DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.02.014
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(2): 145~147, 150

求解对流-扩散方程的一类显示交替分组方法

A Class Alternating Segment for Solving Convection-Diffusion Equation

王 晨,徐安农,赵富强
WANG Chen, XU An-nong, ZHAO Fu-qiang

(桂林电子科技大学 计算科学与数学学院,广西桂林 541004)
(School of Mathematics and Computational Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 对求解对流-扩散方程初边值问题的第二类 Saul'yev 非对称格式以及古典显、隐格式进行组合,提出一种新的求解对流-扩散方程的显示交替分组方法,并对新方法进行稳定性分析和数值实验.新方法针对内点为偶数的情况,在节点两端点处用分组格式进行处理,所得解的精度高,稳定性好,容易在并行机上实现.

关键词: 对流-扩散方程 交替分组方法 Saul'yev 格式 并行计算
中图法分类号: O241.8 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)02-0145-03

Abstract A new kind of AGE scheme for convection-diffusion equation is proposed by combing the Saul'yev asymmetric with classical implicit method and the classical explicit method. The situation of odd intertnal pith point use different way to deal with the boundaries is discussed. For the examples solved the mumerical results obtained by the present method are in satisfactory agreement with the exact solution.

Key words convection-diffusion equation, alternating group method, Saul'yev type asymmetric different scheme, parallel computing

扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < 1, 0 < t < T, \varepsilon > 0, \qquad (0.1)$$

$$u(x,0) = f(x), 0 < x < 1, \qquad (0.2)$$

$$u(0,t) = g_1(t), u(1,t) = g_2(t), 0 < t < T \qquad (0.3)$$

的初边值问题的数值解法已有很多种,如古典显格式、古典隐格式、Crank-Nicolson 格式、有限元方法等.这些方法可归结为两大类:一类是显格式,适合在并行计算机上使用,如古典显式,但是这类格式是条件稳定的,对时间步长有很强限制;另一类是隐格式,这类格式无条件稳定,但需要解联立方程组,如古典隐式、Crank-Nicolson 格式.这类格式不便在并行计算机上直接使用,特别是复杂的多维问题,计算规模特别大,需要在多处理器的并行机上计算,因此构造具有并行本性的差分法,有重要的意义和价值. D. J. Evans 和 A. R. B. Abdullah[1,2] 巧妙地利用第一类 Saul'yev 非对称格式,设计适合于并行计算的交替分组显式(AGE)方法.张宝琳等[3,4]提出交替分段、分块的显-隐方法.本文对第二类 Saul'yev 格式[3,4]以及古典显式、古典隐式、Crank-Nicolson 格式进行组合,得到一种新的求解对流-扩散方程的显示交替分组方法.数值试验结果比较理想.该方法适合并行计算的本性,易于在并行机上实现.

收稿日期: 2007-06-01
修回日期: 2007-10-23
作者简介: 王 晨(1981-),男,硕士研究生,主要从事对角系统与偏微分方程的并行算法研究工作。

1 差分和分组格式

1.1 几种差分格式

将区域 $(0,1)\times(0,T)$ 进行剖分,记空间步长 $h = 1/m$,时间步长为 Δt, $x_i = ih (i = 0,1,\cdots,m)$, $t_n = n\Delta t (n = 0,1,\cdots,[T/\Delta t])$, 节点为 (x_i, t_n). 计算问题 (0.1) ~ (0.3) 的解在节点 (x_i, t_n) 处的数值解 u_i^n.

定义

$$\delta_x u_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}, \delta_{\bar{x}} u_i^n = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h},$$

$$\delta_{\hat{x}} u_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h}, \delta_t u_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}.$$

逼近方程(0.1)的两个第二类 Saul'yev非对称格式为

$$W_t u_i^n + \frac{k}{2}\left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{2h} + W_x u_i^n\right) = \frac{X}{2}\left(W_x(W_x u)_i^n + h^{-1}(W_x u_i^{n+1} - W_x u_i^n)\right), \quad (1.1)$$

$$W_t u_i^n + \frac{k}{2}\left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^{n+1}}{2h} + W_x u_i^n\right) = \frac{X}{2}\left(W_x(W_x u)_i^{n+1} + h^{-1}(W_x u_i^n - W_x u_i^{n+1})\right); \quad (1.2)$$

