DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.03.002
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(3): 216~217, 220

关于图的顶点标号的几个结论*

Several Conclusions about the Vertex Labeling of Graphs

孙宗剑[1],罗海鹏[2],黎贞崇[2],何建东[2]
SUN Zong-jian[1], LUO Hai-peng[2], LI Zhen-chong[2], HE Jian-dong[2]

(1.河北科技大学理学院,河北石家庄 050018; 2.广西科学院,广西南宁 530007)
(1. College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei, 050018, China; 2. Guangxi Academy of Sciences, Nanning, Guangxi, 530007, China)

摘要:根据图顶点标号的定义以及图形结构,给出几类图的顶点标号的界值限定及包含三角形 K_3的 (k,d)-优美图中边的条数与 k的关系.

关键词:图 标号 顶点标号 奇顺序
中图法分类号:O157.5 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2008)03-0216-02

Abstract As the definition of vertex labeling and the construction of graphs, the border value of several vertex labeling graphs and the relationship of k and the side number in graceful graphs included K_3 are given.

Key words graph, labeling, vertex labeling, odd sequence

20世纪 60年代提出的图的标号问题[1,2]逐渐发展成为组合数学中的一个热门课题.至目前为止,已经定义了几十种优美图[3,4]和强协调图[4].这些标号图作为数学模型在物流运输、编码理论、X-射线密码技术、雷达、天文学、电路设计、因特网地址通讯和数据基础管理[5,6]等方面都有广泛应用.

图的标号问题是图论与组合设计的一种结合,它借助算法设计[7]对图进行分析,主要研究哪些图可以具有某种标号,具有某种标号的图有哪些,标号所具有的性质,具有某种标号的图构造,图标号问题的应用,图标号问题与其他问题之间的关系及相互影响.本文根据图的顶点标号的特点,考虑:几类图的顶点标号的界值限定,包含三角形 K_3的 (k,d)-优美图中边的条数与 k的关系,得到几个定理及推论,推广了文献[8]的相关结果.

1 相关概念

定义 1[1] 对于图 $G(V,E)$来说,若存在单射 f: $V(G)\to\{0,1,2,\cdots,|E(G)|\}$使得映射 $f^*(xy)=|f(x)-f(y)|$是从 $E(G)$到$\{1,2\cdots,|E(G)|\}$的双射,则 f称为 G的顶点的优美标号,G称为优美的.

定义 2[1] 对于图 $G(V,E)$来说,若存在单射 f: $V(G)\to\{0,1,2,\cdots,|E(G)|+k-1\}$使得映射 $f^*(xy)=|f(x)-f(y)|$是从 $E(G)$到$\{k,k+1,\cdots,k+|E(G)|-1\}$的双射,则 f称为 G的顶点的 k-优美标号,这时 G称为 k-优美的.

定义 3[1] 对于图 $G(V,E)$来说,若允许顶点标号 f的像属于$\{0,1,2,\cdots,k+(|E(G)|-1)d\}$,由相邻顶点标号差的绝对值生成的边标号集合是$\{k,k+d,k+2d,\cdots,k+(|E(G)|-1)d\}$,则 f称为 G的顶点的 (k,d)-优美标号,这时 G称为 (k,d)-优美的.

定义 4[2] 若$\exists$从 $V(G)$到$\{0,1,2,\cdots,2|E(G)|-1\}$的映射,使得边 xy标号$|f(x)-f(y)|$时,各边标号是$\{1,3,5,\cdots,2|E(G)|-1\}$,则图 $G(V,E)$称为奇优美的.

定义 5[4] 对于图 $G(V,E)$来说,若存在单射 f: $V(G)\to\{0,1,2,\cdots,|E(G)|-1\}$使得映射 $f^*(xy)=f(x)+f(y)$是从 $E(G)$到$\{1,2,\cdots,|E(G)|\}$的双射,则 f称为 G的顶点的强协调标号,这时 G称为强协调的.

