DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.02.012
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(2): 138~141

中心对称线性互补问题的一类迭代算法*

The Iterative Methods for the Centrosymmetric Linear Complementarity Problem

段班祥[1],李郴良[2],朱小平[1],范路桥[1]
DUAN Ban-xiang[1], LI Chen-liang[2], ZHU Xiao-ping[1], FAN Lu-qiao[1]

(1.广东科学技术职业学院计算机工程技术学院,广东珠海 519090; 2.桂林电子科技大学计算科学与数学系,广西桂林 541004)
(1. Computer Engineering Technical College, GuangDong Provincial Institute for Technical Personnel, Zhuhai, Guangdong, 519090, China; 2. Department of Computing Science and Mathematics, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 在考虑中心对称矩阵可约性的基础上,运用矩阵分裂理论,分别提出求解中心对称线性互补问题的对三角分裂松驰迭代算法I 和对三角分裂松驰迭代算法II,并对 2种算法进行收敛分析和数值实验.结果表明,当线性互补问题的系数矩阵对角元为正的 H-矩阵时,2种算法都全局收敛,所得迭代阵的谱半径都为 0.5,比传统的 Jacobi分裂迭代算法和 Gauss-seidel迭代算法的收敛速度都好.新算法节约了计算量与计算机的存贮空间,较大地提高了计算效率.
关键词: 线性互补 中心对称矩阵 对三角分裂 松弛迭代 收敛性
中图法分类号: O241.6 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)02-0138-04

Abstract A relaxed opposite triangular splitting iterative algorithm Ⅰ and a relaxed opposite triangular splitting iterative algorithm Ⅱ for solving centrosymmetric linear complementarity problem are given. In particular, we establish the global convergence theory of the algorithms when the system matrix of the centrosymmetric linear complementarity problem is an H-matrix. These algorithms, originated mainly from the reducibility of the centrosymmetric matrices, are aimed at reduction of the computation. The simulation examples show that these algorithms are efficient.
Key words linear complementarity, centrosymmetric matrix, opposte triangular splitting, relaxed iterative, convergence

互补问题是一类重要的优化问题,在线性规划、凸二次规划、双矩阵对策及经济与交通平衡等方面有着广泛的应用.探讨互补问题的高效数值算法很有必要.本文考虑中心对称线性互补问题: 求向量 $z\in R^n$,使得

$$z\geqslant 0, q+Az\geqslant 0, z^{\mathrm{T}}(q+Az)=0, \quad (1)$$

其中 $A\in R^{n\times n}$为给定的中心对称矩阵,$q\in R^n$为已知向量.

在 Jacobi迭代法, Gauss-Seidel迭代法, PSOR迭代法以及这些方法的改进和加速形式的基础上,同时充分考虑中心对称矩阵的可约性,提出一类求解中心对称线性互补问题的松弛型迭代算法.该算法把互补问题的系数矩阵进行不同的分裂,其优点在于凭借适当的分裂方式使得计算中相应的某些分量不必计算,节约了计算量与计算机的存贮空间,较大地提高了计算效率.

收稿日期: 2007-05-14
作者简介: 段班祥(1971-),男,讲师,主要从事数值计算、应用软件开发研究工作。
* 广东省自然科学基金项目(05006349)资助。

1 定义和引理

设 $C=(c_{ij})\in R^{n\times n}$为 $n\times n$阶实矩阵,用 diag(C)表示 C的对角阵,对于 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in R^{n\times n}$,如果 $a_{ij}\leqslant b_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 $A\leqslant B$.以下记 $|A|=(|a_{ij}|)\in R^{n\times n}$表示 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$的绝对值矩阵,显然 $|AB|\leqslant|A||B|$.

定义 1.1 若矩阵 $A\in R^{n\times m}$的元素满足关系式 $a_{i,j}=a_{n-i+1,m-j+1}$,则称 A为中心对称矩阵.

利用矩阵的有关性质,一个 $n\times n$阶中心对称方

阵 A 可以表示为:

(1) 当 $n=2m$ 时,

$$A=\begin{pmatrix} B & J_mCJ_m \\ C & J_mBJ_m \end{pmatrix}$$,其中 B,C 为 $m\times m$ 阶方阵.

