DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.04.008
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(4): 350~351

树图中进攻性联盟的顶点数上界*
Offensive Alliance in Tree Graphs

苏凤婷,唐高华,黄立强
SU Feng-ting, TANG Gao-hua, HUANG Li-qiang

(广西师范学院数学与计算机科学系,广西南宁 530001)
(Department of Mathematics and Computer Science, Guangxi Teachers Education University, Nanning, Guangxi, 530001, China)

摘要:给出简单连通树图中进攻性联盟的顶点数 $\alpha_0(T(G))$ 的上界 $\frac{2\tau(G)}{3}$,强进攻性联盟的顶点数 $\hat{\alpha}_0(T(G))$ 的上界 $\frac{5\tau(G)}{6}$,全面进攻性联盟的顶点数 $\gamma_0(T(G))$ 的上界 $\lfloor\frac{2\tau(G)}{3}\rfloor$ 及全面强进攻性联盟的顶点数 $\hat{\gamma}_0(T(G))$ 的上界 $\lfloor\frac{5\tau(G)}{6}\rfloor$.

关键词:树图 进攻性联盟 顶点数
中图法分类号:O157.6 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2008)04-0350-02

Abstract: The mathematical properties of the offensive alliance number $\alpha_0(T(G))$, the strong offensive alliance number $\hat{\alpha}_0(T(G))$, the global alliance number $\gamma_0(T(G))$ and the global strong offensive alliance number $\hat{\gamma}_0(T(G))$ of the tree graph of a simple connected graph G are given, where $\alpha_0(T(G)) \leqslant \frac{2\tau(G)}{3}$, $\hat{\alpha}_0(T(G)) \leqslant \frac{5\tau(G)}{6}$, $\gamma_0(T(G)) \leqslant \lfloor\frac{2\tau(G)}{3}\rfloor$, $\hat{\gamma}_0(T(G)) \leqslant \lfloor\frac{5\tau(G)}{6}\rfloor$.

Key words: tree graph, offensive alliance, alliance number

Favaron等[1]首先提出进攻性联盟的概念,并确定连通图中进攻性联盟与强进攻性联盟顶点数的上、下界.文献[2]介绍连通图中不同类型联盟的界,包括防御性联盟顶点数,强防御性联盟顶点数,全面进攻性联盟顶点数,强对偶联盟顶点数.但是至今未见有人研究过关于进攻性联盟顶点数在树图中的界.本文主要研究简单连通树图中进攻性联盟的顶点数,全面进攻性联盟的顶点数、强进攻性联盟的顶点数及全面强进攻性联盟的顶点数的上界.

1 定义及引理

设 $G=(V,E)$ 为简单连通图,$\nu\in V$,顶点 ν 的度记为 W(ν),其中顶点的最大度用 Δ 表示.非空子集 $S\subset V$,$\nu\in V$,$N_S(\nu)=\{u\in S: u\sim\nu\}$,类似地有 $N_{V\setminus S}(\nu)=\{u\in S: u\sim\nu\}$,同时规定 $\partial(S)=\bigcup_{\nu\in S}N_{V\setminus S}(\nu)$.

定义 1[3] 设 G 是连通图,那么以 G 的所有生成树为顶点集,并且两顶点之间有边相连时,当且仅当 G 中的两棵对应的生成树 T_1, T_2,满足 $T_2=T_1-e+f$(其中 $e\in T_1, f\in T_2$)的图称为 G 的树图,记作 $T(G)=(V_T,E_T)$,f(G) 表示生成树的数目.

定义 2[4] 设图 $G=(V,E)$,其中子集 $I\subseteq V$.称 I 为控制集,当且仅当 $\forall\nu\in V$,$|N[\nu]\cap I|\geqslant 1$,也就是说,图中任意顶点或者属于 I,或者与之相临的点属于 I.图 G 中所有的控制集中含顶点数目最小者称图的控制数,记为 V(G).

