DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.04.007
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(4): 348~349

Hilbert k-cube的一个新上界*

A New Upper Bound for Hilbert k-cube

杨仕椿

YANG Shi-chun

(阿坝师范高等专科学校数学系,四川汶川 623000)

(Department of Mathematics, ABa's Teachers College, Wenchuan, Sichuan, 623000, China)

摘要: 给出 $H_k(n)$的一个新上界,并证明 $H_k(n) < n^{1-1/2^{k-1}} + n^{1-1/2^{k-2}}$,其中 $H_k(n)$为数集$\{1, 2,\cdots, n\}$中不含有 Hilbert k-cube集合的最大基数.

关键词: Hilbert k-cube 最大基数 上界

中图法分类号: O157.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)04-0348-02

Abstract A new upper bound of $H_k(n)$ is given and proved that $H_k(n) < n^{1-1/2^{k-1}} + n^{1-1/2^{k-2}}$, $H_k(n)$ denotes the largest size of subset $\{1, 2,\cdots, n\}$ not containing a Hilbert k-cube.

Key words Hilbert k-cube, largest size, upper bound

设 $a_1, a_2,\cdots, a_k$ 为正整数, a_0为非零整数,若集合 H 的所有元素都可以表示为

$$H=\{a_0+\sum_{i=1}^{k} x_i a_i: x_i\in\{0, 1\}\},$$

则称 H为 Hilbert k-cube. Hilbert k-cube与 Sidon序列、$B_h[g]$序列等有密切联系.数学家 D. Hilbert, P. Erdös等对其进行过深入细致的研究[1,2].在文献[1]中, D. Hilbert首先证明:如果所有整数能够着色成有限多类颜色,则至少有一类颜色数包含 Hilbert k-cube. E. Szemerédi[3]证明反映 Hilbert k-cube密度的 Szemerédi cube引理:设整数 $k\geq 2$, 如果数集 $S\subset\{1, 2,\cdots, n\}$满足 $|S|\geq(4n)^{1-1/2^{k-1}}$,则 S中必定包含一个 Hilbert k-cube.不少学者对不含有 Hilbert k-cube的最大整数集合也进行过一定的研究.令 $H_k(n)$为数集$\{1, 2,\cdots, n\}$中不含有 Hilbert k-cube的集合的最大基数. P. Erdös, P. Turán等[2]证明 $H_2(n) < n^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{4}} + 1$, 随后, B. Lindström[4,5]给出一个更简洁的证明方法.对于一般的整数 $k\geq 3$, D. S. Gunderson和 V. Rödl[6]证明

$$H_k(n) < 2^{1-1/2^{k-1}}(\sqrt{n}+1)^{2-1/2^{k-2}}. \tag{1}$$

最近, C. Sándor[7]利用文献[4]中的方法,改进了 $H_k(n)$的上界,证明

$$H_k(n)\leqslant n^{1-1/2^{k-1}} + 2n^{1-1/2^{k-2}}. \tag{2}$$

本文在文献[4,7]的基础上,进一步改进以上结果,得到 $H_k(n)$的新上界.

1 几个引理

引理1 当 $k=2$时,有 $H_2(n)\leqslant n^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{4}} + 1$.

证明 参考文献[2, 4]中的方法来证明.

设整数序列 $1\leqslant a_1 < a_2 <\cdots < a_s\leqslant n$不包含任意的 Hilbert k-cube, $r=H_{k-1}(n)$, $K=\sum_{1\leqslant i-j\leqslant r} a_i - a_j$.

引理2 当整数 $k\geqslant 3$时,有

$$\frac{1}{2}r((s-\frac{1}{2}(r+1))^2-\frac{1}{4})\leqslant K\leqslant\frac{1}{2}nr(r+1)-\frac{1}{6}r(r+1)(r+2). \tag{3}$$

