DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.04.004
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(4): 338~340

连通不可约变换半群的自同构群结构*

Structure about Connected or Irreducible Automorphism Group of Transformation Semigroup

汤恒琦[1,2], 易 忠[2], 邓培民[2]
TANG Heng-qi[1,2], YI Zhong[2], DENG Pei-min[2]

(1.金华第一中学数学教研组,浙江金华 321015; 2.广西师范大学数学科学学院,广西桂林 541004)
(1. Mathematics Research Group, Jinhua No. 1 High School, Jinhua, Zhejiang, 321015, China; 2. College of Mathematics Science, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 给出连通变换半群导出的变换群保持连通性的充分必要条件,证明不可约变换半群导出的变换群不可约,不可约变换半群的自同构群是本原置换群,连通变换半群的自同构群是正则置换群,连通且不可约的变换半群的自同构群是一个素数阶的循环群.

关键词: 变换半群 变换群 自同构群 不可约 连通 置换群
中图法分类号: O152.8 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)04-0338-03

Abstract The sufficient and neccessory condition of the transformation group induced by a transformation semigroup maintaining connectivity is discussed. It is proved that the transformation group induced by an irreducible transformation semigroup is irreducible, that the automorphism group of an irreducible transformation semigroup is a primitive permutation group, that the automorphism group of a connected transformation semigroup is a regular permutation group, and that the automorphism group of a connected and irreducible transformation semigroup is a cyclic group with prime order.

Key words transformation semigroup, transformation group, automorphism group, irreducible, connected, permutation group

20世纪60年代以来,状态机的理论得到迅猛发展,它不仅在计算机科学及相关语言、软件等方面有重要应用,而且对于物理、生物、生物化学等领域也有重大影响.状态机与变换半群有着密切的关系,一个状态机决定一个变换半群,一个变换半群也同样决定一个状态机.关于变换半群自身的性质,已经有比较多的研究[1~5],但是由变换半群导出的变换群以及变换半群的自同构群有哪些性质尚未见有报道.本文讨论由变换半群导出的变换群的不可约性和连通性,以及变换半群的自同构群的一些性质.

收稿日期: 2008-06-12
修回日期: 2008-07-31
作者简介: 汤恒琦(1976-),男,硕士研究生,主要从事代数自动机理论研究。
* 国家自然科学基金项目(60473005),广西自然科学基金项目(0640061, 0832103)资助。

1 定义

定义 1.1[1] 一个变换半群是一个二元对 (Q,S),其中 Q是一个有限集, S是一个有限半群,且在 Q上有一个作用,也即是满足下列(i)和(ii)两个条件的一个偏映射 $\lambda: Q\times S\to Q$.

(i)对所有的 $q\in Q$; $s,s_1\in S$, $\lambda(\lambda(q,s),s_1)=\lambda(q,ss_1)$.

(ii)对所有的 $q\in Q$,由 $\lambda(q,s)=\lambda(q,s_1)$可推出 $s=s_1$,其中 $s,s_1\in S$.

对于 $q\in Q,s\in S$,通常记 $\lambda(q,s)$为 $q\cdot s$或 qs,那么(i)和(ii)两个条件变为:

(i′)对所有的 $q\in Q$; $s,s_1\in S$, $(qs)s_1=q(ss_1)$;

(ii′)对所有的 $q\in Q$,由 $qs=qs_1$可以推出 $s=s_1$,其中 $s,s_1\in S$.

在定义 1.1中,若 λ是一个映射,则称变换半群 (Q,S) 是完全的;若 S是一个幺半群并且 S的单位元 1满足 $\forall q\in Q, q\cdot 1=q$,则称 (Q,S) 是变换幺半群;进一步,如果 S是一个群,并且 $Q\neq\varnothing$,则称 (Q,S) 是变换群;若对任意给定的 $q,q_1\in Q$, $\exists s\in S$, 使得 $q_1=qs$,则称 (Q,S) 是连通的变换半群.

定义 **1.2**[1] 设 G是 Q上的一个传递置换群, Q的一个子集 P满足 $|P|\neq 1$,且 $P\neq Q$,若对每个 $g\in G$,都有 $P\cap Pg=P$或 $P\cap Pg=\varnothing$,那么 P叫做 Q关于 G的一个本原块.没有本原块的传递置换群叫做本原置换群,有本原块的传递置换群叫做非本原置换群.

定义 **1.3**[1] 设 $A=(Q,S)$是一个变换半群, $c=\{H_i\}_{i\in I}$是 Q的一个划分, 若对每一个 $H_i\in c, s\in S$, $\exists j\in I$,使得 $H_is\subseteq H_j$,则称 c是 Q的一个容许划分,也称 c是 A的容许划分.

