DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.04.010
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(4): 357~360

一类中立型脉冲积分微分方程的概周期解*

Almost Periodic Solutions to a Class of Neutral Impulsive Integrodifferential Equations

林远华 [1], 冯春华 [2]
LIN Yuan-hua[1], FENG Chun-hua[2]

(1.河池学院,广西宜州 546300; 2.广西师范大学,广西桂林 541004)
(1. Hechi University, Yizhou, Guangxi, 546300, China; 2. Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 利用压缩映射不动点定理,研究一类中立型脉冲积分微分方程的概周期解,给出该方程存在概周期解的一组充分条件.

关键词: 脉冲方程 概周期解 不动点定理
中图法分类号: O175.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)04-0357-04

Abstract With respect to the almost periodic solutions to a class of neutral impulsive integrodifferential equations, a study is made on their existence by means of the contraction mapping principle. Sufficient conditions are given to the almost periodic solutions of these equations for ensuring their existence under some assumptions.

Key words impulsive equation, almost periodic solution, the fixed point theorem

近年来,微分方程周期解的研究引起了学者们的极大关注.文献[1]构造了适当的 Lyapunov泛函,得到方程

$$x'(t)=a(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)x(s)\mathrm{d}s+f(t) \quad (1)$$

周期解存在的充分条件.文献[2]运用不动点定理,在较弱的条件下得到方程(1)周期解的存在唯一性.文献[3,4]研究中立型标量 Volterra积分微分方程

$$x'(t)=a(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)x(s)\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^{t}D(t,s)x'(s)\mathrm{d}s+f(t) \quad (2)$$

周期解的存在唯一性问题.文献[5]将文献[4]中的问题推广到 n 维情形,即考虑方程

$$x'(t)=A(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)x(s)\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^{t}D(t,s)x'(s)\mathrm{d}s+b(t) \quad (3)$$

的周期解.本文考虑中立型概周期脉冲方程

$$\begin{cases} x'(t)=A(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)f(x(s))\mathrm{d}s+ \\ \quad \int_{-\infty}^{t}D(t,s)x'(s)\mathrm{d}s, \quad t\neq t_k, t_k<t_{k+1}, \\ \Delta x(t)=B_k x(t)+I_k(x(t)), \quad t=t_k \end{cases} \quad (4)$$

概周期解的存在性.其中 $x\in R^n$, $A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$, $C(t,s)$, $D(t,s)$ 均为 $n\times n$ 函数矩阵, f, I_k 均是向量函数, B_k 是矩阵, $\Delta x(t)=x(t^+)-x(t^-)$, $x(t)=x(t^-)$, I_k: $R^n\to R^n$.在适当的假设条件下,建立了脉冲方程(4)概周期解的存在性定理.因为周期函数是概周期函数的特例,那么即使在脉冲效应消失的情况下,我们也推广了相关的已知结果.

1 预备知识

假设 B 表示所有严格递增序列 $\{t_k\}$ 构成的集合, $B=\{t_k: t_k<t_{k+1}, \lim_{k\to\pm\infty}t_k=\pm\infty\}$. $PC(R,R^n)$ 表示所有分段连续函数构成的集合.

定义 1[6] 函数 $h(t)\in PC(R,R^n)$ 是概周期的,如果下述条件成立:

收稿日期: 2008-05-24
修回日期: 2008-07-11
作者简介: 林远华(1964-),男,副教授,主要从事微分方程研究工作。
* 广西教育厅科研基金项目(200708LX163)资助。

(i)序列 $\{t_k\}\in B$ 是一致概周期的,即对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $q\in Z$,使得 $|t_{k+q}-t_k|<\varepsilon$.

(ii)对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$ 使得如果 t',t'' 属于 $\varphi(t)$ 的同一个连续区间,且满足 $|t'-t''|<\delta$,则 $|\varphi(t')-\varphi(t'')|<\varepsilon$.

(iii)对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个相对紧集 Q,使得 $\tau\in Q$,就有 $|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)|<\varepsilon$,其中 $t\in R$ 且满足 $|t-t_k|>\varepsilon$.