(2) 当 $n=2m+1$ 时,

$$A=\begin{pmatrix} B & J_mb & J_mCJ_m \\ a^{\mathrm{T}} & \tau & a^{\mathrm{T}}J_m \\ C & b & J_mBJ_m \end{pmatrix},$$

其中 $B,C\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $a,b\in\mathbb{R}^{m}$, $\tau\in\mathbb{R}$, $J_m=(e_m,e_{m-1},\cdots,e_1)$ (e_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 为单位向量).

定义 1.2[1] 如果任意给定 $i\neq j$,有 $a_{ij}\leqslant 0$,称矩阵 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为 Z-矩阵;如果 A 是非奇异的 Z-矩阵,且 $A^{-1}\geqslant 0$,称 A 为非奇异 M-矩阵,简称为 M-矩阵. 设 $\langle A\rangle=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$,其中 $b_{ij}=\begin{cases}|a_{ij}|, i=j,\\ -|a_{ij}|, i\neq j,\end{cases}$ $i,j=1,2,\cdots,n$,称 $\langle A\rangle$ 为 A 的比较矩阵;如果 A 的比较矩阵 $\langle A\rangle$ 是非奇异的 M-矩阵,则称 A 为非奇异的 H-矩阵,简称为 H-矩阵.

定义 1.3 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为中心对称矩阵,如果 (1) $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是非奇异的且 M,N 为中心对称矩阵,称 $A=M-N$ 为矩阵 A 的中心对称分裂; (2) 如果 $A=M-N$ 为矩阵 A 的中心对称分裂且 $M^{-1}\geqslant 0$, $N\geqslant 0$,称 $A=M-N$ 为矩阵 A 的中心对称正则分裂; (3) 如果 $A=M-N$ 为矩阵 A 的中心对称分裂且 $M^{-1}\geqslant 0$, $M^{-1}N\geqslant 0$,则称 $A=M-N$ 为矩阵 A 的中心对称弱正则分裂.

定义 1.4 若矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的元素满足 $a_{i,j}=0$ $(j>n-i+1)$,则称 A 为左上三角矩阵,若 $a_{i,j}=0$ $(j\geqslant n-i+1)$,则称 A 为严格左上三角矩阵,对于(严格)右下三角矩阵也可以类似定义.

引理 1.1[2] (1) 设矩阵 C 为中心对称矩阵,则 C 的比较矩阵 $\langle C\rangle$ 及转置矩阵 C^{T} 为中心对称矩阵;如果 C 非奇异,则 C^{-1} 为中心对称矩阵; (2) 设 $E,F\in\mathbb{R}^{k\times l}$ 为中心对称矩阵,则 $E\pm F$ 为中心对称矩阵; (3) 设矩阵 $A\in\mathbb{R}^{k\times k}$, $B\in\mathbb{R}^{k\times l}$,则 $AB\in\mathbb{R}^{k\times l}$ 也为中心对称矩阵.

引理 1.2[3] 如果 A 为对角元为正的 H-矩阵,则对任意给定的 $q\in\mathbb{R}^{n}$,线性互补问题 (1) 有唯一解.

引理 1.3[4] 设 A 是 H-矩阵, $D=\mathrm{diag}(A)$, $A=D-B$,那么 (1) A 非奇异; (2) $|A^{-1}|\leqslant\langle A\rangle^{-1}$; (3) D 是非奇异的且 $\rho(|D|^{-1}|B|)<1$.

引理 1.4 设 A 为中心对称矩阵,则 A 正交相似于块对角矩阵,当

(i) $n=2m$ 时,设 $P=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} I_m & I_m \\ -J_m & J_m \end{pmatrix}$,则

$$P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix} B-J_mC & \\ & B+J_mC \end{pmatrix};$$

(ii) $n=2m+1$ 时,设 $P=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} I_m & & I_m \\ & \sqrt{2} & \\ -J_m & & J_m \end{pmatrix}$,则

$$P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix} B-J_mC & & \\ & \tau & \sqrt{2}\tau^{\mathrm{T}} \\ & \sqrt{2}J_mb & B+J_mC \end{pmatrix}.$$

引理 1.5[2] 设 $A^{-1}\geqslant 0$ 且 $A=M_1-N_1=M_2-N_2$ 为矩阵 A 的两个弱正则分裂,如果条件: (1) $N_1\leqslant N_2$; (2) $M_1^{-1}\geqslant M_2^{-1}$, $N_1\geqslant 0$; (3) $M_1^{-1}\geqslant M_2^{-1}$, $N_2\geqslant 0$ 之一成立,则 $\rho(M_1^{-1}N_1)\leqslant\rho(M_2^{-1}N_2)$.

