DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.04.009
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(4): 352~356, 360

一定条件下图的拉普拉斯矩阵的谱半径*

The Spectral Radius of Laplacian Matrices of Graphs within Certain Limits

谭尚旺[1], 张德龙[2]
TAN Shang-wang[1], ZHANG De-long[2]

(1.中国石油大学数学系,山东东营 257061; 2.广西工学院信息与计算科学系,广西柳州 545006)

(1. Department of Mathematics, China University of Petroleum, Dongying, Shandong, 257061, China; 2. Department of Information and Computing Science, Guangxi Institue of Technology, Liuzhou, Guangxi, 545006, China)

摘要: 研究给定阶、边独立数和圈数的类树图的拉普拉斯矩阵谱半径的精确上界,确定达到上界的所有的图,从而推广树、单圈图和双圈图拉普拉斯矩阵谱半径的结论.

关键词: 拉普拉斯矩阵 匹配 谱半径
中图法分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)04-0352-05

Abstract The sharp upper bound of spectral radius of Laplacian matrices of qusi-tree graphs with given order, edge independence number and cycle number was given, and all graphs corresponding the sharp upper bounds was derived. These results generalize many ones about the spectral radius of Laplacian matrices of trees, unicyclic and bicyclic graphs.

Key words Laplacian matrix, matching, spectral radius

拉普拉斯矩阵在研究图的复杂性、连通性和生物化学等问题中有重要的作用[1].目前,一些特殊图类的拉普拉斯谱半径已经得到研究[2~6].本文研究给定阶、边独立数和圈数的图的拉普拉斯谱半径的上界并且确定达到上界的所有图,从而推广了树、单圈图和双圈图拉普拉斯谱半径的结论[2~5].本文只讨论简单的连通图.

1 预备知识及引理

对图 $G=(V(G),E(G))$,令 $d(G)$表示 G的拉普拉斯谱半径, $d_G(v)$表示顶点 v在 G中的度, $N_G(v)$表示 v在 G中的邻接点集, $G\cong H$表示 G和 H同构.

任两个圈都至多有一个公共顶点(即没有公共边)的简单连通图称为类树图.令 $U(n,i,r)$表示阶为 n,边独立数为 i并且圈数为 r的类树图的集合, $U^*_{n,i,r}$和 $D(r)$两个极图如图1所示.

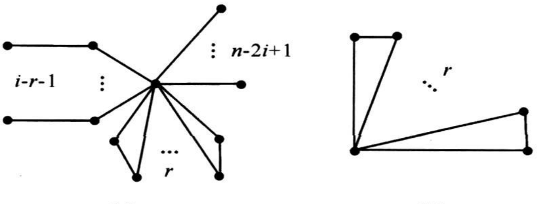

图1 极图 $U^*_{n,i,r}$和 $D(r)$

Fig. 1 Two extreme graphs

(a) $U^*_{n,i,r}$; (b) $D(r)$.

引理 1.1[1] 令图 G的顶点集为 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, $d_G(v_1)\geqslant d_G(v_2)\geqslant\cdots\geqslant d_G(v_n)$,则 (i) $d(G)\leqslant n$,并且等式成立,当且仅当 G的补图不连通; (ii) $d(G)\leqslant d_G(v_1)+d_G(v_2)$; (iii) $d(G)\geqslant d_G(v_1)+1$,并且等式成立,当且仅当 $d_G(v_1)=n-1$.

令 $U_j(p,q,k,l,s,t)$, $F_m(p,q,s,t)$是图2显示的6

收稿日期: 2008-01-28
修稿日期: 2008-05-27
作者简介: 谭尚旺(1965-),男,教授,主要从事图论研究.
* 国家自然科学基金项目(10871204)资助.

个图 ($j=1,2,3,4$; $m=1,2$), 图 $F_3(p,q,s,t)$ 是在 $U_4(p,q,0,0,s,t)$ 的包含 u 而不包含 v 的一个 3圈的一个 2度顶点上增加一个悬挂边后得到的图. 下面总设 $U_j(p,q,k,l,s,t)$, $F_m(p,q,s,t)\in U(n,i,r)$ 并且简记 $U_j(p,q,k,l,s,t)$ 为 U_j.

