DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.02.030
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(2): 135~ 137

基于信息熵的模糊多属性决策方法

Fuzzy Multi-Attribute Decision Making Method Based on Information Entropy

曾三云[1],龙　君[2]
ZENG San-yun[1], LONG Jun[2]

(1.吉首大学数学与计算机科学学院,湖南吉首　416000; 2.吉首大学民族预科教育学院,湖南吉首　416000)
(1. College of Mathematics and Computer Science, Jishou University, Jishou, Hunan, 416000, China; 2. College of Preparatory Education for Minority Nationalities, Jishou University, Jishou, Hunan, 416000, China)

摘要: 针对属性值为梯形模糊数的模糊多属性决策问题,给出一种基于信息熵的模糊多属性决策方法,并用实例进行检验.该方法利用信息熵求出各属性权重,利用简单加权法来计算方案的模糊效用值,根据梯形模糊数的期望值排序方法对方案进行排序和择优.用该方法选出的方案有效、可行而且计算简单,为解决模糊多属性决策问题提供了新途径.

关键词: 模糊多属性决策　信息熵　梯形模糊数　期望值
中图法分类号: O221.1; C934　　文献标识码: A　　文章编号: 1005-9164(2008)02-0135-03

Abstract A fuzzy multi-Attribute decision making method based on information entropy is presented to deal with the fuzzy multi-attribute decision making problem, in which the attribute values are trapezoid fuzzy numbers and a numerical example is used to illustrate the proposed method. The attribute weights are determined by using information entropy. On the basis of additive weighting, the fuzzy utility values of alternatives are obtained. Alternatives are ranked by using the expected value method of ranking trapezoid fuzzy numbers. The alternative obtained by this method is effective, feasible and easy to calculate. The method provides a new approach for solving the fuzzy multi-attribute decision making problem.

Key words fuzzy multi-attribute decision making, information entropy, trapezoid fuzzy number, expected value

模糊多属性决策是在模糊环境下,对具有多个属性的多个方案进行评价及择优[1],由方案集、属性集、模糊决策矩阵3个要素构成,其决策程序通常分为两段[2,3]: 第一段旨在确定属性的权重,并选择适当的模糊算子将模糊属性和属性权重合成为代表方案价值的模糊效用值;第二段是运用模糊数排序方法对方案的模糊效用值进行排序,以确定最优方案.熵是信息论中最重要的基本概念,用来表示事物出现的不确定性.文献[4]研究基于信息熵属性值为清晰数的多属性决策方法.本文将该方法拓展到模糊环境中,针对属性值为梯形模糊数的模糊多属性决策问题,给出一种基于信息熵的模糊多属性决策方法.该方法利用信息熵求出各属性权重,进而基于简单加权法则及期望值算子[5]获得方案的排序.

1　决策原理

对于属性值为梯形模糊数的多属性决策问题,设 $x = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$为待选方案集,$u = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$为属性集.$\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{m\times n}$为模糊决策矩阵,其中$\tilde{a} = (a_{ij1}, a_{ij2}, a_{ij3}, a_{ij4})$为非负梯形模糊数,表示方案 x_i 关于属性 u_j 下的属性值.属性权重向量 $k = (k_1, k_2, \cdots,$

收稿日期: 2007-07-05
作者简介: 曾三云(1980-),女,硕士研究生,主要从事模糊决策及不确定理论研究工作。

k_n) 未知, $k_j > 0$, $\sum_{j=1}^{n} k_j = 1$. 决策的目的是从 x 中找出 $k(< m)$ 个满意方案或 1个最优方案.