定义 3[5] 设图 $G=(V,E)$,其中非空子集 $S\subset V$.S 称为进攻性联盟当且仅当 $\forall\nu\in\partial(S)$,$|N_S(\nu)|\geqslant|N_{V\setminus S}(\nu)|+1$.若满足 $\forall\nu\in\partial(S)$,$|N_S(\nu)|\geqslant|N_{V\setminus S}(\nu)|+2$ 或者满足 $\forall\nu\in\partial(S)$,$2|N_S(\nu)|\geqslant$ W(ν) $+2$,则称 S 为强进攻性联盟;若满足 $\forall\nu\in V\setminus S$,$|N_S(\nu)|\geqslant|N_{V\setminus S}(\nu)|+1$,则称 S

收稿日期: 2008-07-09
修回日期: 2008-08-11
作者简介:苏凤婷(1982-),女,硕士研究生,主要从事图论及其应用方面的研究.
* 国家自然科学基金项目(项目编号: 10771095),广西科学基金项目(项目编号: 0575052),广西研究生创新计划项目(项目编号: 200610603070M05, 2007106030701M05),广西教育厅科研基金项目资助.

为全面进攻性联盟;若满足 $\forall v\in V\setminus S, |N_S(v)|\geqslant |N_{V\setminus S}(v)|+2$,则称 S 为全面强进攻性联盟.

记 $\mathrm{T}_0(G)$ 为非空进攻性联盟最小顶点数; $\hat{\mathrm{T}}_0(G)$ 为非空强进攻性联盟最小顶点数; $\mathrm{V}_0(G)$ 为非空全面进攻性联盟最小顶点数; $\hat{\mathrm{V}}_0(G)$ 为非空全面强进攻性联盟最小顶点数.

引理1[1] 当 $n\geqslant 1$ 时, $\alpha_0(K_n)=\lceil n/2\rceil$, $\hat{\alpha}_0(K_n)=\lceil (n+1)/2\rceil$.

引理2[6] 设 G 是 n 阶简单连通图,则生成树的个数 $\tau(G)=\det(H_r(G))$,其中 $\det(H_r(G))$ 是图 G 的 Kirchhoff 矩阵 $H(G)$ 的行列式 $\det(H(G))$ 中的任意 $n-1$ 阶主子式.

命题1 对于完全图 K_3, $\alpha_0(K_3)=\alpha_0(T(K_3))=2$, $\hat{\alpha}_0(K_3)=\hat{\alpha}_0(T(K_3))=2$.

命题2 对于圈 $C_n(n\geqslant 3)$,有 $\alpha_0(T(C_n))=\lceil n/2\rceil$, $\hat{\alpha}_0(T(C_n))=\lceil (n+1)/2\rceil$.

2 主要结论

定理1 设 G 为简单连通图,且 G 中至少有一个阶 $m\geqslant 3$ 的圈,则 $\alpha_0(T(G))\leqslant\frac{2\tau(G)}{3}$, $\hat{\alpha}_0(T(G))\leqslant\frac{5\tau(G)}{6}$.

证明 由于 G 中至少有一个阶 $m\geqslant 3$ 的圈,则 $\det(H_r(G))\geqslant 2$. 因此, $T(G)$ 的阶为 $\det(H_r(G))$. 再由文献[1]的结果可以直接得出定理1成立.

定理2 设 G 为简单连通图,且 G 中至少有一个阶 $m\geqslant 3$ 的圈,则 $\gamma_0(T(G))\leqslant\lfloor\frac{2\tau(G)}{3}\rfloor$.

证明 设 $T(G)=(V_T,E_T)$, $S_T\subset V_T$,其中 S_T 为最大独立集,其独立数设为 $\mathrm{T}(T(G))$. 由全面进攻性联盟定义可以知道 $\forall v_T\in S_T, |N_{S_T}(v_T)|=0$, $|N_{V_T\setminus S_T}(v_T)|\geqslant 1$, 从而有 $\forall v_T\in S_T, |N_{V_T\setminus S_T}(v_T)|\geqslant |N_{S_T}(v_T)|+1$. 因此,在树图中 $V_T\setminus S_T$ 为全面进攻性联盟,则又有

$$\mathrm{V}_0(T(G))+\mathrm{T}(T(G))\leqslant \mathrm{f}(G). \tag{1}$$

若 $|V_T\setminus S_T|=1$,则 $T(G)=K_{1,\mathrm{f}(G)-1}$, $\mathrm{V}_0(T(G))=1$. 若 $|V_T\setminus S_T|\neq 1$,令 $V_T\setminus S_T=X\cup Y$,其中设顶点集 X 与 Y 之间的边割集最大.