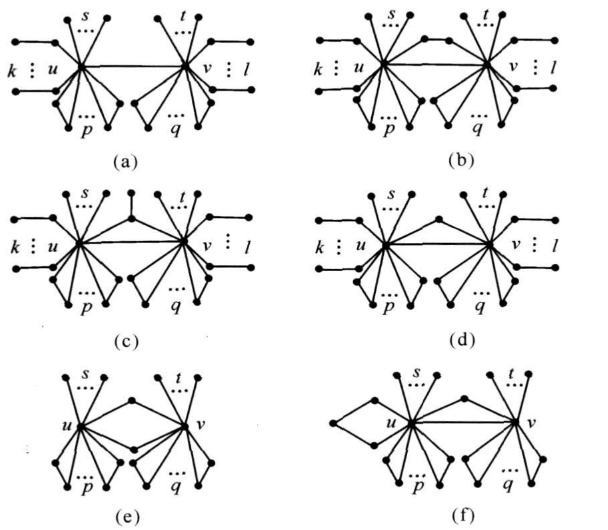

图 2 6个特殊图

Fig. 2 Six special graphs

(a) $U_1(p,q,k,l,s,t)$; (b) $U_2(p,q,k,l,s,t)$; (c) $U_3(p,q,k,l,s,t)$; (d) $U_4(p,q,k,l,s,t)$; (e) $F_1(p,q,s,t)$; (f) $F_2(p,q,s,t)$.

引理 1.2[5] 令 $G\in U(n,i,0)$, u 和 v 是 G 的两个任意顶点, 则 (i) $d_G(u)+d_G(v)\le n-i+2$, 特别是当 $uv\notin E(G)$ 时, $d_G(u)+d_G(v)\le n-i+1$; (ii) 如果 $d_G(u)+d_G(v)=n-i+2$, 则 $uv\in E(G)$, 并且存在整数 k,l,s,t, 使得 $G\cong U_1(0,0,k,l,s,t)$.

引理 1.3 如果 uv 是图 G 的悬挂边, 则存在包含 uv 的 G 的最大匹配.

证明 令 M 是 G 的一个最大匹配, 并且不妨设 $uv\notin M$. 如果与 uv 邻接的每个边都不在 M 中, 则 $M\cup\{uv\}$ 是 G 的匹配, 这与 M 是最大匹配矛盾. 因此, 存在与 uv 邻接的某个边 e, 使得 $e\in M$. 从而 $(M-\{e\})\cup\{uv\}$ 是包含 uv 的 G 的一个最大匹配.

引理 1.4 令 $G\in U(n,i,1)$, u 和 v 是 G 的唯一圈 C 上的两个顶点并且满足 $d_G(u)+d_G(v)=n-i+3$, 则存在 G 的一个最大匹配 M 和 C 上仅关联 u 和 v 之一的边 $\bar{e}$, 使得 $\bar{e}\notin M$.

证明 如果 $uv\notin E(G)$, 则在 C 上关联于 u 的两个边中存在一个边不关联 v, 记该边为 e, 则 $G-e\in U(n,i,0)$, 并且

$$d_{G-e}(u)+d_{G-e}(v)=d_G(u)+d_G(v)-1=n-i+2.$$

由引理 1.2(ii)知, $uv\in E(G-e)$, 从而 $uv\in E(G)$, 矛盾. 结合 G 是单圈图知, uv 是圈 C 上的边.

令 l 表示 C 的长度, 并且 $N_G(u)=\{u_1,u_2,\cdots,u_p,v\}$, $N_G(v)=\{v_1,v_2,\cdots,v_q,u\}$, $J_1=\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}$, $J_2=\{v_1,v_2,\cdots,v_q\}$. 显然, $p+q=d_G(u)+d_G(v)-2=n-i+1$. 以下分两种情形证明.

情形 1 设 $J_1\cup J_2$ 中存在度为 1 的顶点.

设 $d_G(u_1)=1$, u_2 是 u 在 C 上的另一个邻接顶点(除 v 外). 由引理 1.3 知, 存在 G 的一个最大匹配 M, 使得 $u_1u\in M$, 从而 $u_2u\notin M$.

情形 2 设 $J_1\cup J_2$ 中每个顶点的度至少是 2.

假设 $l\ge4$. 如果 $J_1\cap J_2\ne\varnothing$, 设 $u_1=v_1$, 则 uvv_1u 是 G 的唯一圈, 这与假设 $l\ge4$ 矛盾. 因此, $J_1\cap J_2=\varnothing$. 因为 J_1 中每个顶点的度至少是 2, G 是单圈图, 边 uv 在 C 上并且 $l\ge4$, 所以存在不属于 $J_1\cup\{u,v\}$ 的两两不同的顶点 $x_1,x_2,\cdots,x_p$, 使得 $u_jx_j\in E(G)$ $(j=1,2,\cdots,p)$. 同理, 存在不属于 $J_2\cup\{u,v\}$ 的两两不同的顶点 $y_1,y_2,\cdots,y_q$, 使得 $v_my_m\in E(G)$ $(m=1,2,\cdots,q)$. 令

$$J_3=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\},\ J_4=\{y_1,y_2,\cdots,y_q\}.$$

由于 G 是单圈图并且 uv 在 C 上, 于是 J_k $(k=1,2,3,4)$ 中的所有顶点都相互不邻接并且 $|(J_1\cup J_3)\cap(J_2\cup J_4)|\le1$. 由 J_3 和 J_4 的取法知, $J_1\cap J_3=\varnothing$, $J_2\cap J_4=\varnothing$, 于是

$$n\ge|(J_1\cup J_3)\cup(J_2\cup J_4)|+|\{u,v\}|=|(J_1\cup J_3)|+|(J_2\cup J_4)|-|(J_1\cup J_3)\cap(J_2\cup J_4)|+2\ge2p+2q-1=2n-2i+3,$$

即 $n\le2i-3$, 这与 $n\ge2i$ 矛盾. 综上知 $l=3$. 令 $C=uvwu$, 则对 G 的任意最大匹配 M, 都有 $wu\notin M$ 或 $wv\notin M$. 引理 1.4 证明完毕.

