DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.03.016
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(3): 257~259

求解单调变分不等式的一个近似邻近点算法*

An Approximate Proximal Point Algorithm for Monotone Variational Inequalities

唐国吉
TANG Guo-ji

(广西民族大学数学与计算机科学学院,广西南宁 530006)
(Mathematics and Computer Science College, Guangxi University for Nationalities, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要:给出求解单调变分不等式问题的一个近似邻近点算法,在不需要任何中间步骤的条件下证明算法的收敛性.本算法的误差准则比已知算法更宽松.

关键词:变分不等式 邻近点算法 收敛性
中图法分类号: O224 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)03-0257-03

Abstract An approximate proximal point algorithm for solving monotone variational inequalities is constructed, and the convergence of the algorithm is proved under the condition that any indirect step is not required. The error criterion of this algorithm is less restrictive than known algorithms.

Key words variational inequalities, proximal point algorithm, convergence

设 K 是 R^n 空间中的一个非空闭凸集, F 是 R^n 到其自身的连续映射.变分不等式问题(简记为 VI(K, F))是指:找 $u^* \in R^n$ 使得

$$(u - u^*)^T F(u^*) \geqslant 0, \forall u \in K. \qquad (0.1)$$

变分不等式问题包含非线性互补问题(当 $K = R^n_+$)和非线性方程组(当 $K = R^n$),因此变分不等式有广泛的应用[1].

我们知道,对任意 $U > 0$, u^* 是 VI(K, F)(0.1)的解,当且仅当

$$u^* = P_K[u^* - UF(u^*)], \qquad (0.2)$$

其中 $P_K(\cdot)$ 表示 K 上的投影.记

$$e(u, U) = u - P_K[u - UF(u)], \qquad (0.3)$$

显然,求解变分不等式(0.1)等价于求解 $e(u, U)$ 的一个零点.

求解变分不等式问题的一个有效方法是邻近点算法(记为 PPA)[2,3].邻近点算法最初由 Martinet[4]于 1970年提出.何炳生[5]对利用邻近点算法求解单调变分不等式进行了综述.对于给定的 $u^k \in K$, $U_k > 0$,新的迭代点 u^{k+1} 是变分不等式

$$u \in K, (u' - u)^T F_k(u) \geqslant 0, \forall u' \in K, \qquad (0.4)$$

的解,其中

$$F_k(u) = (u - u^k) + U_k F(u). \qquad (0.5)$$

精确邻近点算法的一个等价格式是新的迭代点 u^{k+1} 满足

$$u^{k+1} = P_K[u^{k+1} - F_k(u^{k+1})], \qquad (0.6)$$

或

$$u^{k+1} = P_K[u^k - U_k F(u^{k+1})]. \qquad (0.7)$$

精确邻近点算法虽然具有良好的收敛性,但是精确求解邻近子问题的难度几乎和求解原问题相当,有时甚至是不可能求解的,因此不少学者转而研究更加可行的近似邻近点算法[3,6~8].近似邻近点算法的主要挑战在于对误差的限制,既要求算法尽可能地容易操作,又要求算法是收敛的,并且具有较好的收敛速度.本文给出近似邻近点算法来求解变分不等式问题(0.1),并且证明算法的收敛性,与何炳生[6]和王治华[7]的算法比较,该算法不需要任何的中间步骤,这大大减少了计算量.以下总假设问题(0.1)的解集是非空的.

1 基本概念及主要引理

定义 1.1 映射 $F: K \to R^n$ 称为

(a)单调的,当且仅当对任意的 $x, y \in K$,有 $(x - y)^T (F(x) - F(y)) \geqslant 0$;

收稿日期: 2007-03-20
作者简介:唐国吉(1979-),男,讲师,主要从事变分不等式研究工作。
* 广西民族大学青年科学基金项目(2007QN25)资助。

(b) 强单调(单调模为 $\lambda > 0$)的,当且仅当对任意的 $x, y \in K$,有 $(x - y)^T(F(x) - F(y)) \geqslant \lambda\|x - y\|^2$.

显然,F 是强单调的,则一定是单调的,反之则未必成立.

引理 1.1[9] 设 K 是 R^n 空间中的一个非空闭凸集,$F: K \to R^n$ 为强单调连续映射,则问题(0.1)有唯一解.

定义 1.2 设 K 是 R^n 空间中的非空闭凸集,投影算子 $P_K(\cdot)$ 定义为

$$P_K(w) = \arg\min\{\|w - u\|: u \in K\},$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 Euclid 范数.