古典隐式为

$$W_t u_i^n + kW_x u_i^{n+1} = X(W_x(W_x u_i^{n+1})); \quad (1.3)$$

古典显式为

$$W_t u_i^n + kW_x u_i^n = X(W_x(W_x u_i^n)). \quad (1.4)$$

记 $r = \Delta t/h^2$,那么(1.1)~(1.4)式可以对应写成(1.5)~(1.8)式.

$$(1+\frac{1}{2}rX)u_i^{n+1} - \frac{1}{2}r(X-\frac{kh}{2})u_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{2}r(2X+kh)u_{i-1}^n + (1-\frac{3}{2}rX)u_i^n + \frac{1}{2}r(X-\frac{kh}{2})u_{i+1}^n, \quad (1.5)$$

$$-\frac{1}{2}r(2X+kh)u_{i-1}^{n+1} + (1+\frac{3}{2}rX)u_i^{n+1} - \frac{1}{2}r(X-\frac{kh}{2})u_{i+1}^{n+1} = (1-\frac{1}{2}rX)u_i^n + \frac{1}{2}r(X-\frac{kh}{2})u_{i+1}^n, \quad (1.6)$$

$$-Xru_{i-1}^{n+1} + (1-hkr+2Xr)u_i^{n+1} + (hkr-Xr)u_{i+1}^{n+1} = u_i^n, \quad (1.7)$$

$$u_i^{n+1} = Xru_{i-1}^n + (1+hkr-2Xr)u_i^n + (Xr-hkr)u_{i+1}^n. \quad (1.8)$$

1.2 几种分组格式

(1) 4点组:假设已知 $u(x,t)$ 在第 n 层的值 u_i^n,为了求第 $n+1$ 层的值 u_i^{n+1},在内点为 $(i+j, n+1)$ $(j=0,1,2,3)$ 的4个内点上,分别应用(1.5)~(1.8)式,其差分格式是:

$$\begin{cases} (1+\frac{1}{2}rX)u_i^{n+1} - \frac{1}{2}r(X-\frac{kh}{2})u_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{2}r(2X+kh)u_{i-1}^n + (1-\frac{3}{2}rX)u_i^n + \frac{1}{2}r(X-\frac{kh}{2})u_{i+1}^n, \\ -Xru_i^{n+1} + (1-hkr+2Xr)u_{i+1}^{n+1} - (X-hk)ru_{i+2}^{n+1} = u_{i+1}^n, \\ -\frac{1}{2}(2X+kh)u_{i+1}^{n+1} + (1+\frac{3}{2}rX)u_{i+2}^{n+1} - \frac{1}{2}r(X-\frac{kh}{2})u_{i+3}^{n+1} = (1-\frac{1}{2}rX)u_{i+2}^n + \frac{1}{2}r(X-\frac{kh}{2})u_{i+3}^n, \\ u_{i+3}^{n+1} = Xru_{i+2}^n + (1+hkr-2Xr)u_{i+3}^n + (X-hk)ru_{i+4}^n. \end{cases} \quad (1.9)$$

(2) 2点组:靠近左边界 $x=0$ 的两个内点 $(i,n+1)$ $(i=1,2)$ 其中 $(0,n+1)$ 为左边界点,在这两内点上,分别应用(1.6)式和(1.8)式,可得靠近左边界处的2点的差分格式:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}r(2X+kh)u_0^{n+1} + (1+\frac{3}{2}rX)u_1^{n+1} - \frac{1}{2}r(X-\frac{kh}{2})u_2^{n+1} = (1-\frac{1}{2}rX)u_1^n + \frac{1}{2}r(X-\frac{kh}{2})u_2^n, \\ u_2^{n+1} = Xru_1^n + (1+hkr-2Xr)u_2^n + (X-hk)ru_3^n. \end{cases} \quad (1.10)$$

靠近右边界的2个点为 $(m-j, n+1)$ $(j=1,2)$,则 $(m,n+1)$ 为右边界点,且 u_m^{n+1} 的值由边界条件给出,在这2个内点处分别应用(1.5)式和(1.7)式,可得靠近右边界处的2点差分格式是:

$$\begin{cases} (1+\frac{1}{2}rX)u_{m-2}^{n+1} - \frac{1}{2}r(X-\frac{kh}{2})u_{m-1}^{n+1} = \frac{1}{2}r(2X+kh)u_{m-3}^n + (1-\frac{3}{2}rX)u_{m-2}^n + \frac{1}{2}r(X-\frac{kh}{2})u_{m-1}^n, \\ -Xru_{m-2}^{n+1} + (1-hkr+2Xr)u_{m-1}^{n+1} - (X-hk)ru_m^{n+1} = u_{m-1}^n. \end{cases} \quad (1.11)$$

由于对流-扩散方程边界条件已知,故以上几种分组均可以显式求出第 $(n+1)$ 层的未知量.