引理 1.5 令 $G\in U(n,i,r)$, u 和 v 是 G 的两个任意顶点, 则

(i) $d_G(u)+d_G(v)\le n-i+r+2$, (1)

特别是当 $uv\notin E(G)$ 时, 有

$d_G(u)+d_G(v)\le n-i+r+1$; (2)

(ii) 如果 $d_G(u)+d_G(v)=n-i+r+2$, 则 $uv\in E(G)$ 并且存在整数 p,q,k,l,s,t 和 j $(j=1,2,3,4)$, 使 $G\cong U_j(p,q,k,l,s,t)$;

(iii) 如果 $d_G(u)+d_G(v)=n$, 则存在整数 p,q,s,t, 使 G 同构于某个 $U_j(p,q,0,0,s,t)$ $(j=1,2,3,4)$, 或 G 同构于 $U_4(p,q,1,0,s,t)$, 或 G 同构于某个 $F_j(p,q,s,t)$ $(j=1,2,3)$.

证明 (i) 对 $r\ge0$, 应用数学归纳法, 证明不等式(1)和不等式(2)成立.

当 $r=0$时，G是阶为 n并且边独立数为 i的树，即 $G\in U(n,i,0)$. 由引理 1.2(i)知，这时不等式(1)和不等式(2)成立.

假设不等式(1)和不等式(2)对 r成立. 令 $G\in U(n,i,r+1)$，u和 v是 G的两个任意顶点. 由于 G至少包含一个圈，记其中一个为 C，则存在 C上的一个边 e，使得 $G-e\in U(n,i,r)$. 由归纳假设得

$$d_{G-e}(u)+d_{G-e}(v)\leqslant n-i+r+2; \qquad (3)$$

特别是当 $uv\notin E(G-e)$时，

$$d_{G-e}(u)+d_{G-e}(v)\leqslant n-i+r+1. \qquad (4)$$

如果 e与 u或 v不关联，则由不等式(3)得

$$d_G(u)+d_G(v)\leqslant d_{G-e}(u)+d_{G-e}(v)+1\leqslant n-i+(r+1)+2.$$

如果 e与 u和 v都关联，即 $uv\in E(G)$，则 $e=uv\notin E(G-e)$. 由不等式(4)得

$$d_G(u)+d_G(v)=d_{G-e}(u)+d_{G-e}(v)+2\leqslant n-i+(r+1)+2.$$

可见不等式(1)成立.

令 $uv\notin E(G)$，则 $uv\notin E(G-e)$. 由于 e与 u或 v不关联，于是由不等式(4)得

$$d_G(u)+d_G(v)\leqslant d_{G-e}(u)+d_{G-e}(v)+1\leqslant n-i+(r+1)+1.$$

可见不等式(2)成立.

(ii)对 $r\geqslant 0$，应用数学归纳法证明.

当 $r=0$时，$G\in U(n,i,0)$并且 $d_G(u)+d_G(v)=n-i+2$. 于是由引理 1.2(ii)知，$uv\in E(G)$，并且存在整数 k,l,s,t，使 $G\cong U_1(0,0,k,l,s,t)$，即结论对 $r=0$成立.

假设结论对 r成立. 令 $G\in U(n,i,r+1)$，u和 v是 G的两个顶点并且满足 $d_G(u)+d_G(v)=n-i+(r+1)+2$.

如果存在 G的一个圈 C，使 u和 v都不在 C上，则存在 C上的一个边 e，使 u和 v在 G中都不关联 e并且 $G-e\in U(n,i,r)$. 于是得

$$d_{G-e}(u)+d_{G-e}(v)=d_G(u)+d_G(v)=n-i+r+3>n-i+r+2,$$

这与(1)式矛盾. 因此 G的每个圈都包含 u或 v.

如果 G有一个圈 C，它只包含 u和 v之一，设 C只包含 u，则显然存在 G的一个最大匹配 M，使 C上关联 u的两个边至少有一个不在 M中.

如果 G的每个圈都包含 u和 v，则由 G的任两个圈至多有一个公共顶点知，G是单圈图，即 $G\in U(n,i,1)$并且 $d_G(u)+d_G(v)=n-i+3$. 于是由引理 1.3知，存在 G的一个最大匹配 M，使 C上仅关联 u和 v之一的某个边 e不在 M中.