考虑方程

$$\begin{cases} x'(t)=A(t)x(t), & t\neq t_k,\quad t_k<t_{k+1}, \\ \Delta x(t)=B_kx(t), & t=t_k, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} x'(t)=A(t)x(t)+p(t), & t\neq t_k,\quad t_k<t_{k+1}, \\ \Delta x(t)=B_kx(t)+\gamma_k, & t=t_k. \end{cases} \tag{6}$$

其中 $A(t)$ 为 $n\times n$ 概周期矩阵函数,$p(t)$ 为概周期向量,B_k 是 $n\times n$ 概周期常数矩阵,即对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在自然数 q 使得 $\|B_{k+q}-B_k\|<\varepsilon$,并且行列式 $|E+B_k|\neq 0$. γ_k 也是概周期的,即对上述 $\varepsilon>0$,存在相同自然数 q 使得 $\|\gamma_{k+q}-\gamma_k\|<\varepsilon$.

如果 $U_k(t,s)$ 表示系统 $x'(t)=A(t)x(t)$,$t_{k-1}<t\leqslant t_k$ 的柯西矩阵,那么方程(5)的柯西矩阵[7]为

$$W(t,s)=\begin{cases} U_k(t,s),\ t_{k-1}<s\leqslant t\leqslant t_k, \\ U_{k+1}(t,t_k^+)(E+B_k)U_k(t,s),\ t_{k-1}<s\leqslant t_k<t\leqslant t_{k+1}, \\ U_{k+1}(t,t_k^+)(E+B_k)U_k(t_k,t_k^+)\cdots(E+B_i)U_i(t_i,s), \\ \quad t_{i-1}<s\leqslant t_i<t\leqslant t^{k+1}. \end{cases} \tag{7}$$

而且方程(5)的解可以表示为 $x(t;t_0,x_0)=W(t,s)x_0$.

引理 1[6] 假设 $W(t,s)$ 是脉冲概周期系统(5)的柯西矩阵,$p(t)$,γ_k 均是概周期向量,$A(t)$ 为概周期矩阵函数,B_k 是概周期常数矩阵且行列式 $|E+B_k|\neq 0$,则方程(6)存在惟一的概周期解,并且可以表示为

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}W(t,s)p(s)\mathrm{d}s+\sum_{k=\infty}^{\infty}W(t,t_k^+)\gamma_k. \tag{8}$$

引理 2 假设 $X(t)$ 是方程(5)的基本解矩阵,$\mu(A(t))$ 表示矩阵 $A(t)$ 的测度,则有

$$\|X(t)X^{-1}(s)\|\leqslant \exp\left(\int_s^t\mu(A(\tau))\mathrm{d}\tau\right),\ t\geqslant s. \tag{9}$$

证明 注意到矩阵测度的一个等价定义:$\mu(A(t))=\max\limits_j\{\mathrm{Re}(a_{jj}(t))+\sum\limits_{\neq j}|a_{ij}(t)|\}$,再由文献[3]中引理 3.1,可以得出引理 2 成立.

引理 3[8] 对方程(5)的柯西矩阵 $W(t,s)$,如果存在正数 α,β 使得

$$\|W(t,s)\|\leqslant\beta e^{-\alpha(t-s)},\ t\geqslant s,$$

则对任意 $\varepsilon>0$,当 $t\geqslant s$,$|t-t_k|>\varepsilon$,$|s-t_k|>\varepsilon$ 时,对 $\tau\in Q$,存在正常数 Γ 使得

$$\|W(t+\tau,s+\tau)-W(t,s)\|\leqslant\varepsilon\Gamma e^{-\frac{\alpha}{2}(t-s)}.$$

2 主要结果

给出条件:

(Ⅰ)$A(t)$ 是概周期的,即 $\|A(t+\tau)-A(t)\|<\varepsilon$,$\mu(A(t))$ 表示矩阵 $A(t)$ 的测度且有 $\mu(A(t))\leqslant a(t)\leqslant -K<0$,其中 $a(t)$ 是概周期函数,$\mu(A)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\|E+hA\|-1}{h}$($E$ 为与矩阵 A 同维的单位矩阵).