2 中心对称分裂与算法

2.1 中心对称分裂

给出中心对称矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的两种特殊分裂.

(i) 对三角分裂 Ⅰ: ① 当 $n=2m$ 时,令 $A=M_1-N_1$,其中

$$M_1=\begin{pmatrix} B_1 & J_mC_1J_m \\ C_1 & J_mB_1J_m \end{pmatrix},\ N_1=\begin{pmatrix} B_1^* & J_mC_1^*J_m \\ C_1^* & J_mB_1^*J_m \end{pmatrix},$$

这里, B_1 为 B 的下三角矩阵, C_1 为 C 的左上三角矩阵; B_1^* 为 $-B$ 的严格上三角矩阵, C_1^* 为 $-C$ 的严格右下三角矩阵.

② 当 $n=2m+1$ 时,令 $A=M_2-N_2$,其中

$$M_2=\begin{pmatrix} B_2 & J_mb & J_mC_2J_m \\ 0 & \tau & 0 \\ C_2 & b & J_mB_2J_m \end{pmatrix},\ N_2=\begin{pmatrix} B_2^* & 0 & J_mC_2^*J_m \\ -a^{\mathrm{T}} & 0 & -a^{\mathrm{T}}J_m \\ C_2^* & 0 & J_mB_2^*J_m \end{pmatrix},$$

这里, B_2 为 B 的下三角矩阵, C_2 为 C 的左上三角矩阵; B_2^* 为 $-B$ 的严格上三角矩阵, C_2^* 为 $-C$ 的严格右下三角矩阵.

由于 M_1,N_1,M_2,N_2 均为中心对称矩阵,由定义 1.3 可知对三角分裂 Ⅰ 为中心对称分裂.

(ii) 对三角分裂 Ⅱ: ① 当 $n=2m$ 时,令 $A=R_1-V_1$,其中

$$R_1=\begin{pmatrix} E_1 & J_mH_1J_m \\ H_1 & J_mE_1J_m \end{pmatrix},\ V_1=\begin{pmatrix} E_1^* & J_mH_1^*J_m \\ H_1^* & J_mE_1^*J_m \end{pmatrix}$$

这里, E_1 为 B 的上三角矩阵, H_1 为 C 的右下三角矩阵; E_1^* 为 $-B$ 的严格下三角矩阵, H_1^* 为 $-C$ 的严格左上三角矩阵.

② 当 $n=2m+1$ 时,令 $A=R_2-V_2$,其中

$$R_2=\begin{pmatrix} E_2 & 0 & J_m H_2 J_m \\ a^{\mathrm{T}} & \mathrm{T} & a^{\mathrm{T}} J_m \\ H_2 & 0 & J_m E_2 J_m \end{pmatrix},$$

$$V_2=\begin{pmatrix} E_2^* & J_m b & J_m H_2^* J_m \\ 0 & 0 & 0 \\ H_2^* & b & J_m E_2^* J_m \end{pmatrix},$$

这里, E_2 为 B 的上三角矩阵, H_2 为 C 的右下三角矩阵; E_2^* 为 $-B$ 的严格下三角矩阵, H_2^* 为 $-C$ 的严格左上三角矩阵.

由于 R_1, V_1, R_2, V_2 均为中心对称矩阵,由定义 1.3可知对三角分裂II 为中心对称分裂.