由此可知，总存在 G的一个最大匹配 M，一个圈 C和 C上仅关联 u和 v之一的边 e，使 $e\notin M$. 这表明存在 G的一个边 e，使 $G-e\in U(n,i,r)$并且

$$d_{G-e}(u)+d_{G-e}(v)=d_G(u)+d_G(v)-1=n-i+r+2.$$

因此，由归纳假设知 $uv\in E(G-e)$，并且存在整数 p,q,k,l,s,t和 $j\,(j=1,2,3,4)$，使 $G-e\cong U_j(p,q,k,l,s,t)$. 假设 e关联于 u. 如果 $G-e$同构于 $U_1(p,q,k,l,s,t)$，则 $G=(G-e)+e$同构于 $U_1(p+1,q,k-1,l,s,t)$，$U_2(p,q,k,l-1,s,t)$，$U_3(p,q,k,l-1,s,t)$或 $U_4(p,q,k,l,s,t-1)$之一. 如果 $G-e$同构于 $U_j(p,q,k,l,s,t)\,(j=2,3,4)$，则由 G的任两个圈无公共边知，$G=(G-e)+e$同构于 $U_j(p+1,q,k-1,l,s,t)$. 可见(ii)的结论得证.

(iii) $|N_G(u)\cup N_G(v)|+|N_G(u)\cap N_G(v)|=|N_G(u)|+|N_G(v)|=d_G(u)+d_G(v)=n$. 既然 G的任两个圈都没有公共边，于是 $|N_G(u)\cap N_G(v)|\leqslant 2$. 特别是当 u不邻接于 v时，$|N_G(u)\cup N_G(v)|\leqslant n-2$. 以下分3种情形证明.

情形1 假设 $|N_G(u)\cap N_G(v)|=2$. 此时，$|N_G(u)\cup N_G(v)|=n-2$.

设 $N_G(u)\cap N_G(v)=\{x,y\}$，则 $uxvyu$是 G的一个4圈. 由于 G的任两个圈都没有公共边，于是 $uv\notin E(G)$，$xy\notin E(G)$，$N_G(u)$和 $N_G(v)$的顶点导出子图的每个分支都是孤立点或边，$N_G(u)-\{x,y\}$与 $N_G(v)-\{x,y\}$的顶点之间没有边连接，并且由 $|N_G(u)\cup N_G(v)|=n-2$知，$G-\{u,v,x,y\}$的每个点一定仅邻接 u或 v之一. 因此，存在整数 p,q,s,t，使 $G\cong F_1(p,q,s,t)$.

情形2 假设 $|N_G(u)\cap N_G(v)|=1$. 此时，$|N_G(u)\cup N_G(v)|=n-1$.

如果 $uv\notin E(G)$，则 $n\geqslant |N_G(u)\cup N_G(v)|+|\{u,v\}|=n+1$，矛盾. 因此，$uv\in E(G)$. 令 $N_G(u)\cap N_G(v)=\{x\}$，则 $uvxu$是 G的一个3圈. 由 $|N_G(u)\cup N_G(v)|=n-1$知，存在 G的唯一点 w，使 $w\notin N_G(u)\cup N_G(v)$. 既然 G的任两个圈都无公共边，于是 $N_G(u)$和 $N_G(v)$的顶点导出子图的每个分支都是孤立点或边，在 $N_G(u)-\{v,x\}$与 $N_G(v)-\{u,x\}$的顶点之间没有边连接. 如果 w邻接于 x，则存在整数 p,q,s,t，使 $G\cong U_3(p,q,0,0,s,t)$；如果 w邻接于 $N_G(u)-\{x\}$中的一个点，则存在整数 p,q,s,t，使 $G\cong U_4(p,q,1,0,s,t)$，或 $G\cong F_3(p,q,s,t)$；如果 w邻接于 $N_G(u)-\{x\}$中的两个点，则存在整数 p,q,s,t，使

$G\cong F_2(p,q,s,t)$.

情形3 假设$|N_G(u)\cap N_G(v)|=0$.此时,$|N_G(u)\cup N_G(v)|=n$.

类似情形2的讨论知,$uv\in E(G)$.由于G的任两个圈都没有公共边,于是$N_G(u)$和$N_G(v)$的顶点导出子图的每个分支都是孤立点或边,在$N_G(u)-\{v\}$与$N_G(v)-\{u\}$的顶点之间至多有一个边连接,并且由$|N_G(u)\cup N_G(v)|=n$知,G的每个顶点一定仅邻接u或v之一.如果在$N_G(u)-\{v\}$和$N_G(v)-\{u\}$的顶点之间没有边连接,则存在整数p,q,s,t,使$G\cong U_1(p,q,0,0,s,t)$;如果在$N_G(u)-\{v\}$和$N_G(v)-\{u\}$的顶点之间有一个边连接,则存在整数p,q,s,t,使$G\cong U_2(p,q,0,0,s,t)$.引理1.5证明完毕.