定义 6[1] 对于图 $G(V,E)$来说,若存在单射 f: $V(G)\to\{0,1,2,\cdots,|E(G)|-1\}$使得映射 $f^*(xy)$

收稿日期:2007-09-24
作者简介:孙宗剑(1979-),男,硕士,助教,主要从事组合数学的研究与教学工作。
* 国家自然科学基金项目(批准号:60563008)、广西自然科学基金项目(桂科自 0728051)、广西自然科学基金项目(桂科自 0640037)资助。

$= f(x) + f(y)$ 是从 $E(G)$ 到 $\{c, c+1, \cdots, c+|E(G)|-1\}$ 的双射，则 f 称为 G 的顶点的强 c-协调标号，这时 G 称为强 c-协调的.

定义 7[1] 假定图 G 有 q 条边且 k, d 均为正整数，G 的标号 f 称为是 (k,d)-算术，若顶点是不同的非负整数，边 xy 由 $f(x)+f(y)$ 产生的标号为 $k, k+d, k+2d, \cdots, k+(q-1)d$.

定义 8[2] 有 q 条边的图 G 称为奇顺序的，若 G 的顶点标号从集合 $\{0,1,2,\cdots,q\}$ 中选择不同的正整数（当其为树时从集合 $\{0,1,2,\cdots,2q-1\}$ 中选择），使得由顶点标号之和生成的边标号为 $\{1,3,5,\cdots,2q-1\}$.

2 主要结果

定理 1 若图 G 是 (k,d)-优美的，f 是 G 的 (k,d)-优美标号，则 $\max\{f(u) | u \in V(G)\} = k+(|E(G)|-1)d$; $\min\{f(u) | u \in V(G)\} = 0$.

证明 因为图 G 中，$\exists u_1, u_2 \in V(G)$，$u_1u_2 \in E(G)$ 满足 $f^*(u_1u_2) = k+(|E(G)|-1)d$，又由于 $f^*(u_1u_2) = |f(u_1) - f(u_2)|$，则 $|f(u_1) - f(u_2)| = k+(|E(G)|-1)d$，再由于 $f(u_1), f(u_2) \in \{0,1,2,\cdots,k+(|E(G)|-1)d\}$ 且 $f(u_1) \neq f(u_2)$，必然 $f(u_1) = k+(|E(G)|-1)d$，$f(u_2) = 0$ 或者 $f(u_1) = 0$，$f(u_2) = k+(|E(G)|-1)d$，于是 $\max\{f(u) | u \in V(G)\} = k+(|E(G)|-1)d$，$\min\{f(u) | u \in V(G)\} = 0$.

推论 1[8] 若图 G 是 k-优美的，f 是 G 的 k-优美标号，则 $\max\{f(u) | u \in V(G)\} = k+|E(G)|-1$，$\min\{f(u) | u \in V(G)\} = 0$.

推论 2 若图 G 是优美的，f 是 G 的优美标号，则 $\max\{f(u) | u \in V(G)\} = |E(G)|$，$\min\{f(u) | u \in V(G)\} = 0$.

定理 2 若图 G 是奇优美的，f 是 G 的奇优美标号，则 $\max\{f(u) | u \in V(G)\} = 2|E(G)|-1$，$\min\{f(u) | u \in V(G)\} = 0$.

定理 3 若图 G 是 (k,d)-算术的，f 是 G 的 (k,d)-算术标号，则 $\left[\frac{k+(|E(G)|-1)d}{2}\right] + 1 \leq \max\{f(u) | u \in V(G)\} \leq k+(|E(G)|-1)d$，

$$0 \leq \min\{f(u) | u \in V(G)\} \leq \begin{cases} \frac{k-1}{2}, k\text{为奇数}, \\ \frac{k}{2} - 1, k\text{为偶数}. \end{cases}$$