最常见的属性类型有效益型和成本型. 设 $I_i(i = 1, 2)$ 分别表示效益型和成本型属性的下标集, 并记 $M = \{1, 2, \cdots, m\}$, $N = \{1, 2, \cdots, n\}$. 为了消除不同物理量纲对决策结果的影响, 采用下列计算公式将模糊决策矩阵 $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{m\times n}$ 转化为规范化矩阵 $\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]_{m\times n}$:

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_{ij1}}{p_j}, \frac{a_{ij2}}{p_j}, \frac{a_{ij3}}{p_j}, \frac{a_{ij4}}{p_j}\right), i \in M, j \in I_1 \qquad (1)$$

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{p_j - a_{ij4}}{p_j}, \frac{p_j - a_{ij3}}{p_j}, \frac{p_j - a_{ij2}}{p_j}, \frac{p_j - a_{ij1}}{p_j}\right), i \in M, j \in I_2, \qquad (2)$$

其中 $p_j = \max\{a_{ij4}, i \in M\}$, $p_j' = \max\{p_j - a_{ij1}, i \in M\}$.

一般地, 某个属性的属性值变异程度越大, 信息熵越小, 该属性提供的信息量越大, 即该属性在方案排序中所起的作用越大, 从而该属性的权重也应该越大; 反之, 某个属性的属性值变异程度越小, 信息熵越大, 该属性提供的信息量越小, 即该属性在方案排序中所起的作用越小, 从而该属性的权重也应该越小.

2 决策方法

根据文献 [4, 6], 给出一种基于信息熵的模糊多属性决策方法, 具体步骤如下:

步骤 1: 根据 (1) 式和 (2) 式将模糊决策矩阵 $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{m\times n}$ 转化为规范化矩阵 $\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]_{m\times n}$;

步骤 2 根据规范化矩阵 $\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]_{m\times n}$, 计算列归一化矩阵 $\bar{R} = [\bar{r}_{ij}]_{m\times n}$, 其中

$$\bar{r}_{ij} = \frac{E[\tilde{r}_{ij}]}{\sum_{i=1}^{m} E[\tilde{r}_{ij}]}, i \in M, j \in N, \qquad (3)$$

这里, E 为期望值算子. 利用文献 [5] 中期望值的定义, 对梯形模糊数 $\tilde{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$, 有 $\tilde{r}$ 的期望值

$$E[\tilde{r}] = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{4}; \qquad (4)$$

步骤 3 计算属性 u_j 输出的信息熵

$$E_j = -\frac{1}{\ln m}\sum_{i=1}^{m} \bar{r}_{ij} \ln \bar{r}_{ij}, j \in N. \qquad (5)$$

当 $\bar{r}_{ij} = 0$ 时, 规定 $\bar{r}_{ij} \ln \bar{r}_{ij} = 0$;

步骤 4 计算属性权重向量 $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$, 其中

$$k_j = \frac{1 - E_j}{\sum_{k=1}^{n} (1 - E_k)}, j \in N; \qquad (6)$$

步骤 5 利用 $\tilde{z}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{r}_{ij} k_j$ 计算方案 x_i 的模糊效用值 $\tilde{z}_i$, 并由 (4) 式计算 $E[\tilde{z}_i](i \in M)$;

步骤 6 利用 $E[\tilde{z}_i](i \in M)$ 对方案进行排序和择优.

3 实例分析

某公司计划进行证券投资, 首先制定 4项考察指标 (属性): 收益率 (u_1), 损失率 (u_2), 证券价格 (u_3), 行业景气度 (u_4), 然后通过对上年统计资料进行分析, 初步确定了 5种证券 $x_i(i = 1, 2, \cdots, 5)$. 由于各种因素对证券市场的影响, 各种属性下的属性值是以梯形模糊数形式给出的 (见表 1), 试对这 5种证券进行排序和择优.

表 1 5种证券的 4项指标属性值.