2.2 迭代算法

算法 **1**(对三角分裂松弛迭代算法I)

步骤 1 任意给定初始值 $z^0\in R^n$,置 $k=0$;

步骤 2 对 A 的对三角分裂I:当 $n=2m$ 时, $A=M_1-N_1$,求解互补子问题:

$$\begin{cases} z^{k,1}\geqslant 0, \\ q-N_1z^k+M_1z^{k,1}\geqslant 0, \\ (z^{k,1})^{\mathrm{T}}(q-N_1z^k+M_1z^{k,1})=0; \end{cases} \qquad (2)$$

当 $n=2m+1$ 时, $A=M_2-N_2$,求解互补子问题:

$$\begin{cases} z^{k,1}\geqslant 0, \\ q-N_2z^k+M_2z^{k,1}\geqslant 0, \\ (z^{k,1})^{\mathrm{T}}(q-N_2z^k+M_2z^{k,1})=0; \end{cases} \qquad (3)$$

步骤 3 $z^{k+1}=kz^{k,1}+(1-k)z^k$ (k 为松弛因子);

步骤 4 $k:=k+1$,转步骤 2,直至收敛.

注 当 $n=2m$ 时,根据引理 1.4可知,求表达式 $q-N_1z^k+M_1z^{k+1}$ 等价于求表达式 $P^{\mathrm{T}}q-P^{\mathrm{T}}N_1PP^{\mathrm{T}}z^k+P^{\mathrm{T}}M_1PP^{\mathrm{T}}z^{k+1}$,而

$$P^{\mathrm{T}}M_1P=\begin{pmatrix} B_1-J_mC_1 & \\ & B_1+J_mC_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{T}_1 & \\ & \mathrm{T}_2 \end{pmatrix}=\overline{M}.$$

$$P^{\mathrm{T}}N_1P=\begin{pmatrix} B_1^*-J_mC_1^* & \\ & B_1^*+J_mC_1^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} H_1 & \\ & H_2 \end{pmatrix}=\overline{N},$$

这里, $\mathrm{T}_1=B_1-J_mC_1$, $\mathrm{T}_2=B_1+J_mC_1$ 均为 $m\times m$ 下三角矩阵, $H_1=B_1^*-J_mC_1^*$, $H_2=B_1^*+J_mC_1^*$ 均为 $m\times m$ 严格上三角矩阵.设 $P^{\mathrm{T}}z^{k+1}=y^{k+1}$, $P^{\mathrm{T}}z^k=y^k$, $p^{\mathrm{T}}q=\bar{q}$, 则表达式 $P^{\mathrm{T}}q-P^{\mathrm{T}}N_1PP^{\mathrm{T}}z^k+P^{\mathrm{T}}M_1PP^{\mathrm{T}}z^{k+1}$ 变为表达式

$$\begin{pmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} H_1 & \\ & H_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^k \\ y_2^k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \mathrm{T}_1 & \\ & \mathrm{T}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^{k+1} \\ y_2^{k+1} \end{pmatrix},$$

所以,表达式 $P^{\mathrm{T}}q-P^{\mathrm{T}}N_1PP^{\mathrm{T}}z^k+P^{\mathrm{T}}M_1PP^{\mathrm{T}}z^{k+1}$ 就简化为两个表达式: $\bar{q}_1-H_1y_1^k+\mathrm{T}_1y_1^{k+1}$ 和 $\bar{q}_2-H_2y_2^k+\mathrm{T}_2y_2^{k+1}$.

同理,当 $n=2m+1$ 时,也有相似的结论.

算法 **2**(对三角分裂松弛迭代算法II)

步骤 1 任意给定初始值 $z^0\in R^n$,置 $k=0$;

步骤 2 对 A 的对三角分裂II:当 $n=2m$ 时, $A=R_1-V_1$,求解互补子问题:

$$\begin{cases} z^{k,2}\geqslant 0, \\ q-R_1z^k+V_1z^{k,2}\geqslant 0, \\ (z^{k,2})^{\mathrm{T}}(q-V_1z^k+R_1z^{k,2})=0; \end{cases} \qquad (4)$$

当 $n=2m+1$ 时, $A=R_2-V_2$,求解互补子问题:

$$\begin{cases} z^{k,2}\geqslant 0, \\ q-V_2z^k+R_2z^{k,2}\geqslant 0, \\ (z^{k,2})^{\mathrm{T}}(q-V_2z^k+R_2z^{k,2})=0; \end{cases} \qquad (5)$$

步骤 3 $z^{k+1}=kz^{k,2}+(1-k)z^k$ (k 为松弛因子);

步骤 4 $k:=k+1$,转步骤 2,直至收敛.

