DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.02.013
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(2): 142～144

一类新的瀑布型代数多重网格方法*

A New Cascadic Algebraic Multigrid Method

黄传勇[1], 李郴良[1], 董晓亮[2]
HUANG Chuan-yong[1], LI Chen-liang[1], DONG Xiao-liang[2]

(1.桂林电子科技大学数学与计算科学学院,广西桂林 541004; 2.北方民族大学信息与计算科学学院,宁夏银川 750021)
(1. School of Information and Computation Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China; 2. School of Information and Computation Science, The North University for Ethnics, Yinchuan, Ningxia, 750021, China)

摘要: 对瀑布型多重网格(CMG)法和代数多重网格(AMG)法进行组合,提出一种新的求解二维椭圆型边值问题的瀑布型代数多重网格(CAMG)法,并进行数值实验.结果表明, CAMG法所得解的误差小于 10^{-6},并且每层的迭代次数都少于 AMG法,特别在最细层上的迭代次数远远少于 AMG法. CAMG法是收敛,高效的迭代算法.

关键词: 边值问题 多重网格算法 瀑布型
中图法分类号: O241.6 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)02-0142-03

Abstract A new algebraic multigrid (AMG) method-cascadic algebraic multigrid method is developed for a kind of two dimensional elliptic boundary problem by combining cascadic multigrid (CMG) method and algebraic multigrid(AMG) method. The result of Numerial experiments show that, the error of the result of AMG is less than 10^{-6}, and the number of iteration of each floor is less than that of AMG. The case is especially obvious in the smallest floor. So the CAMG is a convergence and efficient iterative algorithm.

Key words boundary problem, multigrid method, cascadic

多重网格(MG)方法是偏微分方程问题的数值算法,因其具有渐进最优收敛性而一直受到广大学者的关注.多重网格法大体上包括几何多重网格(GMG)法和代数多重网格(AMG)法.

代数多重网格法并不直接利用所求问题的几何和物理性质,仅仅利用细网格 (K^m)上的代数方程组的系数矩阵的信息构造出多重网格方法所需的信息:粗网格(K^{m+1})、插值算子(I_{m+1}^{m})、限制算子(I_m^{m+1})、粗网格算子(A_{m+1}),然后利用多重网格法的思想对方程组进行求解.近年来,国内外对 AMG法研究与日俱增[1~4].

瀑布型多重网格(CMG)法也称单步多重网格法,它不需要校正步,方法简单,且具有渐进最优收敛性,近年来,这种方法也得到了进一步的完善[5,6].

本文结合 CMG法和 AMG法的思想,提出一类瀑布型代数多重网格(CAMG)法.

1 一般的多重网格(MG)法

1.1 瀑布型多重网格法

考虑二维椭圆型边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y), (x,y)\in K, \\ u|_{\partial K} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $K\subset R^2$ 是有界凸区域, $f(x,y)\in L^2(K)$ 是充分光滑函数.

引入均匀网格的序列 $\{K^m\}, m = 1, 2,\cdots, M$.其中 K^1 和 K^M 分别表示最细的网格和最粗的网格,记网格 K^m 上的长度为 h_m.相邻两层网格长度满足

$$h_m = \frac{h_{m+1}}{2}. \tag{1.2}$$

在每一层网格上,对原问题(1.1)采用五点差分离

收稿日期: 2006-12-22
修回日期: 2007-01-12
作者简介: 黄传勇(1981-),男,硕士研究生,主要从事代数多重网格研究工作。
* 国家自然科学基金项目(10671060)资助。

散[7]得到一序列的方程组

$$A_m u_m = f_m, m = 1, 2, \cdots, M. \quad (1.3)$$

作插值算子 I_{m+1}^m,即

$$u_m = I_{m+1}^m u_{m+1}. \quad (1.4)$$

假设 $\forall x_i, y_j \in \mathrm{K}^{m+1}$,定义插值关系如下:

$$u_{i,j}^m = \begin{cases} u_{i,j}^m, & x_i, y_j \in \mathrm{K}^{m+1}, \\ \frac{1}{16}(u_{i-1,j-1}^{m+1} + u_{i-1,j+1}^{m+1} + u_{i+1,j-1}^{m+1} + u_{i+1,j+1}^{m+1}) + \\ \quad \frac{1}{8}(u_{i,j-1}^{m+1} + u_{i,j+1}^{m+1} + u_{i-1,j}^{m+1} + u_{i+1,j}^{m+1}), \\ & x_i, y_j \notin \mathrm{K}^{m+1}, \end{cases} \quad (1.5)$$

其中 $u_{i,j}^m = u_m(x_i, y_j)$,具体 CMG算法参考文献 [8].

1.2 代数多重网格 (AMG)法

假设第 m 层的网格 (K^m) 相应的方程组为

$$A_m u_m = f_m. \quad (1.6)$$

将网格 K^m 分为 C^m 和 F^m 两部分,更粗的网格 $\mathrm{K}^{m+1} = C^m$, $F^m = \mathrm{K}^m - C^m$,网格 K^m 的划分只需要利用代数方程组 (1.6) 中系数矩阵 A_m 的信息.