引理 1.2[5] 设 K 是 R^n 空间中的非空闭凸集,投影算子 $P_K(\cdot)$ 有性质:

(1) $[w - P_K(w)]^T[v - P_K(w)] \leqslant 0, \forall w \in R^n, \forall v \in K$;

(2) $\|P_K(v) - P_K(w)\| \leqslant \|v - w\|, \forall v, w \in R^n$;

(3) $\|P_K(v) - u\|^2 \leqslant \|v - u\|^2 - \|v - P_K(v)\|^2, \forall u \in K$.

引理 1.3[5] $e(u,\beta)$ 关于 u 是连续的,且 $\|e(u,\beta)\|$ 关于 β 是单调上升的,即对任意给定的 $u \in R^n$,任意的 $\tilde{\beta} \geqslant \beta > 0$,有 $\|e(u,\tilde{\beta})\| \geqslant \|e(u,\beta)\|$.

2 近似邻近点算法的描述

算法 1

步骤 1 取 $u^0 \in K$ 为初始值.

步骤 2 已知 $u^k \in K, \beta_k \in [\beta, +\infty)(\beta > 0)$,$u^{k+1}$ 为系统

$$u^{k+1} = P_K[u^k - \beta_k F(v^k)], \quad (2.1)$$

$$\xi^k = \beta_k[F(u^{k+1}) - F(v^k)], \quad (2.2)$$

满足

$$\|\xi^k\|^2 \leqslant \varepsilon_k^2 + \nu_k\|u^k - u^{k+1}\|^2, \quad (2.3)$$

其中

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k < \infty, \ \sup_{k\geqslant 0}\frac{\nu_k}{\varepsilon_k} < 1. \quad (2.4)$$

的解

步骤 3 若 $u^{k+1} = v^k$,则停止;否则,令 $k := k + 1$,转步骤 2.

对于算法 1,首先关心的是算法的可定义性,即是否存在满足邻近子系统的 u^{k+1}.回答是肯定的.因为当 F 是单调连续映射时,则形如(0.5)式所定义的 $F_k(u)$ 是强单调且连续的,因此由引理 1.1 知变分不等式(0.4)有唯一解,从而存在唯一的 u^{k+1} 满足(0.6)式或者(0.7)式.因此满足算法 1 中的邻近子系统的 u^{k+1} 及 v^k 可以有无穷多.

注 文献[3]中的误差准则为 $\|\xi^k\| \leqslant \varepsilon_k$,并且要求 $\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k < \infty$.显然算法 1 的误差准则比文献[3]的更宽松.文献[7]把文献[3]的要求放宽为 $\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k^2 < \infty$.何炳生在文献[6]中使用误差准则 $\|\xi^k\| \leqslant \nu_k\|u^k - \tilde{u}^k\|$,并且要求 $\sup_{k\geqslant 0}\nu_k < 1$.文献[6,7]误差准则所获得的改进都需要在每次迭代中增加一个投影步骤作为代价,这大大增加了计算量.本文的算法不需要增加其它的中间步骤.

3 近似邻近点算法的收敛性分析

定理 3.1 设 $\{u^k\}$ 由算法 1 产生,u^* 是变分不等式问题(0.1)的任一个解,则存在 $k_0 \in N$,任意 $k > k_0$,有

$$\|u^{k+1} - u^*\|^2 \leqslant (1 + 2\varepsilon_k)\|u^k - u^*\|^2 + 2\varepsilon_k. \quad (3.1)$$

证明 由(2.1)式,(2.2)式及引理 1.2 的结论(3),有

$\|u^{k+1} - u^*\|^2 = \|P_K[u^k - \beta_k F(v^k)] - u^*\|^2 \leqslant \|u^k - \beta_k F(v^k) - u^*\|^2 - \|u^k - \beta_k F(v^k) - u^{k+1}\|^2 = \|u^k - u^*\|^2 + \beta_k^2\|F(v^k)\|^2 - 2\beta_k(u^k - u^*)^T F(v^k) - [\|u^k - u^{k+1}\|^2 + \beta_k^2\|F(v^k)\|^2 - 2\beta_k(u^k - u^{k+1})^T F(v^k)] = \|u^k - u^*\|^2 - \|u^k - u^{k+1}\|^2 - 2\beta_k(u^{k+1} - u^*)^T F(v^k) = \|u^k - u^*\|^2 - \|u^k - u^{k+1}\|^2 - 2(u^{k+1} - u^*)^T(\beta_k F(u^{k+1}) - \xi^k) = \|u^k - u^*\|^2 - \|u^k - u^{k+1}\|^2 - 2\beta_k(u^{k+1} - u^*)^T F(u^{k+1}) + 2(u^{k+1} - u^*)^T\xi^k$.

