xi_p)-\frac{1}{2}\hat{f}'_{n,h}(\xi_p+\theta(\hat{\xi}_{p,h}-\xi_p))(\hat{\xi}_{p,h}-\xi_p)^2+(f(\xi_p)-\hat{f}_{n,h}(\xi_p))(\hat{\xi}_{p,h}-\xi_p)$.

整理得

$$\hat{\xi}_{p,h}-\xi_p=(p-\hat{F}_{n,h}(\xi_p))/f(\xi_p)-\frac{1}{2}\hat{f}'_{n,h}(\xi_p+\theta(\hat{\xi}_{p,h}-\xi_p))(\hat{\xi}_{p,h}-\xi_p)^2/f(\xi_p)+(f(\xi_p)-\hat{f}_{n,h}(\xi_p))(\hat{\xi}_{p,h}-\xi_p)/f(\xi_p). \tag{15}$$

由于 $\hat{f}_{n,h}(\xi_p)=(nh)^{-1}\sum_{t=1}^{n}K_h(\xi_p-X_t)$,令 $\tau_n=n^{-1/2}h^{-1}\log(n)$,由引理 2.1的(6)式及条件 2.4,$h^2/\tau_n=h^2/[n^{-1/2}h\log^{1/2}(n)]\to0$,可知

$$E\hat{f}_{n,h}(\xi_p)-f(\xi_p)=O(h^2)=o(\tau_n). \tag{16}$$

又令 $h^{-1}K_h(\xi_p-X_t)-E[h^{-1}K_h(\xi_p-X_t)]=h^{-1}W_t$,记 $W_t=K_h(\xi_p-X_t)-E[K_h(\xi_p-X_t)]$.由(16)式,对于 $\forall\varepsilon>0$,有

$$P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|\hat{f}_{n,h}(\xi_p)-f(\xi_p)|>C\varepsilon\tau_n))\leqslant P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|(nh)^{-1}\sum_{t=1}^{n}W_t|+|E\hat{f}_{n,h}(\xi_p)-f(\xi_p)|>C\varepsilon\tau_n))=P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|(nh)^{-1}\sum_{t=1}^{n}W_t|>C\varepsilon\tau_n)). \tag{17}$$

由于 $EW_t=0,|W_t|\leqslant C<\infty$,取 $r>2$,有 $E|W_t|^r<\infty$.那么根据引理 1.1,引理 1.2以及引理 2.2,当 m 充分大时,$\delta(m)\to0$,则

$E(\max_{1\leqslant j<n}|\sum_{t=1}^{j}W_t|)^r\leqslant E(|\sum_{t=1}^{n}W_t|)^r\leqslant C(m)n^{\delta(m)}\{nE|W_1|^r+n^{r/2}(EW_1^2)^{r/2}\}\leqslant Cn^{1+\delta(m)}+$

$Cn^{r/2}\leqslant Cn^{r/2}\leqslant C\sum_{j=1}^{n} j^{r/2-1}$.

记 $a_j=j^{r/2-1}\geqslant 0, b_j=jh\varepsilon_j=j^{1/2}\log j>0, j\geqslant 1$,其中,$\{b_j, j\geqslant 1\}$是一个非减无界正数序列,有

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j/b_j^r=\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}\log^{-r}j<\infty.$$

那么 $\lim_{n\to\infty}\sum_{t=1}^{n}\frac{W_t}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{t=1}^{n}\frac{W_t}{nh\varepsilon_n}=0$ a.s.,

即 $(nh)^{-1}\sum_{t=1}^{n}W_t=o(\varepsilon_n)$ a.s.$\Leftrightarrow$

$\lim_{k\to\infty}P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|(nh)^{-1}\sum_{t=1}^{n}W_t|>C\varepsilon_n\varepsilon))=0$,

从而,由(17)式有

$$\lim_{k\to\infty}P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|\hat f_{n,h}(\xi_p)-f(\xi_p)|>C\varepsilon_n\varepsilon))=0.$$

再由引理1.4可得

$$\hat f_{n,h}(\xi_p)-f(\xi_p)=o(\varepsilon_n)=o(n^{-1/2}h^{-1}\log(n)).\tag{18}$$

又由于 $\hat f'_{n,h}(\xi_p+\theta(\hat\xi_{p,h}-\xi_p))=(nh^2)^{-1}\cdot\sum_{t=1}^{n}K'_h(\xi_p+\theta(\hat\xi_{p,h}-\xi_p)-X_t)$,且令 $\tau_n=n^{-1/2}h^{-2}\log(n)$,由引理2.5的(7)式及条件2.4,有 $h^2/\tau_n=h^2/[n^{-1/2}h^{-2}\log(n)]\to 0$,可知

$$E\hat f'_{n,h}(\xi_p+\theta(\hat\xi_{p,h}-\xi_p))-f'(\xi_p+\theta(\hat\xi_{p,h}-\xi_p))=O(h^2)=o(\tau_n).\tag{19}$$