2 交替分组方法

只考虑分点数 m 为奇数的情况,此时内点数 $m-1$ 是偶数.按上述四点组(1.9)划分,则在边界节点有可能剩余0点或2点.

(1) 当 $m-1=4k+2$(k 为整数)时,设 n 为偶数,4点一组,并把 t_{n+1} 层上的内点划分为 $(k+1)$ 组.从左至右,前 $4k$ 个内点,用4点组(1.9)式,靠近右边界2个内点,用2点组(1.11)式;在第 t_{n+2} 层划分为 $(k+1)$ 组,从左至右,第1组为靠近左边界的2个内点,用两点组(1.10)式,接下来的 $4k$ 个内点,用4点组(1.9)式.上述两层格式交替使用,得到差分格式的矩阵形式是:

$$\begin{cases} (I+rG_1)U^{n+1} = (I-rG_2)U^n + b_1, \\ (I+rG_2)U^{n+2} = (I-rG_1)U^{n+1} + b_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中

$U^n = (u_1^n, u_2^n, \cdots, u_{m-1}^n)^{\mathrm{T}}$, $G_1 = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_k, A'')$, $G_2 = \mathrm{diag}(A', A_1, \cdots, A_k)$,

$$b_1 = \left(\frac{1}{2}r(2X + kh)u_0^n, 0, \cdots, 0, r(X - hk)u_m^{n+1}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$b_2 = \left(\frac{1}{2}r(2X + kh)u_0^{n+1}, 0, \cdots, 0, r(X - hk)u_m^{n+1}\right)^{\mathrm{T}},$$

b_1 和 b_2 是与边界条件有关的 $(m-1)$ 维向量.

(2) 当 $m-1=4k$ 时,设 n 为偶数,同样,在 t_{n+1} 层上划分 k 组,用 4点组 (1.9) 式;在 t_{n+2} 层划分为 $(k+1)$ 组,靠近左边界的 2个内点,用 2点式 (1.10),靠近右边界的 2个内点,用 2点组 (1.11) 式,两层格式交替使用得到差分格式的矩阵形式是:

$$\begin{cases} (I + r\tilde{G}_1)U^{n+1} = (I - r\tilde{G}_2)U^n + \tilde{b}_1, \\ (I + r\tilde{G}_2)U^{n+2} = (I - r\tilde{G}_1)U^{n+1} + \tilde{b}_2. \end{cases} \quad (2.2)$$

其中

$$U^n = (u_1^n, u_2^n, \cdots, u_{m-1}^n)^{\mathrm{T}}, \tilde{G}_1 = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_k), \tilde{G}_2 = \mathrm{diag}(A', A_1, \cdots, A_{k-1}, A''),$$

$$\tilde{b}_1 = \left(\frac{1}{2}r(2X + kh)u_0^n, 0, \cdots, 0, r(X - hk)u_m^n\right)^{\mathrm{T}}, \tilde{b}_2 = \left(\frac{1}{2}r(2X + kh)u_0^{n+2}, 0, \cdots, 0, r(X - hk)u_m^{n+2}\right)^{\mathrm{T}},$$

$\tilde{b}_1$ 和 $\tilde{b}_2$ 是与边界条件有关的 $(m-1)$ 维向量.

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}X & -\frac{1}{2}(X - \frac{kh}{2}) & 0 & 0 \\ -X & 2X - hk & -(X - hk) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(2X + hk) & \frac{3}{2}X & -\frac{1}{2}(X - \frac{hk}{2}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$(i = 1, 2, \cdots, k)$,

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}X & -\frac{1}{2}(X - \frac{kh}{2}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A'' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}X & -\frac{1}{2}(X - \frac{kh}{2}) \\ -X & 2X - hk \end{bmatrix}.$$

从矩阵的构造可以看出,格式 (2.1) 和格式 (2.2)式在 $(n+1)$ 层或 $(n+2)$ 层建立了若干个可以独立计算的子系统,因此可以在并行计算机上直接使用. 另外,还可以在相邻的 4个时间层上组合使用 (2.1) 式或 (2.2) 式,可得到双交替分组四点方法 (2.3) 和 (2.4),该方法稳定,且数值试验结果较好.