Table 1 Four attribute values of five securities

x_i	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	(11, 12, 12, 13)	(4, 5, 6, 7)	(15, 20, 20, 23)	(0.4, 0.5, 0.6, 0.7)
x_2	(10, 11, 12, 13)	(5, 6, 7, 8)	(14, 16, 18, 20)	(0.3, 0.5, 0.5, 0.7)
x_3	(9, 9, 12, 12)	(1.5, 1.5, 3, 3)	(7, 9, 11, 13)	(0.5, 0.6, 0.7, 0.8)
x_4	(6, 7, 9, 11)	(1.5, 2, 3, 3.5)	(10, 11, 13, 14)	(0.2, 0.4, 0.4, 0.6)
x_5	(7, 8, 9, 10)	(2, 2.5, 3, 3.5)	(2, 3, 3, 4)	(0.3, 0.4, 0.5, 0.6)

采用本文方法对这 5种证券进行排序和择优.

1) 在各属性中, u_1、u_4 为效益型属性, u_2、u_3 为成本型属性, 由 (1) 式和 (2) 式将模糊决策矩阵 $\tilde{A}$ 转化成规范矩阵 $\tilde{R}_1$.

2) 根据 (4) 式确定 $\tilde{R}_1$ 的期望值矩阵 $Q = [E[\tilde{r}_{ij}]]_{m\times n}$:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.9225 & 0.385 & 0.165 & 0.69 \\ 0.885 & 0.23 & 0.285 & 0.63 \\ 0.805 & 0.885 & 0.62 & 0.815 \\ 0.635 & 0.845 & 0.525 & 0.5 \\ 0.655 & 0.808 & 0.95 & 0.565 \end{bmatrix}.$$

3) 根据 (3) 式计算列归一化矩阵 $\bar{R} = [\bar{r}_{ij}]_{m\times n}$:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0.2364 & 0.1221 & 0.0648 & 0.2156 \\ 0.2268 & 0.0730 & 0.1120 & 0.1969 \\ 0.2063 & 0.2807 & 0.2436 & 0.2547 \\ 031627 & 0.2681 & 0.2063 & 0.1563 \\ 0.1678 & 0.2561 & 0.3733 & 0.1765 \end{bmatrix}.$$

4) 根据 (5) 式计算属性 u_j 输出的信息熵 E_j:

$E_1 = 0.9929$, $E_2 = 0.9358$, $E_3 = 0.9071$, $E_4 = 0.9912$.

$\tilde{R}_1 =$

$$\begin{bmatrix} (0.85,0.92,0.92,1.0) & (0.15,0.31,0.46,0.62) & (0.0,0.14,0.14,0.38) & (0.5,0.63,0.75,0.88) \\ (0.77,0.85,0.92,1.0) & (0.0,0.15,0.31,0.46) & (0.14,0.24,0.33,0.43) & (0.38,0.63,0.63,0.88) \\ (0.69,0.69,0.92,0.92) & (0.77,0.77,1.0,1.0) & (0.48,0.57,0.67,0.76) & (0.63,0.75,0.88,1.0) \\ (0.46,0.54,0.69,0.85) & (0.69,0.77,0.92,1.0) & (0.43,0.48,0.57,0.62) & (0.25,0.5,0.5,0.75) \\ (0.54,0.62,0.69,0.77) & (0.69,0.77,0.85,0.92) & (0.90,0.95,0.95,1.0) & (0.38,0.5,0.63,0.75) \end{bmatrix}$$

5) 根据(6)式计算属性权重向量 k_j.

$k_1 = 0.0410, k_2 = 0.3711, k_3 = 0.5370, k_4 = 0.0509$.

6) 利用 $\tilde{z}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{r}_{ij} k_j$ 计算方案 x_i 的模糊效用值 $\tilde{z}_i$,并由(4)式计算 $E[\tilde{z}_i](i = 1,2,3,4,5)$.

$E[\tilde{z}_1] = 0.3044, E[\tilde{z}_2] = 0.3068, E[\tilde{z}_3] = 0.7359, E[\tilde{z}_4] = 0.6470, E[\tilde{z}_5] = 0.8654$.

7) 根据 $E[\tilde{z}_i](i = 1,2,3,4,5)$ 的大小得到方案的优劣排序为:

$x_5 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2 \succ x_1$,

故最优方案为 x_5.