(Ⅱ)矩阵 B_k 是概周期的,即 $\|B_{k+q}-B_k\|<\varepsilon$,其中 q 是某个自然数,并且行列式 $|E+B_k|\neq 0$,这里 E 是单位矩阵.

(Ⅲ)$C(t,s)$,$D(t,s)$ 是概周期的,即 $\|C(t+\tau,s+\tau)-C(t,s)\|<\varepsilon$,$\|D(t+\tau,s+\tau)-D(t,s)\|<\varepsilon$,对任意 $t\in R$ 有 $\int_{-\infty}^t\|C(t,s)\|\mathrm{d}s\leqslant m_1<+\infty$,$\int_{-\infty}^t\|D(t,s)\|\mathrm{d}s\leqslant m_2<+\infty$.

(Ⅳ)$f(x)$ 满足 Lipschitz 条件,即存在常数 L_1,使得对 R^n 上任意两点 x_1 和 x_2 都有 $\|f(x_1)-f(x_2)\|<L_1\|x_1-x_2\|$ 且 $f(0)=0$.

(Ⅴ)常数 $K>L_1$,并且有 $a(t)+K\left(\int_{-\infty}^t\|C(t,s)\|\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^t\|D(t,s)\|\mathrm{d}s\right)\leqslant 0$. 这里 $a(t)$ 满足条件(Ⅰ).

(Ⅵ)函数 $I_k(x)$ 是概周期的,即对任意的 $\varepsilon>0$ 存在 $q\in Z$,使得 $\|I_{k+q}(x)-I_k(x)\|<\varepsilon$,同时对 R^n 上任意两点 x_1 和 x_2,存在 $L_2>0$ 使得 $\|I_k(x_1)-I_k(x_2)\|<L_2\|x_1-x_2\|$. 其中常数 L_2 满足 $\dfrac{L_1}{K}+\dfrac{L_2}{1-e^{-K\theta}}<1$,$\theta=\inf\limits_{k\in Z}\{t_{k+1}-t_k:t_k\in B\}$.

定理 1 假设条件(Ⅰ)~(Ⅵ)成立,则方程(4)存在概周期解.

证明 由脉冲方程理论,脉冲点函数的左极限存在.假设 $x(t_k)=x(t_k^-)$,一般来说,在脉冲点函数的导数是不存在的,但是其左极限存在.为方便起见,也记 $x'(t_k)=x'(t_k^-)$.类似于文献[8],用 D 表示所有属于 PC 的概周期函数 $u(t)$,($u(t)$ 的导数也是概周期函数,在脉冲点 t_k 处成立 $u(t_k)=u(t_k^-)$,$u'(t_k)=u'(t_k^-)$)所构成的集合,其范数定义为 $\|u\|=\|u\|_0+\|u\|_1$,其中 $\|u\|_0=\sup_{t\in R}|u(t)|$,$\|u\|_1=$

$\sup_{t\in R}|u'(t)|$,且 $\|u\|<R_0$.这里 R_0 是某个正常数(可以取到充分大).在 D 中定义算子 T 为

$$Tu(t)=\int_{-\infty}^{t} W(t,s)[\int_{-\infty}^{s} C(s,\theta)f(u(\theta))\mathrm{d}\theta+\int_{-\infty}^{s} D(s,\theta)u'(\theta)\mathrm{d}\theta]\mathrm{d}s+\sum_{t_k<t} W(t,t_k^{+})I_k(u(t_k)),$$