$$\begin{cases} (I + rG_1)U^{n+1} = (I - rG_2)U^n + b_1, \\ (I + rG_2)U^{n+2} = (I - rG_1)U^{n+1} + b_2, \\ (I + rG_2)U^{n+3} = (I - rG_1)U^{n+2} + b_3, \\ (I + rG_1)U^{n+4} = (I - rG_2)U^{n+3} + b_4. \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} (I + r\tilde{G}_1)U^{n+1} = (I - r\tilde{G}_2)U^n + \tilde{b}_1, \\ (I + r\tilde{G}_2)U^{n+2} = (I - r\tilde{G}_1)U^{n+1} + \tilde{b}_2, \\ (I + r\tilde{G}_2)U^{n+3} = (I - r\tilde{G}_1)U^{n+2} + \tilde{b}_3, \\ (I + r\tilde{G}_1)U^{n+4} = (I - r\tilde{G}_2)U^{n+3} + \tilde{b}_4. \end{cases} \quad (2.4)$$

3 稳定性分析

事实上,矩阵 A_i, M, M', M'' 为非负实阵,则易证 $G_i, \tilde{G}_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 均为非负实阵,所以满足 Kellogg 引理[3-5] 条件.

在齐次边界条件下有

$$U^n = GU^{n-1}, \quad (3.1)$$

其中 G 为增长矩阵,

$$G = (I + rG_2)^{-1}(I - rG_1)(I + rG_1)^{-1}(I - rG_2). \quad (3.2)$$

记

$$\hat{G} = (I + rG_2)G(I + rG_2)^{-1} = (I - rG_1)(I + rG_1)^{-1}(I - rG_2)(I + rG_2)^{-1}. \quad (3.3)$$

利用 Kellogg 引理可得 $\mathrm{d}(G) = \mathrm{d}(\hat{G}) \leqslant \| (I + rG_2)G(I + rG_2)^{-1} \|_2 \leqslant 1$,所以该方法是稳定的.

4 数值实验

对方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial u}{\partial x} = X\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, 0 < x < 1, 0 < t < T, X > 0,$$

及其初始条件和边界条件:

$$u(x, 0) = 0, 0 < x < 1;$$

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 1, 0 < t < T.$$

用文献 [2] 的方法和格式 (2.4), 取 $m = 11, h = 1/11, \Delta t = 0.001$,网比 $r = 1.21, t_n = 0.5$ 进行计算,数值解的绝对误差 (A. E,取 $e_j^n = \{u_j^n - u(x_j, t_n)|$) 和相对误差 (P. E,取 $E_j^n = \frac{|e_j^n|}{|u(x_j, t_n)|} \times 100$) 的结果如表 1所示.

表 1 数值解的绝对误差 (A. E)和相对误差 (P. E)比较

Table 1 Comparison of the absolute and the percentage error of the numerical solution

$f(x_i)$	Evans' method		交替分组方法 Alternating group method		精确解 Exact solution
	A. E	P. E	A. E	P. E	
1	0.00000	0.00601	0.00012	0.21102	0.05503
2	0.00000	0.00153	0.00020	0.1748	0.11534
3	0.00003	0.0196	0.00034	0.18990	0.18144
4	0.00003	0.01258	0.00041	0.16207	0.25392
5	0.00004	0.0105	0.00049	0.14725	0.33342
6	0.00004	0.00980	0.00051	0.12073	0.42061
7	0.00002	0.00568	0.00048	0.09317	0.51623
8	0.00002	0.00360	0.00043	0.06957	0.62108
9	0.00001	0.00198	0.00029	0.03947	0.73603
10	0.00003	0.00380	0.00019	0.2168	0.86200

由表 1结果可以看出,本文方法比文献 [2]方法得到解的精度更高,并且可直接在并行机上实现.

(下转第 150页 Continue on page 150)

献 [6]格式进行计算 (在 matlab环境下) 的数值结果见表 1和表 2.表 1和表 2中的第 1列是 $t=1$时刻网格结点的空间坐标,第 2列是精确解,后 3列是取不同时间步长所得数值结果的绝对误差.