3 算法分析

3.1 收敛性分析

引理 3.1 设 $A=M_i-N_i$(当 $n=2m$ 时 $i=1$,当 $n=2m+1$ 时 $i=2$)为 A 的对三角分裂I, A, M_i 分别为对角元为正的 H-矩阵, z^* 为问题(1)的唯一解,则对任意的向量 $q\in R^n$ 及任意的初始向量 $z^0\in R^n$, $z^0\geqslant 0$,由算法 1产生的序列 $\{z^{k,1}\}$ 及 $\{z^k\}$ 满足

$$\langle M_i\rangle|z^{k,1}-z^*|\leqslant|N_i||z^k-z^*|. \qquad (6)$$

证明 由于 M_i 为对角元为正的 H-矩阵,由引理 1.2知子问题(2)或(3)有唯一解,即 $z^{k,1}$ 是唯一定义的.逐个分量地来证明不等式(6).

对任意的 j,假设 $|z^{k,1}-z^*|_j=(z^{k,1}-z^*)_j$,如果 $z_j^{k,1}=0$,则由于(6)式左边向量的第 j 个分量非正而右边向量的分量始终为非负,则(6)式显然成立.

再假设 $z_j^{k,1}>0$,则由算法 1可得 $(q-N_iz^k+M_iz^{k,1})_j=0$.另一方面有 $(q-N_iz^*+M_iz^*)_j\geqslant 0$.相减可得 $(M_i(z^{k,1}-z^*))_j\leqslant(N_i(z^k-z^*))_j$.从而 $(\langle M_i\rangle|z^{k,1}-z^*|)_j\leqslant(|N_i||z^k-z^*|)_j$.(因为 M_i 的对角元为正, $|z^{k,1}-z^*|_j=(z^{k,1}-z^*)_j$).

类似可证,当 $|z^{k,1}-z^*|_j=(z^*-z^{k,1})_j$ 时,(6)式也成立.

设 $A\in R^{n\times n}$, $D=\mathrm{diag}(A)$, $A=D-B$,若 $|D|$ 非奇异,则令 $J=|D|^{-1}|B|$.为方便起见,令 $d=d(J)$,若 A 为 H-矩阵,则由引理 1.3可知 $d<1$.

定理 3.1 设 $A=M_i-N_i$(当 $n=2m$ 时 $i=1$,当 $n=2m+1$ 时 $i=2$)为 A 的对三角分裂I, A, M_i

分别为对角元为正的 H-矩阵, 且 $<A> = <M_i> - |N_i|$, 则对任意的初始值 $z^0 \in R^n$, 当 $k \in (0, \frac{2}{1+d})$ 时, 由算法 1产生的序列 $\{z^k\}$ 收敛于中心对称线性互补问题 (1) 的唯一解 z^*.

证明 因为 A 为对角元为正的 H-矩阵, 所以问题 (1) 有唯一解 z^*. 根据算法 1可知 $z^{k+1} = k z^{k,1} + (1-k)z^k$, 所以

$$z^{k+1} - z^* = k z^{k,1} + (1-k)z^* - z^* = k(z^{k,1} - z^*) + (1-k)(z^k - z^*).$$

又由引理 3.1可知

$$|z^{k,1} - z^*| \leqslant <M_i>^{-1}|N_i||z^k - z^*|.$$

所以

$$|z^{k+1} - z^*| \leqslant k<M_i>^{-1}|N_i||z^k - z^*| + (1-k)|z^k - z^*| = [k<M_i>^{-1}|N_i| + (1-k)I]|z^k - z^*|.$$

设 $H = k<M_i>^{-1}|N_i| + (1-k)I$, 下证 $d(H) < 1$. 由于 $d(H) \leqslant d(|H|)$, 只要证 $d(|H|) < 1$. 而 $|N_i| = <M_i> - <A>$, 于是有

$$|H| \leqslant |k<M_i>^{-1}|N_i|| + |1-k|I \leqslant k<M_i>^{-1}|N_i| + |1-k|I = k<M_i>^{-1}(<M_i> - <A>) + |1-k|I = (k + |1-k|)I - k<M_i>^{-1}|D|(I-J) \leqslant (k + |1-k|)I - k<M_i>^{-1}|D|(I-J_X),$$