则对任意的 $u\in D$,并注意到条件(Ⅵ),有

$$\|Tu\|=\|\int_{-\infty}^{t} W(t,s)(\int_{-\infty}^{s} C(s,\theta)f(u(\theta))\mathrm{d}\theta+\int_{-\infty}^{s} D(s,\theta)u'(\theta)\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}s+\sum_{t_k<t} W(t,t_k^{+})I_k(u(t_k))\|\le$$
$$\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{s}^{t}a(r)\mathrm{d}r)(\int_{-\infty}^{s}\|C(s,\theta)\|\cdot\|f(u(\theta))\|\mathrm{d}\theta+\int_{-\infty}^{s}\|D(s,\theta)\|\cdot\|u\|_1\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}s+\sum_{t_k<t}\exp(\int_{t_k^{+}}^{t}a(r)\mathrm{d}r)\|I_k(u(t_k))\|\le$$
$$L_1\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{s}^{t}a(r)\mathrm{d}r)(\int_{-\infty}^{s}\|C(s,\theta)\|\mathrm{d}\theta+\int_{-\infty}^{s}\|D(s,\theta)\|\mathrm{d}\theta)\|u\|\mathrm{d}s+\sum_{t_k<t}\exp(\int_{t_k^{+}}^{t}a(r)\mathrm{d}r)\|I_k(u(t_k))\|\le$$
$$L_1\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{s}^{t}a(r)\mathrm{d}r)(-\frac{a(s)}{K})\|u\|\mathrm{d}s+\frac{L_2}{1-e^{-K\theta}}\|u\|=(\frac{L_1}{K}+\frac{L_2}{1-e^{-K\theta}})\|u\|<R_0. \qquad (10)$$

对 $u\in D$, $\omega\in Q$,又有

$$\|Tu(t+\omega)-Tu(t)\|=\sup_{t\in R}\|\int_{-\infty}^{t+\omega} W(t+\omega,s)\cdot(\int_{-\infty}^{s} C(s,\theta)f(u(\theta))\mathrm{d}\theta+\int_{-\infty}^{s} D(s,\theta)u'(\theta)\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}s+$$
$$\sum_{t_k<t+\omega}W(t+\omega,t_k^{+})I_k(u(t_k))-\int_{-\infty}^{t} W(t,s)\cdot(\int_{-\infty}^{s} C(s,\theta)f(u(\theta))\mathrm{d}\theta-\int_{-\infty}^{s} D(s,\theta)u'(\theta)\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}s-$$
$$\sum_{t_k<t}W(t,t_k^{+})I_k(u(t_k))\|=\sup_{t\in R}\|\int_{-\infty}^{t} W(t+\omega,s+\omega)\cdot(\int_{-\infty}^{s} C(s+\omega,\theta+\omega)f(u(\theta+\omega))\mathrm{d}\theta+\int_{-\infty}^{s} D(s+\omega,\theta+\omega)u'(\theta+\omega)\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}s+\sum_{t_k<t}W(t+\omega,t_{k+q}^{+})I_{k+q}(u(t_{k+q}))-$$
$$\int_{-\infty}^{t} W(t,s)(\int_{-\infty}^{s} C(s,\theta)f(u(\theta))\mathrm{d}\theta-\int_{-\infty}^{s} D(s,\theta)u'(\theta)\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}s-\sum_{t_k<t}W(t,t_k^{+})I_k(u(t_k))\|\le\sup(\int_{-\infty}^{t}\|W(t+\omega,s+\omega)-$$
$$W(t,s)\|(\int_{-\infty}^{s}\|C(s+\omega,\theta+\omega)f(u(\theta+\omega))\|\mathrm{d}\theta+\int_{-\infty}^{s}\|D(s+\omega,\theta+\omega)u'(\theta+\omega)\|\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}s+$$
$$\int_{-\infty}^{t}\|W(t,s)\|\int_{-\infty}^{s}\|C(s+\omega,\theta+\omega)-C(s,\theta)\|\cdot\|f(u(\theta+\omega))\|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^{t}\|W(t,s)\|\int_{-\infty}^{s}\|D(s+\omega,\theta+\omega)-D(s,\theta)\|\cdot\|u'(\theta+\omega)\|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s+$$
$$\int_{-\infty}^{t}\|W(t,s)\|\int_{-\infty}^{s}\|C(s,\theta)\|\cdot\|f(u(\theta+\omega))-f(u(\theta))\|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^{t}\|W(t,s)\|\int_{-\infty}^{s}\|D(s,\theta)\|\cdot\|u'(\theta+\omega)-u'(\theta)\|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s+$$
$$\sum_{t_k<t}\|W(t+\omega,t_{k+q}^{+})-W(t,t_k^{+})\|\cdot\|I_{k+q}(u(t_{k+q}))\|+\sum_{t_k<t}\|W(t,t_k^{+})\|\cdot\|I_{k+q}(u(t_{k+q}))-I_k(u(t_k))\|\}<\varepsilon M. \qquad (11)$$