定义 1.1[4] 点 i 称为是强连接到点 j,如果 A_m 中的元素满足:

$$|a_{ij}^m| \geqslant T \cdot \max_{k \neq i} |a_{ik}^m|, 0 < T \leqslant 1.$$

令 S_i^m 是 i 点所有强连接点之集, $C_i^m = C^m \cap S_i^m$,划分 K^m 为集合 C^m 和 F^m 遵循以下两条原则:

原则 1 对于每个点 $i \in F^m$,任何点 $j \in S_i^m$ 应该或者是在 C_i^m 中,或者至少强连接到一个 C_i^m 中的点.

原则 2 C^m 应该是具有这种性质的所有点的最大子集,即 C^m 中没有 2个 C 点是相互强连接的.

所有强连接到点 i 的点的集合记为 $S_i^T = \{j: i \in S_j^m\}$.假设对于某个集合 P,用 $|P|$ 表示 P 中的元素的个数,根据原则 1和原则 2就可以构造出网格粗化算法[4],记为算法 1.

算法 1

(1) 设 $C^m = O$, $F^m = O$, $U = \mathrm{K}^m$,且对所有 i, $\lambda_i = |S_i^T|$;

(2) 选 U 中有最大 λ_i 值的 i,设 $C^m = C^m \cup \{i\}$, $U = U - \{i\}$;

(3) 对所有 $j \in S_i^T \cap U$,执行 (4) 和 (5);

(4) 设 $F^m = F^m \cup \{j\}$ 且 $U = U - \{j\}$;

(5) 对所有 $l \in S_j^m \cap U$,令 $\lambda_l = \lambda_l + 1$;

(6) 对所有 $j \in S_i^m \cap U$,令 $\lambda_j = \lambda_j - 1$;

(7) 若 $U = O$,则停止,否则,转入 (2).

文献 [7]给出了插值关系

$$e_i^m = (I_{m+1}^m e^{m+1})_i = \begin{cases} e_i^{m+1}, i \in C^m, \\ \sum_{k \in P_i^m} w_{ik}^m e_k^{m+1}, i \in F^m, \end{cases} \quad (1.7)$$

其中 I_{m+1}^m 称为插值算子 (用矩阵表示又称插值矩阵),集合 P_i^m 应取点 i 附近的 C 点的集合.当 $P_i^m = C_i^m$,对于方程组 (1.7) 中第 2个式子,文献 [4]给出其插值公式

$$e_i^m = \sum_{j \in C_i^m} w_{ij}^m e_j^{m+1}, \forall i \in F^m, \quad (1.8)$$

其中

$$w_{ij}^m = -\frac{1}{a_{ii}^m - \sum_{j \in D_i^w} |a_{ij}^m|}\left(a_{ij}^m - \sum_{k \in D_i^S} a_{ik}^m a_{kj}^m / (\sum_{j \in C_i^m} |a_{kj}^m|)\right). \quad (1.9)$$

(1.8) 式中, $D_i^m = N_i^m - C_i^m$, $D_i^S = D_i^m \cap S_i^m$, $D_i^w = D_i^m - D_i^S$.

利用 Galerkin算法给出限制算子 (I_m^{m+1}) 和粗网格算子,即

$$I_m^{m+1} = (I_{m+1}^m)^{\mathrm{T}}, \quad (1.10)$$

$$A_{m+1} = I_m^{m+1} A_m I_{m+1}^m. \quad (1.11)$$

具体的 AMG算法参考文献 [4].

2 瀑布型代数多重网格 (CAMG)法

2.1 插值算子 (I_{m+1}^m)、延拓算子 (I_m^{m+1})、粗网格算子 (A_{m+1})以及 f_{m+1} 的构造

CAMG法中的网格粗化按照算法 1进行.对于 I_{m+1}^m、I_m^{m+1}、A_{m+1} 的构造方法具体参照 (1.7)~(1.11) 式. f_{m+1} 是对细网上的 f_m 进行直接限制,即

$$f_{m+1} = I_m^{m+1} f_m. \quad (2.1)$$

2.2 CAMG算法

for $m = 2, 3, \cdots, M$

$A_m = I_{m-1}^m A_{m-1} I_m^{m-1}$,

$f_m = I_{m-1}^m f_{m-1}$,

end

$u_M = (A_M)^{-1} f_M$,

$u_{M-1}^0 = I_M^{M-1} u_M$,

for $m = M, M-1, \cdots, 2$

$u_{m-1}^{m_{k-1}} = G_{m-1}^{m_{k-1}} u_{m-1}^0$, $(m_{k-1} \geqslant 1)$

if $m == 2$

break

end

$u_{m-2}^0 = I_{m-1}^{m-2} u_{m-1}^{m_{k-1}}$,

end

其中 u_m^0, G_m 表示第 m 层网格的迭代初值和迭代(光滑)算子, m_{k-1} 表示第 $m-1$ 层的迭代次数.