这里 $J_X = J + Xee^T$, X 为任意小的正数, $e = (1,1,\cdots,1)^T \in R^n$, 由于 J 为非负矩阵, 于是对任意小的正数 X, $J_X = J + Xee^T$ 为不可约的正矩阵, 根据 Perron-Frobenius定理可知, 存在向量 $x_X > 0$, 使得 $J_X x_X = d_X x_X$. 又因为 $k \in (0, \frac{2}{1+d})$, 从而 $|1-k| + kd < 1$, 由谱半径的连续性可得: 对任意小的正数 X, 有 $|1-k| + kd_X < 1$. 因此

$$|H|x_X \leqslant (k + |1-k|)x_X - k<M_i>^{-1}|D|(I-J_X)x_X = (k + |1-k|)x_X - k(1-d_X)<M_i>^{-1}|D|x_X \leqslant (k + |1-k|)x_X - k(1-d_X)|D|^{-1}|D|x_X = [k + |1-k| - k(1-d_X)]x_X = (|1-k| + kd_X)x_X < x_X,$$

其中第二个不等式用到 $|D|^{-1} \leqslant <M_i>^{-1}$. 因此 $\frac{(|H|x_X)_j}{(x_X)_j} < 1, j = 1,2,\cdots,n$. 因此由文献 [5]中的定理 4.1可得 $d(|H|) < 1$. 证毕.

定理 3.2 设 $A = M_i - N_i$ (当 $n = 2m$ 时 $i = 1$, 当 $n = 2m+1$ 时 $i = 2$) 为 A 的对三角分裂 II, A, $M_i (i = 1,2)$ 分别为对角元为正的 H-矩阵, 且 $<A> = <M_i> - |N_i|$, 则对任意的初始值 $z^0 \in R^n$, 当 $k \in (0, \frac{2}{1+d})$ 时, 由算法 2产生的序列 $\{z^k\}$ 收敛于中心对称线性互补问题 (1) 的唯一解 z^*.

证明过程同理定理 3.1.

3.2 收敛速度分析

定理 3.3 设 A 为中心对称 H-矩阵, $A = D - (L+U)$ 为 A 的 Jacobi分裂, $A = M - N$ 为 A 的对三角分裂 I, 则有 $d(M-N) \leqslant d(D^{-1}(L+U))$.

证明 因为 A 为中心对称 H-矩阵, 所以 $A^{-1} \geqslant 0$. 由于 $A = M - N$ 为 A 的对三角分裂 I, 所以 $A = M - N$ 为 A 的正则分裂, 又由于 $0 \leqslant N \leqslant (L+U)$, 由引理 1.5可得 $d(M-N) \leqslant d(D^{-1}(L+U))$.

定理 3.4 设 A 为中心对称 H-矩阵, $A = D - (L+U)$ 为 A 的 Jacobi分裂, $A = R - V$ 为 A 的对三角分裂 II, 则有 $d(R-V) \leqslant d(D^{-1}(L+U))$.

定理 3.3和定理 3.4说明对三角分裂 I 与对三角分裂 II 迭代算法比传统的 Jacobi分裂迭代算法收敛速度快.

4 数值实验

对中心对称线性互补问题: $z \geqslant 0, q + Az \geqslant 0, z^T(q + Az) = 0$, 其中

$$q = (-1, 0, 0, -1)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

用 Gauss-seidel迭代法得到迭代阵的谱半径为 $d(G_G) = 0.6545$; 如采用对三角分裂松弛迭代算法 I 与对三角分裂松弛迭代算法 II, 得到迭代阵的谱半径为 $d(G_{O1}) = d(G_{O2}) = 0.5$. 这说明对三角分裂松弛迭代算法 I 与对三角分裂松弛迭代算法 II 比 Gauss-seidel迭代法有更好的收敛速度.

参考文献:

[1] 陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.

[2] Zhaolu T, Chuangqing G. The iterative methods for centrosymmetric matrices [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006.

[3] Bai Z Z, Huang T Z. Accelerated overrelaxation methods for solving linear complementarity problem [J]. J UEST China, 1994, 23: 428-432.

[4] Zhongyun L. Some properties of centrosymmetric matrices [J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 141: 297-306.

[5] Varga R S. Matrix iterative analysis [M]. Second Edition. 北京: 科学出版社, 2006.

(责任编辑: 尹 闯)