证明 由于序列不包含任意的 Hilbert k-cube,则 K 中的任意项的差 a_i-a_j 的值为 d 的情况最多不超过 r 次. 显然 K 中总共有$(s-1)+(s-2)+\cdots+(s-r)=r(s-\frac{1}{2}(s+1))$项,因此 K 至少是前面各数$1,2,\cdots,\lfloor s-\frac{1}{2}(s+1)\rfloor$之和的 r 倍,这里$\lfloor x\rfloor$是 x 取整函数. 于是

$$K\geqslant\frac{1}{2}r(\lfloor s-\frac{1}{2}(r+1)\rfloor)(\lfloor s-\frac{1}{2}(r+1)\rfloor+1)\geqslant\frac{1}{2}r((s-\frac{1}{2}(r+1))^2-\frac{1}{4}). \tag{4}$$

收稿日期: 2008-03-09

作者简介: 杨仕椿(1969-),男,副教授,主要从事代数及数论研究工作。

* 四川省教育厅自然科学基金项目(2006C057)和阿坝师专校级科研课题项目(ASA07-04)资助。

又由于 K 可以表示为

$$K=\sum_{1\leqslant u\leqslant r,1\leqslant t\leqslant u}((a_{u+t}-a_t)+(a_{2u+t}-a_{u+t})+\cdots+(a_{\lfloor\frac{n-t}{u}\rfloor u+t}-a_{(\lfloor\frac{n-t}{u}\rfloor-1)u+t})). \qquad (5)$$

但是 $(a_{u+t}-a_t)+(a_{2u+t}-a_{u+t})+\cdots+(a_{\lfloor\frac{n-t}{u}\rfloor u+t}-a_{(\lfloor\frac{n-t}{u}\rfloor-1)u+t})=a_{\lfloor\frac{n-t}{u}\rfloor u+t}-a_t\leqslant n-t$，因此，由(5)式可以得到

$$K\leqslant\sum_{1\leqslant u\leqslant r,1\leqslant t\leqslant u}(n-t)=\frac{1}{2}nr(r+1)-\frac{1}{6}r(r+1)(r+2). \qquad (6)$$

由(4)式和(6)式即可得到(3)式，引理2证明完毕.

引理3 设 $k\geqslant 3$，对任意整数 $n\geqslant 1$，有

$$H_k(n)\leqslant\sqrt{(H_{k-1}(n)+1)(n-\frac{1}{3}(H_{k-1}(n)+2))+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}(H_{k-1}(n)+1). \qquad (7)$$

证明 由(3)式有 $(s-\frac{1}{2}(r+1))^2-\frac{1}{4}\leqslant n(r+1)-\frac{1}{3}(r+1)(r+2)$，则 $s\leqslant\sqrt{(r+1)(n-\frac{1}{3}(r+2))+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}(r+1)$. 令 $s=H_k(n)$，$r=H_{k-1}(n)$，即可以得到(7)式.

2 主要结论

定理 设整数 $k\geqslant 3$，则

(i)当 $k=3$ 时，有

$$H_3(n)<n^{\frac{3}{4}}+n^{\frac{1}{2}}+\frac{29}{24}n^{\frac{1}{4}}+1. \qquad (8)$$

(ii)当 $k\geqslant 4$ 时，有

$$H_k(n)<n^{1-1/2^{k-1}}+n^{1-1/2^{k-2}}. \qquad (9)$$

证明 当 $n\leqslant 2^{2^{k-1}}$ 时，有 $H_k(n)\leqslant n<n^{1-1/2^{k-1}}+n^{1-1/2^{k-2}}$，容易验证(8)式和(9)式成立. 因此以下设 $n>2^{2^{k-1}}$.

由引理1，有 $H_2(n)\leqslant n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{4}}+1$，则当 $k=3$ 时，$n>16$. 由引理3可以得到

$$H_3(n)\leqslant\sqrt{(n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{4}}+2)(n-\frac{1}{3}(n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{4}}+3))+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}(n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{4}}+2)<\sqrt{n^{\frac{3}{2}}+n^{\frac{5}{4}}+\frac{5}{3}n-\frac{2}{3}n^{\frac{3}{4}}-2n^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}(n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{4}}+2)<n^{\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}+\frac{17}{24}n^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}(n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{4}}+2)=n^{\frac{3}{4}}+n^{\frac{1}{2}}+\frac{29}{24}n^{\frac{1}{4}}+1.$$