3 数值实验

考虑二维椭圆型边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y),(x,y)\in K, \\ u|_{\partial K} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $K=\{(x,y)|-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1\}$,$f(x,y)=4-2x^2-2y^2$,原问题的真解为 $u(x,y)=(1-x^2)(1-y^2)$.

在 MATLAB语言下,采用 CG迭代算子作为光滑算子进行 3种方法(表 1表 2表 3)的数值实验.3种方法的迭代停止控制条件都为 $\|u_m^k-u_m^{k-1}\|\leqslant 10^{-6}$,其中 $u_m^k-u_m^{k-1}$表示相邻两次迭代解之差.表 1表 2和表 3中的迭代次数是按次粗层到最细层的顺序排列,$u_1^{m_k}-u_1$表示最细层上的迭代解与问题真解之差.

表 1 CMG法数值实验

Table 1 Numerical experiments of CMG

迭代次数 Number of iteration	网 格层数 Number of grid	最细网格未知个数 Unkowns of the most fine grid	最粗网格未知个数 Unkowns of the most coarse grid	$\|u_1^{m_k}-u_1\|$
6, 14, 28	4	289	9	4.9054×10^{-8}
14, 26, 51	4	1089	25	7.7836×10^{-8}
26, 47, 94	4	4225	81	1.3188×10^{-7}
47, 81, 178	4	16641	289	7.4713×10^{-8}
88, 149, 329	4	66049	1089	1.5567×10^{-7}
178, 200, 642	4	263169	4225	1.3198×10^{-7}

表 2 1个 k循环内侧 AMG法数值实验(4层网格)

Table 2 Numerical experiments of AMG in one v-cycle (four grids)

迭代次数 The number of iteration			最细网格未知个数 Unkowns of the most fine grid	最粗网格未知个数 Unkowns of the most coarse grid	$\|u_1^{m_k}-u_1\|$
前 Before	后 After	前后之和 Total			
5, 5, 5	17, 15, 28	22, 20, 33	289	13	2.6537×10^{-8}
5, 5, 5	15, 28, 53	20, 33, 58	1089	41	7.5130×10^{-8}
5, 5, 5	29, 53, 104	34, 58, 109	4225	145	9.6603×10^{-8}
5, 5, 5	54, 101, 198	59, 106, 203	16641	545	9.7239×10^{-8}
5, 5, 5	105, 199, 384	110, 204, 384	66049	2113	8.7362×10^{-8}
5, 5, 5	210, 391, 725	215, 396, 730	263169	8321	7.2130×10^{-8}

表 3 CAMG法数值实验

Table 3 Numerical experiments of CAMG

迭代次数 Number of iteration	网格层数 Number of grid	最细网格未知个数 Unkowns of the most fine grid	最粗网格未知个数 Unkowns of the most coarse grid	$\|u_1^{m_k}-u_1\|$
8, 15, 1	4	289	13	1.1195×10^{-9}
14, 25, 1	4	1089	41	1.3392×10^{-8}
25, 42, 1	4	4225	145	4.7349×10^{-8}
42, 77, 1	4	16641	545	1.6508×10^{-7}
77, 142, 1	4	66049	2113	1.3058×10^{-7}
146, 256, 1	4	263169	8321	1.3156×10^{-7}

从表 1表 2和表 3的结果可以看出,3种不同的 MG法所得的解的精度都是比较高的,即 $\|m_1^{m_k}-u_1\|$ 的值都小于 10^{-6},说明 3种 MG方法都是收敛的.从迭代步数可以看出:CAMG法每层上的迭代次数都少于 AMG法,特别在最细层上的迭代次数远远少于 AMG法在最细层的迭代次数,所以 CAMG法是一种高效的迭代法.

参考文献:

[1] Vanek P, Brezina M, Mandel J. Convergence of algebraic multigrid based on smoothed aggregation [J]. Number Math, 2001, 88 559-579.

[2] 肖映雄,舒适,张文平,等.求解二维三温能量方程的半粗化代数多重网格法[J].数值计算与计算机应用, 2005, 25(4): 293-303.

[3] 舒适,黄云清,阳莺,等.一类三温等代数结构面剖分下的代数多重网格算法[J].计算物理, 2005, 22(6): 488-492.

[4] 黄朝晖.代数多重网格理论与算法及其应用[D].北京:中国科学院, 2002.

[5] 石钟慈,许学军.一类新的瀑布型多重网格法[J].中国科学: A辑, 2000, 30(9): 799-809.

[6] 周叔子,舒象改.解抛物问题的一类新的瀑布型多重网格法[J].应用数学, 2004, 17(3): 468-471.

[7] 孙志忠.偏微分方程数值解法[M].北京:科学出版社, 2005 28-35.

[8] 王烈衡,许学军.有限元方法的数学基础[M].北京:科学出版社, 2004 276-280.

(责任编辑:尹 闯)