令$a=2p+k+s$,$b=2q+l+t$,$c=(\lambda-1)(\lambda-2)$,$d=(a+b)(c-1)+(k+l)$,$e=[a(c-1)+k][b(c-1)+l]$.对$j=1,2,3,4$,计算得到U_j的拉普拉斯矩阵特征多项式

$\Phi(U_j,\lambda)=\lambda(\lambda^2-4\lambda+3)^{p+q}(\lambda-1)^{s+t-2}(c-1)^{k+l-2}f_j(p,q,k,l,s,t)$.

$f_1(p,q,k,l,s,t)=c(c-1)^2(\lambda-1)-d(c-1)(\lambda-1)^2+e\lambda$.

$f_2(p,q,k,l,s,t)=c^2(c-1)^2(\lambda-4)-dc(c-1)(c-\lambda)+e\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$.

$f_3(p,q,k,l,s,t)=(c-1)^2(\lambda-1)^3(\lambda-3)(\lambda-4)+e\lambda(\lambda^2-4\lambda+2)-d(\lambda-1)(c-1)(\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda-3)$.

$f_4(p,q,k,l,s,t)=(c-1)(\lambda-1)^2(\lambda-3)[(c-1)(\lambda-3)-d]+e\lambda(\lambda-2)$.

既然$U^*_{n,i,r}\cong U_1(r,0,i-r-1,0,n-2i,0)$,于是

$\Phi(U^*_{n,i,r},\lambda)=\lambda(\lambda-3)^r(\lambda-1)^{n-2i+r}(c-1)^{i-r-2}g(\lambda)$,

$g(\lambda)=\lambda^3-(n-i+r+4)\lambda^2+(3n-3i+3r+4)\lambda-n$.

引理1.6 令$i\geq3$并且$a\geq b$.如果整数j,m和h满足$0\leq j\leq q$,$0\leq m\leq l$,$0\leq h\leq t$,并且$2j+m+h\neq0$,那么

$\rho(U_z(p,q,k,l,s,t))<\rho(U_z(p+j,q-j,k+m,l-m,s+h,t-h))$,$z=1,2,3,4$.

证明 令$\delta=2j+m+h$,则$\delta\geq1$.对$z=1,2,3,4$,计算得

$f_z(p,q,k,l,s,t)-f_z(p+j,q-j,k+m,l-m,s+h,t-h)=\Delta_z[(c-1)\delta+m][(a-b+\delta)(c-1)+m+k-l]$,

其中,$\Delta_1=\lambda$,$\Delta_2=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$,$\Delta_3=\lambda(\lambda^2-4\lambda+2)$,$\Delta_4=\lambda(\lambda-2)$.在$U_1(p+j,q-j,k+m,l-m,s+h,t-h)$中,$u$的度是$a+\delta+1$.由$i\geq3$知,$a\geq1$.于是由引理1.1(iii)得$\rho(U_1(p+j,q-j,k+m,l-m,s+h,t-h))\geq a+\delta+2\geq4$.因此,当$\lambda\geq\rho(U_1(p+j,q-j,k+m,l-m,s+h,t-h))$时,

$c=(\lambda-1)(\lambda-2)\geq(a+\delta+1)(a+\delta)\geq2(b+\delta+1)\geq2(l+\delta+1)$,

这表明$(a-b+\delta)(c-1)+m+k-l\geq c-1+m+k-l\geq2\delta+1>0$.因此,当$\lambda\geq\rho(U_1(p+j,q-j,k+m,l-m,s+h,t-h))$时,

$f_1(p,q,k,l,s,t)-f_1(p+j,q-j,k+m,l-m,s+h,t-h)>0$,

这表明对满足$0\leq j\leq q$,$0\leq m\leq l$,$0\leq h\leq t$,$2j+m+h\neq0$的整数j,m和h,当$\lambda\geq\rho(U_1(p+j,q-j,k+m,l-m,s+h,t-h))$时,都有

$\Phi(U_1(p,q,k,l,s,t))>\Phi(U_1(p+j,q-j,k+m,l-m,s+h,t-h))$.

因此,对满足$0\leq j\leq q$,$0\leq m\leq l$,$0\leq h\leq t$,$2j+m+h\neq0$的整数j,m和h,总有

$\rho(U_1(p,q,k,l,s,t))<\rho(U_1(p+j,q-j,k+m,l-m,s+h,t-h))$.

类似方法可以证明其它3个结论.引理1.6证明完毕.

引理1.7 如果$i\geq3$并且$U_j\ncong U^*_{n,i,r}$,则$\rho(U_j)<\rho(U^*_{n,i,r})$,$j=1,2,3,4$.

证明 不失一般性,假设$a\geq b$.由于$U^*_{n,i,r}$的最大度为$n-i+r$,于是由引理1.1(iii)得$\rho(U^*_{n,i,r})\geq n-i+r+1\geq i+r+1$.