定义 **1.4**[1] 设 $A=(Q,S)$, $B=(P,T)$ 是变换半群,若 $Z: P\to Q$是一个满偏映射,且对每一个 $s\in S$, $\exists t_s\in T$,使得对 $p\in P$, $Z(p)\cdot s\subseteq Z(p\cdot t_s)$,则称 B覆盖 A,记作 $A\leq B$, Z是 A被 B的一个覆盖, t_s是 s的一个覆盖元.

定义 **1.5**[1] 变换半群 (Q,S) 是不可约的,如果 $|Q|>1$且仅有的容许划分是平凡划分(也即包含单个块的单位划分 1_Q和划分 $\{Q\}$).

设 $A=(Q,S)$是一个变换半群, Aut_SQ表示 A的所有自同构的集合,这样 $V: Q\to Q$属于 Aut_SQ当且仅当 V是双射且 $\forall q\in Q, s\in S, V(qs)=V(q)\cdot s$. 定义"*"运算如下: $\forall q\in Q, V, V_1\in Aut_SQ$, $(V*V_1)(q)=V_1(V(q))$,那么 Aut_SQ在"*"运算下构成一个群,我们称 Aut_SQ是变换半群 A的自同构群.若 Aut_SQ在 Q上的作用定义为 $\forall q\in Q, s\in S$, $qV=V(q)$,则二元对 $A^*=(Q,Aut_SQ)$是一个变换群,我们称 A^* 是由 A导出的变换群.

定义 **1.6**[6] 设 g是有限集合 Q上的一个置换,如果存在 $q\in Q$和一个正整数 n,使得 $qg^n=q$,那么 g^n必然是 Q上的恒等置换,则称 g是 Q上的一个正则置换,元素都是正则置换的置换群称为正则置换群.

2 主要结论

以下涉及的变换半群都是完全的.

引理 **2.1** 设 $A=(Q,G)$是一个变换群,则 A是连通的当且仅当 G是作用在 Q上的传递置换群.

证明 若 A是连通的,根据定义 1.1对任意给定的 $q,q_1\in Q$, $\exists g\in G$,使得 $q_1=qg$,因此 $qG=\{qg|g\in G\}=Q$,即 G作用在 Q上的轨道只有一个,故 G是作用在 Q上的传递置换群.

反之,若 G是作用在 Q上的传递置换群,则 $\forall q\in Q$, $qG=Q$,故对任意的 $q_1\in Q$, $\exists g\in G$,使得 $q_1=qg$,因此 A是连通的.

引理 **2.2**[1] 设 $A=(Q,S)$是一个变换半群, $\Gamma=Aut_SQ$,如果 $\Gamma\neq\{1\}$且 $c=\{H_i\}_{i\in I}$是 Q在 Γ下不同轨道的集合,则 c是 A的一个容许划分.

引理 **2.3**[1] 若 $A=(Q,S)$是一个不可约的变换半群,且 $Aut_SQ\neq\{1\}$,则 $A^*=(Q,Aut_SQ)$是一个连通变换群.

引理 **2.4**[1] 若 $A=(Q,S)$是一个不可约的变换半群,且 $Aut_SQ\neq\{1\}$,则 $A\leq Z_p$,其中 p是一个素数且 $|Q|=p$.

定理 **2.1** 若 $A=(Q,S)$是一个不可约的变换半群,且 $Aut_SQ\neq\{1\}$,则 $A^*=(Q,Aut_SQ)$也是不可约的.