又令 $h^{-2}K'_h(\xi_p+\theta(\hat\xi_{p,h}-\xi_p)-X_t)-E[h^{-2}\cdot K'_h(\xi_p+\theta(\hat\xi_{p,h}-\xi_p)-X_t)]=h^{-2}V_t$,这里记 $V_t=K'_h(\xi_p+\theta(\hat\xi_{p,h}-\xi_p)-X_t)-E[K'_h(\xi_p+\theta(\hat\xi_{p,h}-\xi_p)-X_t)]$.由(19)式,对于 $\forall\varepsilon>0$,

$$P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|\hat f'_{n,h}(\xi_p+\theta(\hat\xi_{p,h}-\xi_p))-f'(\xi_p+\theta(\hat\xi_{p,h}-\xi_p))|>C\tau_n\varepsilon))\leqslant P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|n^{-1}\sum_{t=1}^{n}V_t|+|E\hat f'_{n,h}(\xi_p+\theta(\hat\xi_{p,h}-\xi_p))-f'(\xi_p+\theta(\hat\xi_{p,h}-\xi_p))|>C\tau_n\varepsilon))=P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|n^{-1}\sum_{t=1}^{n}V_t|>C\tau_n\varepsilon)).\tag{20}$$

由于 $EV_t=0, |V_t|\leqslant C<\infty$,取 $r>2$,有 $E|V_t|^r<\infty$.根据引理1.1引理1.2以及引理2.2,当 m 充分大时,$\varepsilon(m)\to 0$,有

$$E(\max_{1\leqslant j<n}|\sum_{t=1}^{j}V_t|)^r\leqslant E(|\sum_{t=1}^{n}V_t|)^r\leqslant C(m)n^{\varepsilon(m)}\{nE|V_1|^r+n^{r/2}(EV_1^2)^{r/2}\}\leqslant Cn^{1+\varepsilon(m)}+Cn^{r/2}\leqslant Cn^{r/2}\leqslant C\sum_{j=1}^{n}j^{r/2-1}.$$

记 $a_j=j^{r/2-1}\geqslant 0, b_j=jh^2\tau_j=j^{1/2}\log j>0, j\geqslant 1$, $\{b_j, j\geqslant 1\}$是一个非减无界正数序列,有

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_j/b_j^r=\sum_{j=1}^{\infty}j^{-1}\log^{-r}j<\infty,$$

那么 $\lim_{n\to\infty}\sum_{t=1}^{n}\frac{V_t}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{t=1}^{n}\frac{V_t}{nh^2\tau_n}=0$ a.s.,

即 $(nh^2)^{-1}\sum_{t=1}^{n}V_t=o(\tau_n)$ a.s.$\Leftrightarrow$

$\lim_{k\to\infty}P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|(nh^2)^{-1}\sum_{t=1}^{n}V_t|>C\tau_n\varepsilon))=0$,从而由(20)式,有

$$\lim_{k\to\infty}P(\bigcup_{n=k}^{\infty}(|\hat f'_{n,h}(\xi_p+\theta(\hat\xi_{p,h}-\xi_p))-f'(\xi_p+\theta(\hat\xi_{p,h}-\xi_p))|>C\tau_n\varepsilon))=o(\tau_n)=o(n^{-1/2}h^{-2}\log(n)).\tag{21}$$

再由(18)式及条件2.2,有

$$\hat f'_{n,h}(\xi_p+\theta(\hat\xi_{p,h}-\xi_p))<C.\tag{22}$$

那么,由(18)式和(22)式以及定理2.1,可得

$\hat f'_{n,h}(\xi_p+\theta(\hat\xi_{p,h}-\xi_p))(\hat\xi_{p,h}-\xi_p)^2=O((\hat\xi_{p,h}-\xi_p)^2)=o(n^{-1}\log(n))$ a.s.,

$(f(\xi_p)-\hat f_{n,h}(\xi_p))(\hat\xi_{p,h}-\xi_p)=o((nh)^{-1}\log^{3/2}(n))$ a.s..

由于 $n^{-1}\log n/[(nh)^{-1}\log^{3/2}(n)]\to 0$ 和条件2.4得 $(nh)^{-1}\log^{3/2}n\leqslant Cn^{-3/5}$.因此,(15)式变为

$$\hat\xi_{p,h}-\xi_p=\frac{p-\hat F_{n,h}(\xi_p)}{f(\xi_p)}-\frac{1}{2}f(\xi_p)^{-1}o(n^{-1}\cdot\log n)+f^{-1}(\xi_p)o((nh)^{-1}\log^{3/2}(n))=\frac{p-\hat F_{n,h}(\xi_p)}{f(\xi_p)}+o((nh)^{-1}\log^{3/2}(n))=\frac{p-\hat F_{n,h}(\xi_p)}{f(\xi_p)}+o(n^{-3/5})\text{ a.s.}.$$

参考文献:

[1] Duffie D, Pan J. An overview of value at risk[J]. Journal of Derivatives, 1997, 4(3): 7-49.

[2] Jorion P. Value at risk[M]. 2nd Edition. New York: McGraw-Hill, 2001.

[3] Chen S X, Tang C Y. Nonparametric inference of value at risk for dependent financial returns[J]. J Financial Econometrics, 2005, 3(2): 227-255.

[4] Yoshihara K. The bahadur representation of sample quantiles for sequences of strongly mixing random variables[J]. Statistics and Probability Letters, 1995, 24(4): 299-304.

[5] 杨善朝.混合序列矩不等式和非参数估计[J].数学学报, 1997, 40(2): 271-279.

[6] Fazekas I, Klesov O. A general approach to the strong law of large numbers[J]. Theo Probab Appl, 2001, 45(3): 436-449.

[7] Bosq D. Nonparametric statistics for stochastic Processes[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.

[8] 林正炎.概率极限理论基础[M].北京:高等教育出版社, 1999.

(责任编辑:尹 闯)