(i)研究$U_1(p,q,k,l,s,t)$.此时,$p+q=r$.

如果$st=0$,则$k+l=i-r-1$,$s+t=n-2i$,$U_1(p+q,0,k+l,0,s+t,0)\cong U^*_{n,i,r}$.由于$U_1(p,q,k,l,s,t)\ncong U^*_{n,i,r}$,于是$2q+l+t\neq0$.由引理1.6得

$\rho(U_1(p,q,k,l,s,t))<\rho(U_1(p+q,0,k+l,0,s+t,0))=\rho(U^*_{n,i,r})$.

如果$st\neq0$,则$k+l=i-r-2$,$s+t=n-2i+2$,$U_1(p+q,0,k+l,0,s+t-1,1)\cong U^*_{n,i,r}$.由于$U_1(p,q,k,l,s,t)\ncong U^*_{n,i,r}$,于是$2q+l+t\geq2$.由引理1.6得

$\rho(U_1(p,q,k,l,s,t))<\rho(U_1(p+q,0,k+l,0,s+t-1,1))=\rho(U^*_{n,i,r})$.

(ii)研究$U_j(p,q,k,l,s,t)$,$j=2,3$.此时,$p+q=r-1$.以下分两种情形讨论.

情形1 假设$st=0$.此时,$k+l=i-r-1$,$s+t=n-2i$.一方面,由引理1.6得

$\rho(U_j(p,q,k,l,s,t))\leq\rho(U_j(p+q,0,k+l,0,$

$s+t,0))=d(U_j(r-1,0,i-r-1,0,n-2i,0))$.

另一方面,计算得

$$\varnothing(U_j(r-1,0,i-r-1,0,n-2i,0))-\varnothing(U^*_{n,i,r})=\frac{\lambda(\lambda-1)^{n-2i+r-2}h_{j1}}{(\lambda-3)^{-r+1}(c-1)^{-i+r+2}}.$$

$h_{21}=(\lambda^2-3\lambda+1)[(n-i+r-3)\lambda(\lambda-3)+(\lambda-1)(\lambda-4)+(n-4)]$.

$h_{31}=\lambda(\lambda-2)[(n-i+r-3)\lambda(\lambda-3)+(n-4)]$.

由于 $r\geqslant 1$ 并且 $n\geqslant 2i\geqslant 6$,于是当 $\lambda\geqslant d(U^*_{n,i,r})$ 时,容易证明 $h_{j1}(\lambda)>0$.因此,得

$$d(U_j(r-1,0,i-r-1,0,n-2i,0))<d(U^*_{n,i,r}).$$

由上面两方面的讨论知,当 $st=0$ 时, $d(U_j(p,q,k,l,s,t))<d(U^*_{n,i,r})$, $j=2,3$.

情形2 假设 $st\neq 0$. 此时, $k+l=i-r-2$, $s+t=n-2i+2$.

一方面,由引理1.6得

$$d(U_j(p,q,k,l,s,t))\leqslant d(U_j(p+q,0,k+l,0,s+t-1,1))=d(U_j(r-1,0,i-r-1,0,n-2i+1,1)).$$

另一方面,计算得

$$\varnothing(U_j(r-1,0,i-r-2,0,n-2i+1,1))-\varnothing(U^*_{n,i,r})=\frac{\lambda(\lambda-1)^{n-2i+r-1}h_{j2}}{(\lambda-3)^{-r+1}(c-1)^{-i+r+2}}.$$

$h_{22}=(\lambda-1)(\lambda-3)[(n-i+r-3)\lambda-2]+(n-6)(\lambda-1)$.

$h_{32}=\lambda[(n-i+r-4)\lambda(\lambda-3)+2(\lambda-4)+(n-1)]$.

由于 $r\geqslant 1$ 并且 $n\geqslant 2i\geqslant 6$,于是当 $\lambda\geqslant d(U^*_{n,i,r})$ 时,容易证明 $h_{j2}(\lambda)>0$.因此,得

$$d(U_j(r-1,0,i-r-2,0,n-2i+1,1))<d(U^*_{n,i,r}).$$

由上面两方面的讨论知,当 $st\neq 0$ 时, $d(U_j(p,q,k,l,s,t))<d(U^*_{n,i,r})$, $j=2,3$.

(iii)研究 $U_4(p,q,k,l,s,t)$.此时, $p+q=r-1$.

如果 $s+t\neq 0$,则

$k+l=i-r-1$, $s+t=n-2i+1$, $U_4(p+q,0,k+l,0,s+t,0)\cong U^*_{n,i,r}$.