证明 由引理 2.3知 $A^*=(Q,Aut_SQ)$是连通的变换群,再由引理 2.1知 Aut_SQ是 Q上的一个传递置换群.若 A^*是可约的,不妨设 $c=\{H_i\}_{i\in I}$是 A^* 的一个非平凡的容许划分,考虑一个 c-块 H_i,对于任意的 $V\in Aut_SQ$,则∃某个 $j\in I$,使得 $H_iV\subseteq H_j$,若 $H_i\cap H_iV\neq\varnothing$,设 $q\in H_i\cap H_iV$,则 $q\in H_i\cap H_j\Rightarrow H_i=H_j$.因此对任意一个 c-块 H_i,都有 $H_i\cap H_iV=H_i$或 $H_i\cap H_iV\neq\varnothing$,所以 $\{H_i\}_{i\in I}$是置换群 (Q,Aut_SQ)的一个本原块系统.设 $H_1=\{q_1,\cdots,q_r\}$是一个 c-块,定义 $K=\{V\in Aut_SQ|H_1V=H_1\}$,则 $K\leq Aut_SQ$,假设 $\{V_1,\cdots,V_n\}$是 K在 Aut_SQ中不同右陪集的固定代表元集,则 $Aut_SQ=\bigcup_{j=1}^{n}KV_j$且 $KV_j\cap KV_l=\varnothing, j\neq l$. $\forall H_t\in c, t\in I$, $\forall q\in H_t$,因为 A^* 是连通的,由引理 2.1可知 $\exists V\in Aut_SQ$,使得 $q=q_1V$且 $V=kV_m$,对某个 $m\in\{1,\cdots,n\}$.因此 $q=q_1(kV_m)=(q_1k)V_m\in H_1V_m$,继而 $H_t\subseteq H_1V_m$. c是 A^* 的容许划分,所以 $\exists H_j\in c$,使 $H_1V_m\subseteq H_j$,这样就有 $H_t\subseteq H_j$,因此 $H_t=H_j$,故 $H_t=H_1V$.又由于 V_m是 Q上的一个置换,因此 $|H_1|=|H_t|$,而 $|Q|=\sum_{t\in I}|H_t|$,所以 $|H_t|\,\big|\,|Q|$. 由引理 2.4可知 $|Q|=P$是一个素数,故 $|H_t|=1$,或 $|H_t|=P$,从而 $c=1_Q$或 $c=\{Q\}$,这与 c是 Q上的非平凡容许划分矛盾.因此 A^* 不可约.

引理 **2.5** 一个连通变换群 $A=(Q,G)$是本原的充分必要条件是 A不可约.

证明 (1)必要性. 设 $1_Q \neq c = \{H_i\}_{i \in I}$ 是 Q 上的一个容许划分,则 $\exists H_i \in c$, 使 $|H_i| > 1$. 由于 $A = (Q, G)$ 是变换群,由定义可知它是完全的. 因此 $\forall g \in G$, $\exists H_j \in c$, 使得 $H_i g \subseteq H_j$. 若 $H_i g \cap H_i \neq \varnothing$, 则 $H_i \cap H_j \neq \varnothing$, 而 c 又是上 Q 的一个划分,所以 $H_i = H_j$, 即 $H_i g \cap H_i = H_i$. 这就是说 $\forall g \in G$, 要么 $H_i g \cap H_i = H_i$, 要么 $H_i g \cap H_i = \varnothing$. 因此 H_i 是 Q 关于 G 的一个本原块,而已知 $A = (Q, G)$ 是本原的,即 Q 关于 G 是没有本原块的,矛盾. 故 $H_i = Q$, $c = \{Q\}$, 因此 A 是不可约的.

(2)充分性. 假设 A 是非本原的,不妨设 P 是 Q 关于 G 的一个本原块,即 $|P| > 1$ 且 $P \subset Q$, $P \neq Q$, 则 $\forall g \in G$, 有 $Pg \cap P = P$ 或 $Pg \cap P = \varnothing$. 因为 g 是 Q 上的一个置换,所以 $Pg = P$ 或 $Pg \cap P = \varnothing$. $\forall g_1, g_2 \in G$, 若 $Pg_1 \cap Pg_2 \neq \varnothing$, 则 $\exists q_1, q_2 \in P$, 使得 $q_1 g_1 = q_2 g_2$, 所以 $q_1 g_1 g_2^{-1} = q_2 \in P$, 因此 $P g_1 g_2^{-1} \in P$, 即 $Pg_1 = Pg_2$, 也即是说 $\forall g_1, g_2 \in G$, 有 $Pg_1 \cap Pg_2 = \varnothing$ 或 $Pg_1 = Pg_2$. 由于 $A = (Q, G)$ 是连通变换群, 由引理 2.1得 G 是 Q 上的传递置换群,即 $PG = Q$, 因此 $Q = \bigcup_{g \in G} Pg$. 令 $c = \{Pg \mid g \in G\}$, 显然 c 是 Q 上的一个容许划分. 又因为 $P \in c$, $|P| > 1$, 且 $P \neq Q$, 所以 c 是 Q 上的一个非平凡的容许划分,这与 A 是不可约的矛盾. 故 A 是本原的.

定理 **2.2** 如果 $A = (Q, S)$ 是不可约的变换半群, 且 $Aut_S Q \neq \{1\}$, 则 $Aut_S Q$ 是 Q 上的一个本原置换群.

证明 由定理 2.1,引理 2.3及引理 2.5,定理 2.2 容易得证.