当 $k=4$ 时，$n>256$，有

$$H_4(n)\leqslant\sqrt{(n^{\frac{3}{4}}+n^{\frac{1}{2}}+\frac{29}{24}n^{\frac{1}{4}}+2)(n-\frac{1}{3}(n^{\frac{3}{4}}+n^{\frac{1}{2}}+\frac{29}{24}n^{\frac{1}{4}}+3))+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}(n^{\frac{3}{4}}+n^{\frac{1}{2}}+\frac{29}{24}n^{\frac{1}{4}}+1)<\sqrt{n^{\frac{7}{4}}+\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}+\frac{13}{24}n^{\frac{5}{4}}}+\frac{1}{2}(n^{\frac{3}{4}}+n^{\frac{1}{2}}+\frac{29}{24}n^{\frac{1}{4}}+1)<n^{\frac{7}{8}}+\frac{1}{3}n^{\frac{5}{8}}+n^{\frac{3}{8}}+\frac{1}{2}(n^{\frac{3}{4}}+n^{\frac{1}{2}}+\frac{29}{24}n^{\frac{1}{4}}+1)<n^{\frac{7}{8}}+n^{\frac{3}{4}}.$$

假设当 $k=l$ 时(9)式成立，即 $H_l(n)<n^{1-1/2^{l-1}}+n^{1-1/2^{l-2}}$，$l\geqslant 4$，$n>256$，则当 $k=l+1$ 时，有

$$H_{l+1}(n)\leqslant\sqrt{(n^{1-1/2^{l-1}}+n^{1-1/2^{l-2}}+1)(n-\frac{1}{3}(n^{1-1/2^{l-1}}+n^{1-1/2^{l-2}}+2))+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}(n^{1-1/2^{l-1}}+n^{1-1/2^{l-2}}+1)<\sqrt{n^{2-1/2^{l-1}}+\frac{2}{3}n^{2-1/2^{l-2}}-\frac{2}{3}n^{2-3/2^{l-1}}}+\frac{1}{2}(n^{1-1/2^{l-1}}+n^{1-1/2^{l-2}}+1).$$

注意到 $n^{2-1/2^{l-2}}<n^{1-1/2^l}\cdot n^{1-1/2^{l-1}}$，则

$$H_{l+1}(n)<n^{1-1/2^l}+\frac{1}{3}n^{1-1/2^{l-1}}+\frac{1}{2}(n^{1-1/2^{l-1}}+n^{1-1/2^{l-2}}+1)<n^{1-1/2^l}+n^{1-1/2^{l-1}}.$$

综上所述，定理成立.

注 计算发现，文献[7]中的表达式 $H_3(n)<n^{\frac{3}{4}}+n^{\frac{1}{2}}+\frac{9}{8}n^{\frac{1}{4}}+1$ 有误，实际上应该为 $H_3(n)<n^{\frac{3}{4}}+n^{\frac{1}{2}}+\frac{11}{8}n^{\frac{1}{4}}+1$.

猜想 当 $k\geqslant 3$ 时，有 $H_k(n)\leqslant n^{1-1/2^{k-1}}$.

参考文献:

[1] Hilbert D. Über die irreduzibilität ganzer rationaler funktionen mit ganzzahligen koeffizienten (On the irreducibility of entire rational functions with integer coefficients)[J]. J Reine Angew Math, 1892, 110: 104-129.
[2] Erdös P, P Turán. On a problem of sidon in additive number theory and some related problems[J]. J London Math Soc, 1941, 16: 212-215.
[3] Szemerédi E. On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression[J]. Acta Math Acad Sci Hungar, 1969, 20: 89-104.
[4] Lindström B. An inequality for B_2 sequences[J]. J Combin Theory, Ser A, 1969, 6: 211-212.
[5] Lovász L. Combinatorial problems and exercises[M]. New York: North-Holland, 1993.
[6] Gunderson D S, V Rödl. Extremal problems for affine cubes of integers[J]. Combin Probab Comput, 1998, 7: 65-79.
[7] Sándor C. An upper bound for Hilbert cubes[J]. J Combin Theory: Ser A, 2007, 114: 1157-1159.

(责任编辑: 尹 闯)