由于 $U_4(p,q,k,l,s,t)\ncong U^*_{n,i,r}$,于是 $2q+l+t\neq 0$.由引理1.6得

$$d(U_4(p,q,k,l,s,t))<d(U_4(p+q,0,k+l,0,s+t,0))=d(U^*_{n,i,r}).$$

如果 $s+t=0$,则 $k+l=i-r$, $n=2i+1$.一方面,由引理1.6得

$$d(U_4(p,q,k,l,s,t))\leqslant d(U_4(p+q,0,k+l,0,0,0))=d(U_4(r-1,0,i-r,0,0,0)).$$

另一方面,计算得

$$\varnothing(U_4(r-1,0,i-r,0,0,0))-\varnothing(U^*_{2i+1,i,r})=\lambda^2(\lambda-3)^r(\lambda-1)^{r-1}(c-1)^{i-r-2}\Delta,$$

其中 $\Delta=(i+r-1)\lambda(\lambda-3)+2(i-1)$.当 $\lambda\geqslant d(U^*_{2i+1,i,r})$ 时,显然 $\Delta>0$.因此,得

$$d(U_4(r-1,0,i-r,0,0,0))<d(U^*_{2i+1,i,r}).$$

由上面两方面的讨论知, $d(U_4(p,q,k,l,s,t))<d(U^*_{n,i,r})$.引理1.7证明完毕.

引理1.8[6] 如果 $r\geqslant i\geqslant 1$ 并且 $G\in U(n,i,r)$,则 $i=r$, $n=2r+1$, G 的每个圈的长度都是3并且 G 的每个边都在圈上.

2 主要结果

定理2.1 令 $i\geqslant\max\{3,r+1\}$, $G\in U(n,i,r)$,则 $d(G)\leqslant(U^*_{n,i,r})$,并且等式成立,当且仅当 $G\cong U^*_{n,i,r}$,其中 $d(U^*_{n,i,r})$ 是方程

$$\lambda^3-(n-i+r+4)\lambda^2+(3n-3i+3r+4)\lambda-n=0 \qquad (5)$$

的最大根.

证明 令 G 的顶点集为 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, $d_G(v_1)\geqslant d_G(v_2)\geqslant\cdots\geqslant d_G(v_n)$.显然, $d(U^*_{n,i,r})$ 是 $g(\lambda)=0$,即(5)式的最大根.假设 $G\ncong U^*_{n,i,r}$, $d(G)\geqslant d(U^*_{n,i,r})$.

首先设 $i>r+1$.由于 $U^*_{n,i,r}$ 的最大度是 $n-i+r<n-1$,于是由引理1.1(iii)得 $d(U^*_{n,i,r})>n-i+r+1$.从而由引理1.1(ii)和引理1.5(i)得 $d_G(v_1)+d_G(v_2)=n-i+r+2$.再由引理1.5(ii)知,存在整数 p,q,k,l,s,t 和 $j\,(j=1,2,3,4)$,使 $G\cong U_j(p,q,k,l,s,t)$.于是由 $d(G)\geqslant d(U^*_{n,i,r})$ 和引理1.6知, $G\cong U^*_{n,i,r}$.这与 $G\ncong U^*_{n,i,r}$ 矛盾.

其次设 $i=r+1$.由于 $U^*_{n,i,r}$ 的最大度是 $n-i+r=n-1$,于是由引理1.1(iii)(i)和 $d(G)\geqslant d(U^*_{n,i,r})$ 知, $d(G)=d(U^*_{n,i,r})=n$ 并且 G 的补图不连通.由引理1.1(ii)和引理1.5(i)知, $d_G(v_1)+d_G(v_2)=n+1$ 或 $d_G(v_1)+d_G(v_2)=n$.从而由引理1.5(ii)或引理1.5(iii)知,存在整数 p,q,k,l,s,t 和 $j\,(j=1,2,3,4)$,使 $G\cong U_j(p,q,k,l,s,t)$;或存在整数 p,q,s,t 和 $j\,(j=1,2,3)$,使 $G\cong F_j(p,q,s,t)$. 显然, $F_j(p,q,s,t)$ 的补图连通,并且由 $G\ncong U^*_{n,i,r}$, $U_j(p,q,k,l,s,t)$ 的补图也连通,即 G 的补图连通.这与 G 的补图不连通矛盾.定理2.1证明完毕.

(下转第360页 Continue on page 360)

$$\begin{cases} x'(t) = -(8+\cos\sqrt{2}t)x(t) + \\ \quad \int_{-\infty}^{t} e^{-12(t-s)} \cdot |\cos t| \left(\frac{1}{8}x(s) - 1\right)\mathrm{d}s + \\ \quad \int_{-\infty}^{t} e^{-16(t-s)} \sin t x'(s)\mathrm{d}s,\ t \neq k\pi (k \in Z), \\ \Delta x(t) = \frac{-1}{2(1+8k)^4} x(t),\ t = k\pi. \end{cases} \quad (13)$$

容易验证定理1的条件对方程(13)都满足,从而方程(13)存在概周期解.

参考文献:

[1] 黄启昌.具有无限时滞的泛函微分方程的周期解的存在性[J].中国科学,1987,17A(3):242-252.