定理 **2.3** 若 $A = (Q, S)$ 是连通的变换半群, 则 $Aut_S Q$ 是 Q 上的正则置换群.

证明 $\forall = V \in Aut_S Q$, 若 $\exists q_0 \in Q$ 及 $n \in N$, 使得 $q_0 V^n = q_0$, 显然 $V^n \in Aut_S Q$, 对于 $q \in Q$, 因为 A 是连通的, 所以 $\exists s \in S$, 使得 $q = q_0 s$. 这样 $q V^n = V^n(q) = V^n(q_0 s) = V^n(q_0) \cdot s = (q_0 V^n) \cdot s = q_0 s = q$, 所以 $V^n = 1_Q$. 故 V 是 Q 上的一个正则置换. 因此 $Aut_S Q$ 是 Q 上的正则置换群.

引理 **2.6**[7] G 是 Q 上的传递置换群的充分必要条件是 $\sum_{g \in G} T(g) = |G|$, 其中 $g \in G$, $T(g)$ 表示 g 所固定的 Q 中的文字数.

定理 **2.4** 设 $A = (Q, S)$ 是连通的变换半群且 $Aut_S Q \neq \{1\}$, 则 $A^* = (Q, Aut_S Q)$ 是连通的充分必要条件是 $|Aut_S Q| = |Q|$.

证明 (1)充分性. 若 $|Aut_S Q| = |Q| = 1$, 则显然 $A^* = (Q, Aut_S Q)$ 是连通的. 若 $|Aut_S Q| = |Q| \neq 1$, 由于 $A(Q, S)$ 是连通的变换半群, 根据定理 2.3可知, $Aut_S Q$ 是正则置换群. 所以 $\forall 1_Q \neq V \in Aut_S Q$, $\forall q \in Q$, 都有 $T(V) = 0$, 又有 $T(1_Q) = |Q|$, 其中 $T(V)$ 表示 V 所固定的 Q 中的文字数. 所以 $\sum_{V \in Aut_S Q} T(V) = |Q| = |Aut_S Q|$, 由引理 2.6知 $Aut_S Q$ 是 Q 上的传递置换群, 再由引理 2.1得 $A^* = (Q, Aut_S Q)$ 是连通变换群.

(2)必要性. 由于 $A(Q, S)$ 是连通的且 $Aut_S Q \neq \{1\}$, 根据充分性的证明, $\forall 1_Q \neq V \in Aut_S Q$, 都有 $T(V) = 0$, 并且 $T(1_Q) = |Q|$, 又若 $A^* = (Q, Aut_S Q)$ 是连通的, 由引理 2.1得 $Aut_S Q$ 是 Q 上的传递置换群, 再根据引理 2.6得 $|Aut_S Q| = \sum_{V \in Aut_S Q} T(V) = T(1_Q) = |Q|$.

定理 **2.5** 设 $A = (Q, S)$ 是一个连通且不可约的变换半群, 若 $Aut_S Q \neq \{1\}$, 则 $Aut_S Q$ 是一个素数阶的循环群.

证明 由于 $A(Q, S)$ 是不可约的且 $Aut_S Q \neq \{1\}$, 根据引理 2.3可知 $A^* = (Q, Aut_S Q)$ 是连通的, 又由于 $A(Q, S)$ 是连通的, 根据定理 2.4可知 $|Aut_S Q| = |Q|$, 再根据引理 2.4得 $|Q|$ 是一个素数, 所以 $Aut_S Q$ 是一个素数阶的循环群.

参考文献:

[1] Holcombe W M L. Algebraic automata theory [M]. New York: Cambridge University Press, 1982.

[2] 冯文俊, 易忠, 邓培民. 状态机和变换半群积积的覆盖关系 [J]. 广西师范大学学报: 自然科学版, 2007, 25 (1): 26-29.

[3] Malik D S, John N Mordeson, Sen M K. Products of fuzzy finite state machines [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 92(1): 95-102.

[4] Kim Youn-Hee, Kim Jae-Gyeom, Cho Sung-Jin. Products of T-generalized state machines and T-generalized transformation semigroups [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 93(1): 87-97.

[5] Cho Sung-Jin, Kim Jae-Gyeom, Lee Woon-Seek. Decompositions of T-generalized transformation semigroups [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 122 (3): 527-537.

[6] Kenji Uermura, Takeo YaKu, KiMio, et al. Induced permutation automata and covering of strongly connected automata [J]. Discrete Applied Mathematics, 1999, 91: 243-249.

[7] 肖云瑞. 置换群多重可迁的充分必要条件 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 1996, 21(3): 222-226.

(责任编辑: 韦廷宗)