DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.02.015
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(2): 148- 150

对流方程的样条子域精细积分(SSPI)格式*

Spline Sub-domain Precise Integration Scheme for Solving Convection Equation

刘利斌,刘焕文

LIU Li-bin, LIU Huan-wen

(广西民族大学数学与计算机科学学院,广西南宁 530006)

(College of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要: 针对对流方程第一类初边值问题,基于子域精细积分的思想,结合三次样条函数逼近,提出一个含参数 $\mathrm{T}(\mathrm{T}>0)$ 无条件稳定的样条子域精细积分(SSPI)格式,并进行数值实验. SSPI格式求解对流方程有效,而且局部截断误差为 $O(\mathrm{T}f^2+f^2+h^4)$. SSPI格式不仅能够求解对流方程的第一类边值问题,而且能够求解第二类、第三类初边值问题,是一种有效的算法.

关键词: 对流方程 三次样条函数 子域精细积分 稳定性

中图法分类号: O241.8 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)02-0148-03

Abstract Based on sub-domain precise integration method and combined the cubic spline function approximation, it presents the Spline Sub-domain Precise Integration (SSPI) scheme containing parameter for the first initial-boundary value problem of convection equation. It is showed that this implicit scheme is unconditionally stable. The accuracy of the SSPI method is $O(\mathrm{T}f^2+f^2+h^2)$, and the present method can be conveniently used to solve the second and the third initial-boundary value problems, it is a effective method.

Key words convection equation, cubic spline function, sub-domain precise integration, stability

对流方程是一个模拟理想流动的方程,是一个既无耗散又无弥散的波动方程. 因此, 研究对流方程的解法具有重要意义. 对于对流方程的数值解法已经有了很多较好的结果[1~4],其中钟万勰等[5]提出的子域精细积分方法受到许多学者的关注.

到目前为止,已有许多学者利用子域精细积分的方法很好地解决了偏微分方程中的许多问题[5~7].但是将三次样条函数逼近和子域精细积分方法相结合的方法尚未见到.本文基于子域精细积分法[5,6]的思想,结合三次样条函数逼近,针对对流方程初边值问题,提出了一种含参数 $\mathrm{T}(\mathrm{T}>0)$的无条件稳定的二层隐式格式,且系数矩阵是严格三对角占优的,可用追赶法求解.

1 三次样条基本公式及精度

1.1 三次样条基本思想和基本公式[8]

三次样条近似的基本思想是: 分段用三次曲线来逼近真实解,在不同的段上它们一般是不同的,但是必须满足插值条件和连接条, 从而导出在节点处的函数值、一阶导数值及二阶导数值之间的基本关系式. 把上述三类值作为未知量,直接代入微分方程中,结果得到一个有限的线性方程组,通过解线性方程组而求出微分方程的近似解.

根据文献[9],可得到如下常用的基本三次样条关系式:

$$\frac{h}{6}(M_{i-1}+4M_i+M_{i+1})=\frac{1}{h}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}), \tag{1}$$

$$m_{i-1}+4m_i+m_{i+1}=\frac{3}{h}(u_{i+1}-u_{i-1}), \tag{2}$$

收稿日期: 2007-12-10

作者简介: 刘利斌(1982-),男,硕士研究生,主要从事微分方程数值解的研究工作。

* 广西自然科学基金项目(0575029, 0639008),广西研究生教育创新计划项目(2006106080701M10),广西民族大学研究生教育创新基金项目(GXUN-CHX0756)资助。

$$m_{i+1} - m_i = \frac{h}{2}(M_i + M_{i+1}), \quad (3)$$

$$m_i = \frac{h}{3}M_i + \frac{h}{6}M_{i-1} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad (4)$$

$$M_i = \frac{2m_{i-1}}{h} + \frac{4m_i}{h} - 6\frac{u_i - u_{i-1}}{h^2}, \quad (5)$$

其中 m_i, M_i 分别表示一阶导数和二阶导数在节点上的近似值，u_i 表示三次样条函数在节点的函数值，h 为步长，$i = 1, 2, \cdots, n-1$. 在本文的计算中，只用到一阶导数在节点的近似值.

1.2 精度[9]

离散误差通过基本三次样条关系进行估计. 例如应用算子符号 E，方程 (2) 能写成

$$m_i = \frac{1}{h^2}\left\{\frac{3[h^2(E^{+1} - 1) + h^2(1 - E^{-1})]}{hE^{-1} + 4h + hE^{+1}}\right\}u(x_i), \quad (6)$$

其中 E 的表示如下:

$$E^{+1} = e^{hD}, E^{-1} = e^{-hD}.$$

方程 (6) 能够被展开幂级数，并且最后得出

$$m_i = (u_x)_i - \frac{1}{180}h^4(u_{xxxx})_i + O(h^6). \quad (7)$$

方程 (7) 也已被法依夫 (Fyfe)[10] 所得到，容易看出，一阶导数具有四阶精度.