其中正常数 $M=(\Gamma+\frac{1}{K})(L_1+1)R_0+\frac{m_1L_1+m_2}{K}+\frac{L_2\Gamma+1}{1-e^{-K\theta}}$.由于 ε 是充分小正数,故 εM 仍然是任意小正数,因此,$T(D)\subset D$. 又因为对任意 $u,v\in D$,有

$$\|Tu-Tv\|=\|\int_{-\infty}^{t} W(t,s)(\int_{-\infty}^{s} C(s,\theta)[f(u(\theta))-f(v(\theta))]\mathrm{d}\theta+\int_{-\infty}^{s} D(s,\theta)[u'(\theta)-v'(\theta)]\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}s+\sum_{t_k<t}W(t,t_k^{+})[I_k(u(t_k))-$$
$$I_k(v(t_k))]\|\le\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{s}^{t}a(r)\mathrm{d}r)(\int_{-\infty}^{s}\|C(s,\theta)\|\cdot\|f(u(\theta))-f(v(\theta))\|\mathrm{d}\theta+\int_{-\infty}^{t}\|D(s,\theta)\|\cdot\|u-v\|_1\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}s+$$
$$\sum_{t_k<t}\exp(\int_{t_k^{+}}^{t}a(r)\mathrm{d}r)\|I_k(u(t_k))-I_k(v(t_k))\|\le L_1\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{s}^{t}a(r)\mathrm{d}r)(\int_{-\infty}^{s}\|C(s,\theta)\|+\int_{-\infty}^{s}\|D(s,\theta)\|)\mathrm{d}\theta\|u-v\|\mathrm{d}s+$$
$$\sum_{t_k<t}\exp(\int_{t_k^{+}}^{t}a(r)\mathrm{d}r)\|I_k(u(t_k))-I_k(v(t_k))\|\le L_1\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{s}^{t}a(r)\mathrm{d}r)(-\frac{a(s)}{K})\|u-v\|\mathrm{d}s+$$
$$\frac{L_2}{1-e^{-K\theta}}\|u-v\|=(\frac{L_1}{K}+\frac{L_2}{1-e^{-K\theta}})\|u-v\|. \qquad (12)$$

由条件(Ⅵ)知道 T 是 D 上的压缩映射,从而方程(4)在 D 中存在概周期解.

考虑概周期脉冲方程

$$
\begin{cases}
x'(t) = -(8+\cos\sqrt{2}t)x(t) + \\
\quad \int_{-\infty}^{t} e^{-12(t-s)} \cdot |\cos t| \left(\frac{1}{8}x(s) - 1\right)\mathrm{d}s + \\
\quad \int_{-\infty}^{t} e^{-16(t-s)} \sin t x'(s)\mathrm{d}s,\ t \neq k\pi (k \in Z), \\
\Delta x(t) = \frac{-1}{2(1+8k)^4} x(t),\ t = k\pi.
\end{cases} \tag{13}
$$

容易验证定理 1的条件对方程(13)都满足,从而方程(13)存在概周期解.

参考文献:

[1] 黄启昌.具有无限时滞的泛函微分方程的周期解的存在性 [J].中国科学,1987, 17A(3): 242-252.

[2] 王全义.具有无限时滞的泛函微分方程周期解的存在惟一性和稳定性 [J].数学年刊,1994, 15A: 537-545.

[3] 王全义.具有无穷时滞的积分微分方程周期解的存在性、惟一性及有界性 [J].应用数学学报,1998, 21(2): 312-318.

[4] Chen Fengde, SUN Dexian. Periodic solution of scalar neutral Volterra integro-differential equations with infinite delay [J]. Ann of Diff Eqs, 2003, 19(3): 250-255.

[5] 常啸,朱家明.一类中立型积分微分方程的周期解 [J].安徽大学学报, 2006, 30(3): 17-19.

[6] Samoilenko A M, Perestyuk N A. Differential equations with impulse effect [M]. Kiev: Visca, Skola, 1987.