由 u^* 是问题(0.1)的一个解及 $u^{k+1} \in K$ 和 F 的单调性知

$$(u^{k+1} - u^*)^T F(u^{k+1}) \geqslant (u^{k+1} - u^*)^T F(u^*) \geqslant 0. \quad (3.2)$$

由 Cauchy-Swarz 不等式有

$$2(u^{k+1} - u^*)^T\xi^k \leqslant \varepsilon_k\|u^{k+1} - u^*\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_k}\|\xi^k\|^2 \leqslant \varepsilon_k\|u^{k+1} - u^*\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_k}(\varepsilon_k^2 + \nu_k\|u^k - u^{k+1}\|^2) = \varepsilon_k\|u^{k+1} - u^*\|^2 + \varepsilon_k + \frac{\nu_k}{\varepsilon_k}\|u^k - u^{k+1}\|^2.$$

因此

$$\|u^{k+1} - u^*\|^2 \leqslant \|u^k - u^*\|^2 - (1 - \frac{\nu_k}{\varepsilon_k})\|u^k - u^{k+1}\|^2 + \varepsilon_k\|u^{k+1} - u^*\|^2 + \varepsilon_k \leqslant \|u^k - u^*\|^2 + \varepsilon_k\|u^{k+1} - u^*\|^2 + \varepsilon_k.$$

不失一般性,设 $\varepsilon_k \leqslant \frac{1}{2}$,整理后得到

$$\|u^{k+1} - u^*\|^2 \leqslant \frac{1}{1 - \varepsilon_k}\|u^k - u^*\|^2 + \frac{\varepsilon_k}{1 - \varepsilon_k} \leqslant (1 + 2\varepsilon_k)\|u^k - u^*\|^2 + 2\varepsilon_k.$$

定理 3.2 设序列 $\{u^k\}$,$\{\xi^k\}$ 由算法 1 产生,则

(1) 序列 $\{u^k\}$ 有界,

(2) $\lim_{k\to\infty}\|u^k - u^{k+1}\| = 0$,

(3) $\lim_{k\to\infty}\|Y^k\| = 0$.

证明 (1) 由 $\sum_{k=0}^{\infty}\underline{\ }_k < \infty$,知 $\prod_{l=0}^{\infty}(1+2\underline{\ }_l) < \infty$,反复利用(3.1)式得

$$\|u^{k+1} - u^*\|^2 \leqslant \prod_{l=0}^{\infty}(1+2\underline{\ }_l)(\|u^0 - u^*\|^2 + 1) - 1 := C,$$

因此 $\{u^k\}$ 有界.

(2) 记 $Z = \sup_{k\geq 0}\frac{V_k}{\underline{\ }_k} < 1$,由 $\|u^{k+1} - u^*\|^2 \leqslant \|u^k - u^*\|^2 - (1 - \frac{V_k}{\underline{\ }_k})\|u^k - u^{k+1}\|^2 + \underline{\ }_k\|u^{k+1} - u^*\|^2 + \underline{\ }_k$,整理后得

$$(1 - Z)\|u^k - u^{k+1}\|^2 \leqslant (1 - \frac{V_k}{\underline{\ }_k})\|u^k - u^{k+1}\|^2 \leqslant \|u^k - u^*\|^2 - \|u^{k+1} - u^*\|^2 + \underline{\ }_k(\|u^{k+1} - u^*\|^2 + 1) \leqslant \|u^k - u^*\|^2 - \|u^{k+1} - u^*\|^2 + \underline{\ }_k(C+1).$$

从而 $\sum_{k=k_0}^{\infty}(1 - Z)\|u^k - u^{k+1}\|^2 \leqslant \|u^{k_0} - u^*\|^2 + (C+1)\sum_{k=k_0}^{\infty}\underline{\ }_k < \infty$,

因此 $\lim_{k\to\infty}\|u^k - u^{k+1}\| = 0$.

(3) 由(2.4)式知,$\underline{\ }_k \to 0$, $V_k \to 0$,再结合 $\lim_{k\to\infty}\|u^k - u^{k+1}\| = 0$,又因为 $\|Y^k\|^2 \leqslant \underline{\ }_k^{\,2} + V_k\|u^k - u^{k+1}\|^2$,所以 $\lim_{k\to\infty}\|Y^k\| = 0$.