2 样条子域精细积分 (SSPI) 格式

考虑对流方程的初边值问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x}, 0 < x < L, t > 0, \quad (8)$$

$$u(x, 0) = f(x), 0 \leqslant x \leqslant L, \quad (9)$$

$$u(L, t) = g(t), t > 0, \quad (10)$$

其中 $u(x, t)$ 是关于 x 与 t 的二元未知函数，$a (a > 0)$ 是常数. 取时间步长 τ，空间步长 $h = \frac{L}{M}$ (M 为正整数)，在节点 $(x_i, t_n) = (ih, n\tau)$ 处的数值解记为 u_i^n.

令 $p = a\frac{\partial u}{\partial x}$，为了构造精度高而且稳定性好的精细积分格式，首先引入一个附加项 σu_i ($\sigma > 0$ 是参数)，加到方程 (8) 第一式的两端，得

$$\frac{du_i}{dt} + \sigma u_i = q, \quad (11)$$

其中 $q = p + \sigma u_i$. 如果 q 取某一个常数，则利用常数变易法可解得方程 (11) 的通解为

$$u_i(t) = Ce^{-\sigma t} + \frac{q}{\sigma}, \quad (12)$$

其中 C 是任意常数. 由条件 $u_i(t_n) = u_i^n$，确定该常数 C，并将 $t = t_{n+1}$ 代入 (12) 式，整理得

$$u_i^{n+1} = bu_i^n + \frac{1-b}{\sigma}q, b = e^{-\sigma\tau} \in (0, 1), \quad (13)$$

可见，按不同的方式给出 q 的值，就会得到不同的子域精细积分格式. 我们引进三次样条函数来逼近 $u(x, t)$，取

$$q = am_i^{n+1} + \sigma u_i^{n+1}, \quad (14)$$

将 q 代入 (13)，整理得

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{(1-b)}{\sigma b}am_i^{n+1}. \quad (15)$$

由 (15) 式，可得

$$u_{i+1}^{n+1} = u_{i+1}^n + \frac{(1-b)}{\sigma b}am_{i+1}^{n+1}, u_{i-1}^{n+1} = u_{i-1}^n + \frac{(1-b)}{\sigma b}am_{i-1}^{n+1}. \quad (16)$$

利用 (2) 式及 (15) 和 (16) 式可得到

$$(1 + \frac{3r}{h})u_{i-1}^{n+1} + 4u_i^{n+1} + (1 - \frac{3r}{h})u_{i+1}^{n+1} = u_{i-1}^n + 4u_i^n + u_{i+1}^n, \quad (17)$$

其中 $r = \frac{a(1-b)}{\sigma b}$，$i = 1, 2, \cdots, M-1$. 显然，(17) 式仍为隐式格式，但是其系数矩阵都为严格对角占优的矩阵，所以容易用追赶法求解.

根据 Fourier 方法对格式 (17) 进行稳定性分析，令 $u_j^n = \lambda^n e^{ij\theta}$ 并将其代入 (17) 式，计算整理得传播因子

$$\lambda = \frac{4 + 2\cos\theta}{4 + 2\cos\theta - i6c\sin\theta}, \text{其中 } c = \frac{r}{h}.$$

很显然 $|\lambda| \leqslant 1$ 恒成立，所以隐式格式 (17) 对任意参数 $\sigma > 0$ 是无条件稳定的.

此外，利用 Taylor 展开式容易求得格式 (17) 在局部截断误差为 $O(\sigma\tau^2 + \tau^2 + h^4)$.

在数值计算过程中，右边界点上的值可以直接用边界条件 (10) 计算，而在左边界点上，利用 $u(x, t)$ 沿特征线方向为常数这一性质，得知 $u(0, t_{n+1}) = u(x, t_n)$，其中 $x = \frac{\tau}{a}$. 因此，为了方便得出左边界点的导数值，用 $u_1^n, u_2^n, u_3^n, u_4^n$ 对 $u(x, t_n)$ 做三次 B 样条插值[8]，得左边界点的计算公式

$$u(0, t_{n+1}) = \sum_{i=-1}^{4} c_i B_3(\frac{x - x_i}{h}), i = -1, 0, 1, 2, 3, 4, \quad (18)$$

c_i 满足方程组 $Ac = f$，其中

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$f = (2hm_1^n, 6u_1^n, \cdots, 6u_4^n, 2hm_4^n).$$

3 数值实验

考虑模型问题 (8) ~ (10)，其中 $L = 1$，$f(x) = e^{-x}$，$g(t) = e^{-1-at}$，精确解 $u(x, t) = e^{-x-at}$. 取 $h = 1/20$，$t = 1$，参数 $\sigma = 0.001$，利用 SSPI 格式 (17) 和文

献 [6]格式进行计算(在 matlab环境下)的数值结果见表 1和表 2.表 1和表 2中的第 1列是 $t=1$时刻网格结点的空间坐标,第 2列是精确解,后 3列是取不同时间步长所得数值结果的绝对误差.