[7] Bainov D, Simeonov P. System with impulse effect: stability, theory and applications [M]. Chichester: Ellis Horwood, 1989.

[8] Stamov G T. Impulsive cellular neural networks and almost periodicity [J]. Proc Japan Acad, 2004, 80(A): 198-203.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第356页 Continue from page 356)

在定理2.1中取 $r=0,1$,就能得到文献[5]的主要结论.另外,从(5)式容易发现 $\mathrm{d}(U^{*}_{n,i,r})$关于 r是严格单调递增并且关于 i是严格单调递减的,因此,容易得到文献[3,4]关于谱半径最大值的结论.

定理 2.2 令 $r\geqslant i\geqslant 1$, $G\in U(n,i,r)$,则 $\mathrm{d}(G)\leqslant 2r+1$,并且等式成立,当且仅当 $G\cong D(r)$.

证明 显然,结论对 $r=1$成立.下面假设 $r\geqslant 2$.对每个 $G\in U(n,i,r)$,由引理1.1(i)和引理1.8得 $\mathrm{d}(G)\leqslant 2r+1$.

令 $G\in U(n,i,r)$并且 $\mathrm{d}(G)=2r+1$.由引理1.1(i)知,G的补图不连通.令 $u_1u_2\cdots u_s$是 G的一个最长路,则 $s\geqslant 3$.假设 $s\geqslant 4$.由引理1.8知,u_1u_2和 u_su_{s-1}都在长为3的圈上.令 $u_1u_2vu_1$和 $u_su_{s-1}wu_s$分别是包含 u_1u_2和 $u_{s-1}u_s$的圈.由于 G的任两个圈都无公共边,于是在 G中,u_1和 v都不邻接 $V(G)-\{u_1,u_2,v\}$中的顶点,而 u_s和 w都不邻接 $V(G)-\{u_{s-1},u_s,w\}$中的顶点.于是在 G的补图中,u_1和 v都邻接 $V(G)-\{u_1,u_2,v\}$中的每个顶点;而 u_s和 w都邻接 $V(G)-\{u_{s-1},u_s,w\}$中的每个顶点.这表明 G的补图是连通的,矛盾.因此,$s=3$,即 G的最长路的长度为2.假设存在一个顶点 $\bar{u}$,它不与 u_2邻接.如果 $\bar{u}$与 u_1邻接,则由 $\bar{u}$与 u_2,u_3都不邻接知,$\bar{u}u_1u_2u_3$是 G的长为3的路,矛盾.如果 $\bar{u}$与 u_1不邻接,记 $u_2v_1\cdots v_t\bar{u}\ (t\geqslant 1)$为 u_2到 $\bar{u}$的最长路,则 $u_1u_2v_1\cdots v_t\bar{u}$是长度至少为3的路,矛盾.由此表明,$u_2$邻接 G的所有顶点.既然 G的每个边都在长度为3的圈上并且 G的任两个圈没有公共边,于是 $G\cong D(r)$.显然,$D(r)$的补图不连通,由引理1.1(i)和引理1.8知,$\mathrm{d}(D(r))=2r+1$.定理2.2证明完毕.

参考文献:

[1] Merris R. Laplacian matrices of graphs: A survery [J]. Linear Algebra Appl, 1994, 197&198: 143-176.

[2] 张晓东,李炯生.树的 Laplace矩阵的最大和次大特征值 [J].中国科学技术大学学报,1998, 25(5): 513-518.

[3] 郭曙光.单圈图的 Laplacian矩阵的最大特征值 [J].高校应用数学学报(A), 2001, 16(2): 131-135.

[4] 邓汉元,徐立新.双圈图的 Laplace谱半径 [J].湖南师范大学学报, 2002, 25(1): 1-3.

[5] 谭尚旺,张德龙.给定阶与边独立数的树和单圈图的 Laplacian矩阵的最大特征值 [J].应用数学, 2003, 16(3): 167-174.

[6] 谭尚旺.两类图的谱半径 [J].石油大学学报, 2004, 28(2): 129-133.

(责任编辑: 韦廷宗)