定理 3.3 设 $\{u^k\}$ 由算法 1 产生,则 $\{u^k\}$ 收敛于变分不等式问题(0.1)的解.

证明 由定理 3.2 知,$\{u^k\}$ 有界,因此存在一个收敛的子序列 $\{u^{k_j}\}$,设 $u^{k_j} \to \tilde{u}(j\to\infty)$.

第一步证明 $\tilde{u}$ 是问题(0.1)的解.由引理 1.3,投影算子的非扩张性,以及 $e(u,U)$ 的定义,(2.1)式和(2.2)式,有

$$\|e(u^{k_j},U)\| \leqslant \|e(u^{k_j}, U_{k_j-1})\| = \|u^{k_j} - P_K[u^{k_j} - U_{k_j-1}F(u^{k_j})]\| = \|P_K[u^{k_j-1} - U_{k_j-1}F(v^{k_j-1})] - P_K[u^{k_j} - U_{k_j-1}F(u^{k_j})]\| \leqslant$$
$$\|u^{k_j-1} - u^{k_j} - U_{k_j-1}[F(v^{k_j-1}) - F(u^{k_j})]\| \leqslant$$
$$\|u^{k_j-1} - u^{k_j}\| + U_{k_j-1}\|F(v^{k_j-1}) - F(u^{k_j})\| =$$
$$\|u^{k_j-1} - u^{k_j}\| + \|Y^{k_j-1}\|.$$

由定理 3.2 的结论(2)和结论(3)知 $\lim_{j\to\infty}\|e(u^{k_j},U)\| = 0$,再由 $e(u,U)$ 的连续性,得到 $e(\tilde{u},U) = \lim_{j\to\infty}e(u^{k_j},U) = 0$,所以 $\tilde{u}$ 是问题(0.1)的解.

第二步证明 $\lim_{k\to\infty}u^k = \tilde{u}$.因为 $\sum_{k=0}^{\infty}\underline{\ }_k < \infty$,所以对任意的 $X > 0$,存在 $i > 0$,使得

$$\|u^{k_i} - \tilde{u}\| < \overline{X}, \prod_{l=k_i}^{\infty}(1+2\underline{\ }_l) < 1+X$$

注意到(3.1)式对变分不等式问题(0.1)的所有解都成立,对 $\forall k > k_i$ 反复利用(3.1)式得

$$\|u^k - \tilde{u}\| \leqslant \prod_{l=k_i}^{k-1}(1+2\underline{\ }_l)(\|u^{k_i} - \tilde{u}\|^2 + 1) - 1 \leqslant 2X + X^2.$$

所以 $\lim_{k\to\infty}u^k = \tilde{u}$.

注意到定理 3.3 的收敛性分析是在问题(0.1)的解集非空的假设下进行的.

推论 3.1 设 $\{u^k\}$ 由算法 1 产生,若 $\{u^k\}$ 无界,则变分不等式问题(0.1)无解.

由定理 3.1 及定理 3.2 的结论(1)容易证明推论 3.1 成立.

参考文献:

[1] Ferris M C, Pang J S. Engineering and economic applications of complementarity problems [J]. SIAM Review, 1997, 39: 669-713.

[2] Rockafellar R T. Augmented lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming [J]. Mathematics of Operations Research, 1976, 1: 97-116.

[3] Rockafellar R T. Monotone operators and the proximal point algorithm [J]. SIAM J Control Optim, 1976, 14: 877-898.

[4] Martinet B. Regularisation d'inequations variationnelles par approximation successives [J]. Rev Francaise Informat, Recherche Operationnelle (Ser. R-3), 1970 (4): 154-158.

[5] He Bingsheng, Qian Maijian, Wang Yumei. Study on approximate proximal point algorithms for monotone variational inequalities [C]//Yuan Yaxiang. Numerical linear algebra and optimization. Beijing: Science press, 2004: 15-41.

[6] 何炳生,廖立志,杨振华.极大单调算子的一个新的近似邻近点算法[J].中国科学:A辑,2002,32(11):1026-1032.

[7] 王治华.关于单调变分不等式的不精确邻近点算法的收敛性分析[J].高等学校计算数学学报,2003,25:336-343.

[8] Han Deren, He Bingsheng. A new accuracy criterion for approximate proximal point algorithms [J]. J Math Anal and Appl, 2001, 263: 343-354.

[9] ChrIstian Kanzow, Houyuan Jiang. A continuation method for (strongly) monotone variational inequalities [J]. Mathematics Programming, 1998, 81: 103-125.

(责任编辑:尹 闯)