[2] 王全义.具有无限时滞的泛函微分方程周期解的存在惟一性和稳定性[J].数学年刊,1994,15A:537-545.

[3] 王全义.具有无穷时滞的积分微分方程周期解的存在性、惟一性及有界性[J].应用数学学报,1998,21(2):312-318.

[4] Chen Fengde, SUN Dexian. Periodic solution of scalar neutral Volterra integro-differential equations with infinite delay[J]. Ann of Diff Eqs, 2003, 19(3): 250-255.

[5] 常啸,朱家明.一类中立型积分微分方程的周期解[J].安徽大学学报,2006,30(3):17-19.

[6] Samoilenko A M, Perestyuk N A. Differential equations with impulse effect[M]. Kiev: Visca, Skola, 1987.

[7] Bainov D, Simeonov P. System with impulse effect: stability, theory and applications[M]. Chichester: Ellis Horwood, 1989.

[8] Stamov G T. Impulsive cellular neural networks and almost periodicity[J]. Proc Japan Acad, 2004, 80(A): 198-203.

(责任编辑:尹 闯)

(上接第356页 Continue from page 356)

在定理2.1中取 $r=0,1$,就能得到文献[5]的主要结论.另外,从(5)式容易发现 $d(U^*_{n,i,r})$ 关于 r 是严格单调递增并且关于 i 是严格单调递减的,因此,容易得到文献[3,4]关于谱半径最大值的结论.

定理 2.2 令 $r \geq i \geq 1$, $G \in U(n,i,r)$,则 $d(G) \leq 2r+1$,并且等式成立,当且仅当 $G \cong D(r)$.

证明 显然,结论对 $r=1$ 成立.下面假设 $r \geq 2$.对每个 $G \in U(n,i,r)$,由引理1.1(i)和引理1.8得 $d(G) \leq 2r+1$.

令 $G \in U(n,i,r)$ 并且 $d(G)=2r+1$.由引理1.1(i)知,G 的补图不连通.令 $u_1u_2\cdots u_s$ 是 G 的一个最长路,则 $s \geq 3$.假设 $s \geq 4$.由引理1.8知,u_1u_2 和 u_su_{s-1} 都在长为3的圈上.令 $u_1u_2vu_1$ 和 $u_su_{s-1}wu_s$ 分别是包含 u_1u_2 和 $u_{s-1}u_s$ 的圈.由于 G 的任两个圈都无公共边,于是在 G 中,u_1 和 v 都不邻接 $V(G)-\{u_1,u_2,v\}$ 中的顶点,而 u_s 和 w 都不邻接 $V(G)-\{u_{s-1},u_s,w\}$ 中的顶点.于是在 G 的补图中,u_1 和 v 都邻接 $V(G)-\{u_1,u_2,v\}$ 中的每个顶点;而 u_s 和 w 都邻接 $V(G)-\{u_{s-1},u_s,w\}$ 中的每个顶点.这表明 G 的补图是连通的,矛盾.因此,$s=3$,即 G 的最长路的长度为2.假设存在一个顶点 $\bar{u}$,它不与 u_2 邻接.如果 $\bar{u}$ 与 u_1 邻接,则由 $\bar{u}$ 与 u_2,u_3 都不邻接知,$\bar{u}u_1u_2u_3$ 是 G 的长为3的路,矛盾.如果 $\bar{u}$ 与 u_1 不邻接,记 $u_2v_1\cdots v_t\bar{u}$ $(t \geq 1)$ 为 u_2 到 $\bar{u}$ 的最长路,则 $u_1u_2v_1\cdots v_t\bar{u}$ 是长度至少为3的路,矛盾.由此表明,u_2 邻接 G 的所有顶点.既然 G 的每个边都在长度为3的圈上并且 G 的任两个圈没有公共边,于是 $G \cong D(r)$.显然,$D(r)$ 的补图不连通,由引理1.1(i)和引理1.8知,$d(D(r))=2r+1$.定理2.2证明完毕.

参考文献:

[1] Merris R. Laplacian matrices of graphs: A survery[J]. Linear Algebra Appl, 1994, 197&198: 143-176.

[2] 张晓东,李炯生.树的 Laplace矩阵的最大和次大特征值[J].中国科学技术大学学报,1998,25(5):513-518.

[3] 郭曙光.单圈图的 Laplacian矩阵的最大特征值[J].高校应用数学学报(A),2001,16(2):131-135.

[4] 邓汉元,徐立新.双圈图的 Laplace谱半径[J].湖南师范大学学报,2002,25(1):1-3.

[5] 谭尚旺,张德龙.给定阶与边独立数的树和单圈图的 Laplacian矩阵的最大特征值[J].应用数学,2003,16(3):167-174.

[6] 谭尚旺.两类图的谱半径[J].石油大学学报,2004,28(2):129-133.

(责任编辑:韦廷宗)