表 1 SSPI格式所得的数值结果 ($h=1/20, t=1$)

Table 1 The numerical results of SSPI scheml

x	精确解 Exact solution	绝对误差 Abstract error		
		$\tau=0.01$	$\tau=0.05$	$\tau=0.1$
0.2	0.301194	5.62E-4	0.00186	0.00288
0.4	0.246597	7.20E-4	0.00259	0.00417
0.6	0.201897	3.86E-4	0.00191	0.00357
0.8	0.165298	1.39E-4	0.00076	0.00175

表 2 文献 [6]格式所得的数值结果 ($h=1/20, t=1$)

Table 2 The numerieal results of reference [6]

x	精确解 Exact solution	绝对误差 Abstract error		
		$\tau=0.01$	$\tau=0.05$	$\tau=0.1$
0.2	0.301194	5.45E-4	0.00246	0.00433
0.4	0.246597	8.18E-4	0.00391	0.00661
0.6	0.201897	8.48E-4	0.00385	0.00627
0.8	0.165298	5.07E-4	0.00229	0.00374

从表 1的数值结果可以看出, SSPI格式对求解对流方程是非常有效的,而且具有很高的精度,其局部截断误差为 $O(\tau^2 + \tau^2 + h^4)$.与表 2的结果比较, SSPI格式比文献 [6]格式的精度有所提高.

可以利用(2)式将(15)式变为包含一阶导数的形式

$$(\frac{h}{3}+r)m_{i-1}^{n+1} + 4m_i^{n+1} + (\frac{h}{3}-r)u_{i+1}^{n+1} = \frac{h}{3}(m_{i-1}^{n} + 4m_i^{n} + m_{i+1}^{n}), \quad (19)$$

其中 $r = a(1-b)/\tau b$.当函数的一阶导数以未知量形式出现,包含导数边界条件可以直接纳入求解过程之中,然后利用样条基本关系式,可得出各网格结点的函数值,避免了在通常的有限差分法中处理带有导数的边界条件时所遇到的困难.显然,这非常类似于文献 [9]的三次样条配置法.

4 结束语

本文提出的 SSPI格式不仅能够方便的求解对流方程的第一类边值问题,也能很方便地利用格式(19)求解第二、三类边值问题,能广泛的应用于流体力学、水动力学和传热学领域,是一种非常有效的算法.

参考文献:

[1] 曾文平.对流方程的一类新的恒稳差分格式[J].华侨大学学报:自然科学版, 1997, 18(3): 225-230.

[2] 郑兴华,曾文平.对流方程的分组显式方法[J].华侨大学学报:自然科学版, 1998, 19(2): 111-114.

[3] 陆金甫,肖世江.对流方程的 GE方法[J].计算物理, 1995, 12(3): 355-362.

[4] 金承日,刘家琦.对流方程的交替分组显式方法[J].哈尔滨工业大学学报, 2000, 32(1): 48-50.

[5] 钟万勰.子域精细积分及偏微分方程数值解[J].计算结构力学及其应用, 1995, 12(3): 253-260.

[6] 金承日.解对流方程的子域精细积分并行算法[J].计算力学学报, 2002, 19(4): 423-426.

[7] 金承日,刘明珠.解对流扩散方程的子域精细积分 AGEI方法[J].高等学校计算数学学报, 2002(4): 307-312.

[8] 傅凯新,黄云清,舒适.数值计算方法[M].湖南:湖南科学技术出版社, 2002, 69-80.

[9] 王璞.流体力学问题的三次样条配置法[J].力学进展, 1990, 20(3): 316-327.

[10] Fyfe D J. The use of cubic spline in the solution of two-point boundary value problems[J]. Computer Journal, 1969, 12(2): 188-192.

(责任编辑:尹 闯)

(上接第 147页 Continue from page 147)

参考文献:

[1] Evans D J, Abdullah A R B. Group explicit methods for parabolic equations[J]. Intern J Computer Math, 1983, 14: 73-105.

[2] Evans D J, Abdullah A R B. A new explicit method for the diffusion-convection equation[J]. Comp & Math Appl, 1985, 11: 145-154.

[3] 张宝琳,谷同祥,莫则尧.数值并行计算原理与方法[M].北京:国防工业出版社, 1999.

[4] 张宝琳,袁国兴,刘兴平,等.偏微分方程并行有限差分法[M].北京:科学出版社, 1994.

[5] 王文洽,靳聪明.求解扩散方程的一类交替分组四点方法[J].计算物理, 2002(6): 532-536.

(责任编辑:尹 闯)