证明 若 $\max\{f(u) | u \in V(G)\} \leq \left[\frac{k+(|E(G)|-1)d}{2}\right]$，$\exists v \in V(G)$ 使得 $uv \in E(G)$，又因为 $f^*(uv) = f(u) + f(v)$，且 $f(u) \neq f(v)$，则 $f^*(uv) < k+(|E(G)|-1)d$，这与 $f^*(uv) \in \{k, k+1, \cdots, k+(|E(G)|-1)d\}$ 矛盾. 于是

$$\left[\frac{k+(|E(G)|-1)d}{2}\right] + 1 \leq \max\{f(u) | u \in V(G)\} \leq k+(|E(G)|-1)d.$$

当 k 为奇数时，若 $\min\{f(u) | u \in V(G)\} \geq \frac{k+1}{2}$，则 $\exists g \in V(G)$ 使得 $uv \in E(G)$ 满足 $\min\{f^*(xy) | xy \in E(G)\} = f^*(uv) > k+2$，这与 $f^*(uv) \in \{k, k+1, \cdots, k+(|E(G)|-1)d\}$ 矛盾.

当 k 为偶数时，若 $\min\{f(u) | u \in V(G)\} \geq \frac{k}{2}$，则 $\exists v \in V(G)$ 使得 $uv \in E(G)$ 满足 $\min\{f^*(xy) | xy \in E(G)\} = f^*(uv) > k+1$，这与 $f^*(uv) \in \{k, k+1, \cdots, k+(|E(G)|-1)d\}$ 矛盾. 于是 $0 \leq \min\{f(u) | u \in V(G)\} \leq$

$$\begin{cases} \frac{k-1}{2}, k\text{为奇数}, \\ \frac{k}{2} - 1, k\text{为偶数}. \end{cases}$$

推论 3 若图 G 是强 c-协调的，f 是 G 的强 c-协调标号，则 $\left[\frac{c+|E(G)|-1}{2}\right] + 1 \leq \max\{f(u) | u \in V(G)\} \leq c+|E(G)|-1$，

$$0 \leq \min\{f(u) | u \in V(G)\} \leq \begin{cases} \frac{c-1}{2}, c\text{为奇数}, \\ \frac{c}{2} - 1, c\text{为偶数}. \end{cases}$$

推论 4 若图 G 是强协调的，f 是 G 的强协调标号，则 $\left[\frac{|E(G)|}{2}\right] + 1 \leq \max\{f(u) | u \in V(G)\} \leq |E(G)|$，$\min\{f(u) | u \in V(G)\} = 0$.

定理 4 若图 G 是奇顺序的，f 是 G 的奇顺序标号，则 $\left[\frac{2|E(G)|-1}{2}\right] + 1 \leq \max\{f(u) | u \in V(G)\} \leq |E(G)|$，$\min\{f(u) | u \in V(G)\} = 0$；当 G 是一棵树时，$\left[\frac{2|E(G)|-1}{2}\right] + 1 \leq \max\{f(u) | u \in V(G)\} \leq 2|E(G)|-1$，$\min\{f(u) | u \in V(G)\} = 0$.

定理 5 若图 G 是 (k,d)-优美的且 G 包含三角形 K_3，则 $k \leq (|E(G)|-1)d - 1$.

证明 设 $V(K_3) = \{u_1, u_2, u_3\}$，$K_3$ 在 G 中的顶点标号为 $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$，不妨令 $f(u_1) > f(u_2) > f(u_3)$. 因为 $\forall xy \in E(G)$，$f^*(xy) \geq k$，所以

$$f^*(u_1u_2) = f(u_1) - f(u_2) \geq k, \quad (1)$$

$$f^*(u_2u_3) = f(u_2) - f(u_3) \geq k. \quad (2)$$

又由于 $f^*(u_1u_2) \neq f^*(u_2u_3)$，所以 (1) + (2) 得 $f^*(u_1u_3) \geq 2k+1$.