设 $|X|\leqslant |Y|$,那么 $\forall v_T\in Y, |N_{S_T}(v_T)|\geqslant 1$, $|N_X(v_T)|\geqslant |N_Y(v_T)|$. 因此, $\forall v_T\in Y, |N_W(v_T)|=|N_X(v_T)|+|N_{S_T}(v_T)|\geqslant |N_Y(v_T)|+1$. 从而 $W=X\cup S_T$ 为树图中全面进攻性联盟,并使得 $v_T\in Y, |N_W(v_T)|\geqslant |N_Y(v_T)|+1$. 可以得出 $|X|\leqslant |Y|$, $|X|+|Y|+\mathrm{T}(T(G))\leqslant \mathrm{f}(G)$, $\mathrm{V}_0(T(G))=|W|=|S_T\cup X|=|X|+|S_T|$, $2|X|+\mathrm{T}(T(G))\leqslant\tau(G)$, $\gamma_0(T(G))\leqslant |X|+\alpha(T(G))$. 因此

$$2\gamma_0(T(G))-\alpha(T(G))\leqslant\tau(G). \tag{2}$$

由(1)式和(2)式可以得出定理2成立.

定理3 设 G 为简单连通图,则 $\hat{\gamma}_0(T(G))\leqslant\lfloor\frac{5\tau(G)}{6}\rfloor$.

证明 令 $T(G)=(V_T,E_T)$, $H_T\subset V_T$,其中 H_T 为最小基数2-的控制集[4].

若 $|V_T\setminus H_T|=1$,则 $V_2(T(G))=\det(H_r(G))-1$, $\hat{\gamma}_0(T(G))\leqslant\tau(G)-1$.

若 $|V_T\setminus H_T|\neq 1$,令 $V_T\setminus H_T=X_T\cup Y_T$,其中设顶点 X_T,Y_T 之间的边割集为最大.

又假设 $|X_T|\leqslant|Y_T|$, $v_T\in Y_T$, $|N_{H_T}(v_T)|\geqslant 2$, $|N_{X_T}|\geqslant|N_{Y_T}(v_T)|$,因此,在树图中 $W=X_T\cup H_T$ 为全面强进攻性联盟,并使得 $v_T\in Y_T$, $|N_W(v_T)|\geqslant|N_{Y_T}(v_T)|+2$,那么有

$$2|X_T|+\nu_2(T(G))\leqslant\tau(G), \tag{3}$$

$$\hat{\gamma}_0(T(G))\leqslant|X_T|+\nu_2(T(G)). \tag{4}$$

由(3)式和(4)式可以得到

$$\hat{\gamma}_0(T(G))\leqslant\lfloor\frac{\tau(G)+\gamma_2(T(G))}{2}\rfloor. \tag{5}$$

再由文献[7]有

$$\delta\geqslant 2,\gamma_2(T(G))\leqslant\frac{2\tau(G)}{3}. \tag{6}$$

因此,由(5)式和(6)式可以得出定理3成立.

参考文献:

[1] Favaron O, Fricke G, Goddard W. Offensive alliances in graphs[J]. Discuss Math Graph Theory, 2004, 24(2): 263-275.

[2] Rodríguez J A, Sigarreta J M. Spectral study of alliance in graphs[J]. Discussiones Mathematicae Graphs Theory, 2007, 27(1): 143-157.

[3] Shi Jinlong, Shu Jinlong. Upper bounds on the spectral radius of tree graphs[J]. Journal of East China University of Science and Techndogy, 2004, 30(4): 716-718.

[4] Chartrand Gary, Zhang Ping. Introduction to graph theory[M]. 范益政, 汪毅, 译. 北京: 人民邮电出版社, 2007.

[5] Rodríguez-Velázquez J A, Sigarreta J M. Offensive alliances in cubic graphs[J]. International Mathematical Forum, 2006, 36(1): 1773-1782.

[6] 李晓明, 黄振杰. 图中树的数目[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1993.

[7] Cockayne E J, Gamble B. An upper bound for the k-domination number of a graph[J]. J Graph Theory, 1985, 9(4): 533-534.

(责任编辑: 尹 闯)