表 1 SSPI格式所得的数值结果 ($h=1/20, t=1$)

Table 1 The numerical results of SSPI scheml

x	精确解 Exact solution	绝对误差 Abstract error		
		f= 0.01	f= 0.05	f= 0.1
0.2	0.301194	5.62E-4	0.00186	0.00288
0.4	0.246597	7.20E-4	0.00259	0.00417
0.6	0.201897	3.86E-4	0.00191	0.00357
0.8	0.165298	1.39E-4	0.00076	0.00175

表 2 文献 [6]格式所得的数值结果 ($h=1/20, t=1$)

Table 2 The numerieal results of reference [6]

x	精确解 Exact solution	绝对误差 Abstract error		
		f= 0.01	f= 0.05	f= 0.1
0.2	0.301194	5.45E-4	0.00246	0.00433
0.4	0.246597	8.18E-4	0.00391	0.00661
0.6	0.201897	8.48E-4	0.00385	0.00627
0.8	0.165298	5.07E-4	0.00229	0.00374

从表 1的数值结果可以看出, SSPI格式对求解对流方程是非常有效的,而且具有很高的精度,其局部截断误差为 $O(\tau^2 + f^2 + h^4)$. 与表 2的结果比较, SSPI格式比文献 [6]格式的精度有所提高.

可以利用 (2) 式将 (15) 式变为包含一阶导数的形式

$$\left(\frac{h}{3}+r\right)m_{i-1}^{n+1}+4m_i^{n+1}+\left(\frac{h}{3}-r\right)u_{i+1}^{n+1}=\frac{h}{3}\left(m_{i-1}^{n}+4m_i^{n}+m_{i+1}^{n}\right), \quad (19)$$

其中 $r=a(1-b)/\tau b$. 当函数的一阶导数以未知量形式出现,包含导数边界条件可以直接纳入求解过程之中,然后利用样条基本关系式,可得出各网格结点的函数值,避免了在通常的有限差分法中处理带有导数的边界条件时所遇到的困难. 显然,这非常类似于文献 [9]的三次样条配置法.

4 结束语

本文提出的 SSPI格式不仅能够方便的求解对流方程的第一类边值问题,也能很方便地利用格式 (19) 求解第二、三类边值问题,能广泛的应用于流体力学、水动力学和传热学领域,是一种非常有效的算法.

参考文献:

[1] 曾文平.对流方程的一类新的恒稳差分格式 [J].华侨大学学报: 自然科学版, 1997, 18(3): 225-230.

[2] 郑兴华,曾文平.对流方程的分组显式方法 [J].华侨大学学报: 自然科学版, 1998, 19(2): 111-114.

[3] 陆金甫,肖世江.对流方程的 GE方法 [J].计算物理, 1995, 12(3): 355-362.

[4] 金承日,刘家琦.对流方程的交替分组显式方法 [J].哈尔滨工业大学学报, 2000, 32(1): 48-50.

[5] 钟万勰.子域精细积分及偏微分方程数值解 [J].计算结构力学及其应用, 1995, 12(3): 253-260.

[6] 金承日.解对流方程的子域精细积分并行算法 [J].计算力学学报, 2002, 19(4): 423-426.

[7] 金承日,刘明珠.解对流扩散方程的子域精细积分 AGEI方法 [J].高等学校计算数学学报, 2002(4): 307-312.

[8] 傅凯新,黄云清,舒适.数值计算方法 [M].湖南: 湖南科学技术出版社, 2002, 69-80.

[9] 王璞.流体力学问题的三次样条配置法 [J].力学进展, 1990, 20(3): 316-327.

[10] Fyfe D J. The use of cubic spline in the solution of two-point boundary value problems [J]. Computer Journal, 1969, 12(2): 188-192.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 147页 Continue from page 147)

参考文献:

[1] Evans D J, Abdullah A R B. Group explicit methods for parabolic equations [J]. Intern J Computer Math, 1983, 14: 73-105.

[2] Evans D J, Abdullah A R B. A new explicit method for the diffusion-convection equation [J]. Comp & Math Appl, 1985, 11: 145-154.

[3] 张宝琳,谷同祥,莫则尧.数值并行计算原理与方法 [M].北京: 国防工业出版社, 1999.

[4] 张宝琳,袁国兴,刘兴平,等.偏微分方程并行有限差分法 [M].北京: 科学出版社, 1994.

[5] 王文洽,靳聪明.求解扩散方程的一类交替分组四点方法 [J].计算物理, 2002(6): 532-536.

(责任编辑: 尹 闯)