此方案经实践证明有效、可行而且计算简单.

4 结束语

模糊多属性决策是一个大有前途的研究方向,它在决策科学中的研究相当活跃.本文针对属性值为梯形模糊数的模糊多属性决策问题,给出了一种基于信息熵的决策方法.该方法中的属性权重是通过对调查的数据利用信息熵而计算出来的,比专家主观给出的属性权重更客观,更可靠.因此,本文得到的方案排序更合理.实例表明该决策方法有效、可行而且计算简单,易于实现.该方法为解决模糊多属性决策问题提供了新途径.

参考文献:

[1] 曾玲.具有属性优先序信息的模糊多属性决策方法[C].中国运筹学会第八届学术交流会论文集,2006(6): 706-710.

[2] Chen S J, Hwang C L. Fuzzy multiple attribute decision making: methods and application [M]. New York: Springer, 1992.

[3] 李荣钧.模糊多准则决策理论与应用[M].北京:科学出版社,2002.

[4] Hwang C L, Yoon K S. Multiple attribute decision making and application [M]. New York: Springer-Verlag, 1981.

[5] Liu B. Theory and practice of uncertain programming [M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 2002.

[6] 徐泽水.不确定多属性决策方法及应用[M].北京:清华大学出版社,2004.

(责任编辑:尹 闯)

(上接第 130页 Continue from page 130)

$\sum_{n=1}^{\infty} \log^p n E|a_n(X_n^{c_n} - EX_n^{c_n})|^p / b_n^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-p} \cdot E|X_n|^p I(|X| \leqslant c_n) \leqslant c\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-p}(c_n^p P(|X| > c_n) + E|X|^p I(|X| \leqslant c_n)) \leqslant EN(|X|) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-p} E|X|^p I(|X| \leqslant c_n)$,

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-p} E|X|^p I(|X| \leqslant c_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-p} \cdot E|X|^p I(|X| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} c_j) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} EX^p c_n^{-p} \cdot I(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} c_{j-1} \leqslant |X| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} c_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} P(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} c_{j-1} \leqslant |X| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} c_j) \max_{1 \leqslant j \leqslant n} c_j^p \sum_{n=j}^{\infty} c_n^{-p} \leqslant c\sum_{j=1}^{\infty} j \cdot P(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} c_{j-1} \leqslant |X| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} c_j) \leqslant c\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{j} P(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} c_{j-1} \leqslant |X| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} c_j) = c\sum_{j=1}^{\infty} P(|X| > \max_{1 \leqslant j \leqslant n} c_{j-1}) \leqslant c(1 + \sum_{j=1}^{\infty} P(|X| > c_n)) \leqslant c(1 + EN(|X|)) < \infty$.

由推论 2.1可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(X_n^{c_n} - EX_n^{c_n})/b_n$ 几乎处处收敛.所以,再由 Kronecker引理[5],得

$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{\infty} a_i(X_i^{c_i} - EX_i^{c_i}) \to 0, n \to \infty$, a.s..

由推论 2.4的证明可知 $b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i EX_i I(|X_i| \leqslant c_i) \to 0, n \to \infty$.则结论成立.

参考文献:

[1] 吴群英,林亮. φ混合序列的完全收敛性和强收敛性[J].工程数学学报,2004,21(1): 75-80.

[2] 吴群英. $\tilde{\rho}$混合序列的若干极限性质[J].工程数学学报,2004,21(1): 58-64.

[3] Bradley R C. Eqnivalent mixing conditions for random fields[J]. Institute of Mathematical Statistics, 1993,21(4): 1921-1926.

[4] 吴群英.混合序列的概率极限理论[M].北京:科学出版社,2006: 210-211.

[5] 林正炎,陆传荣,苏中根.概率极限理论基础[M].北京:高等教育出版社,1999.

(责任编辑:尹 闯)