(下转第 220页 Continue on page 220)

表 1 数组 (v,ξ,x) (x≤ 1801)

Table 1 Array(v,ξ,x) (x≤ 1801)

v	a	x	v	a	x	v	a	x
97	5	41	193	5	70	337	10	65
409	21	62	433	5	267	457	13	339
577	5	562	601	7	498	673	5	596
769	11	629	937	5	166	1009	11	38
1033	5	945	1129	11	20	1153	5	186
1201	11	659	1249	7	1143	1297	10	393
1321	13	832	1489	14	1229	1609	7	1551
1657	11	159	1753	7	452	1777	5	1513
1801	11	782						

引理 2.6 设 $v=12t+1$是一个质数幂,$B=\{1,x,x^2,x^3\}$.若 $x\in H^5$, $x+1\in H^3$, $x^2+x+1\in H^1$,则存在 $(v,4,1)$-DDF.

证明 证明同理引理 2.2.

引理 2.7 设 $v\in E=\{73,241,313\}$,则存在 $(v,4,1)$-DDF.

证明 通过计算机搜索,找到满足引理 2.6条件的元素 $x\in F_v^*$,其中 a为 F_v 的本原元,x为满足条件的元素.在表 2中列出了相应的结果.

定理 2.1 设 $v=12t+1$是一个质数,t为偶数,则存在 $(v,4,1)$-DDF.

表 2 数组 (v,ξ,x)

Table 2 Array (v,ξ,x)

v	a	x	v	a	x	v	a	x
73	5	29	241	7	84	313	10	92

证明 引理 2.4给出当 $v\geq 256036$时,$(v,4,1)$-DDF的存在性;引理 2.5和引理 2.7给出当 $v\in[13,256036)$时,$(v,4,1)$-DDF的存在性.证明完毕.

由引理 1.6引理 1.7和定理 2.1,有结果:

定理 2.2 设 $p\equiv 1(\mathrm{mod}\,12)$是一个质数,$n\geq 1$,则存在 $(p^n,4,1)$-DDF.

参考文献:

[1] Chang Y, Ding C. Constructions of external difference families and disjoint difference families[J]. Des Codes Crypt, 2006, 40: 167-185.

[2] Dinitz J H, Rodency P. Disjoint difference families with block size 3[J]. Util Math, 1997, 52: 153-160.

[3] Wilson R M. Cyclotomy and difference families in elementary abelian groups[J]. J Number Theory, 1972, 4: 17-47.

[4] Fuji-Hara R, Miao Y. Complete sets of disjoint difference families and their applications[J]. J Statistical Planning and Inference, 2002, 106: 87-103.

[5] Lidl R, Niederreiter H. Finite fields, Encyclopedia of mathematics and its applications [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1983: 20.

(责任编辑:尹 闯)

(上接第 217页 Continue from page 217)

由定理 3可知 $k+(|E(G)|-1)d\geq f^*(u_1u_3)\geq 2k+1$,即 $k\leq(|E(G)|-1)d-1$.

推论 5[8] 若图 G是 k-优美的且 G包含三角形 K_3,则 $k\leq|E(G)|-2$.

参考文献:

[1] Joseph A Gallian. A dynamic survey of graph labeling [J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2007, # DS6(14): 1-180.

[2] Joseph A Gallian. A dynamic survey of graph labeling [J]. The Electronic Journal of Combinatics, 2005, # DS6(5): 1-148.

[3] 梁志和.关于图标号问题[J].河北师范大学学报:自然科学版,2000,24(3): 300-303.

[4] 程恩魁.图的强协调性的两个充分条件[J].辽宁工学院学报,2005,21(5): 8-9.

[5] 哈拉里 F.图论[M].李慰萱,译.上海:上海科学技术出版社,1980.

[6] 邦迪 J A,默蒂 U S R.图论及其应用[M].吴望名,李念祖,吴兰芳,等译.北京:科学出版社,1984.

[7] 朱洪,陈增武,段振华,等.算法设计和分析[M].上海:上海科学技术文献出版社,1989.

[8] 梁怀学,刘春峰.关于图的 k-优美性[J].东北师大学报:自然科学版,1991(1): 41-44.

(责任编辑:尹 闯)