DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.04.012

广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(4): 364-366

加权 Hardy空间上复合算子的伴随算子的循环性质

Cyclic Behavior for Adjoint Operators of Composition Operators on the Weighted Hardy Space

吴树宏

WU Shu-hong

(武汉理工大学理学院数学系,湖北武汉 430070)

(Department of Mathematics, School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan, Hubei, 430070, China)

摘要:讨论加权 Hardy空间上复合算子的伴随算子的循环性质,给出 $cv(C_\varphi^*)$ 在 $H^2(\omega)$ 中稠密的 2个充分条件及 C_φ^* 在 $H^2(\omega)$ 中循环的 1个充分条件.

关键词:复合算子 循环性质 加权 Hardy空间

中图法分类号:O177.2 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2008)04-0364-03

Abstract The cyclic behaveor of adjoint operators of composition operators on the weighted Hardy space have been discussed in this paper, two sufficient conditions of dense of cv (C_φ^*) in $H^2(\omega)$ and one sufficient condition of cyclic of (C_φ^*) in $H^2(\omega)$ are given.

Key words composition operator, cyclic behavior, weighted Hardy space

设 D为复平面 C上以零点为圆心的单位圆盘, $H(D)$为 D上的所有解析函数组成的空间,设 $f(z), g(z)\in H(D)$, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$. 对固定的 $k\in N\cup\{0\}$,令 $\|f\|_\omega^2=\sum_{n=0}^{\infty}|f_n|^2\omega^2(n)$, $\langle f,g\rangle_\omega=\sum_{n=0}^{\infty} f_n\overline{g_n}\omega^2(n)$,此处 $\omega^2(n)=\frac{n!}{(n+k)!}$ $(n\in N\cup\{0\})$.设 $H^2(\omega)=\{f\in H(D): \|f\|_\omega<+\infty\}$.容易证明 $\|\cdot\|_\omega$ 为 $H^2(\omega)$ 的范数并且使得 $H^2(\omega)$成为 Hilbert空间.我们称 $H^2(\omega)$为加权 Hardy空间. Hardy空间和 Bergman空间均为加权 Hardy空间的特例.

设解析映射 $\varphi: D\to D$,复合算子 C_φ为 $C_\varphi f=f\circ\varphi$, $\forall f\in H(D)$.又设 B为复可分无穷维 Banach空间, T为 B上的线性算子.对于 $x\in B$, x在 T作用下的轨道集为 $\mathrm{Orb}(T,x)=\{x, Tx, T^2x,\cdots,\}$. T称为循环的,若有向量 $x\in B$(称为循环向量)满足 $\mathrm{Orb}(T,x)$的闭线性包为 B,即 $\overline{\mathrm{span}}[\mathrm{Orb}(T,x)]=B$.由 T的所有循环向量组成之集记为 $cv(T)$. T称为超循环的,若有向量 $x\in B$(称为超循环向量)满足 $\mathrm{Orb}(T,x)$的闭包为 B,即 $\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}=B$.本文讨论加权 Hardy空间上的复合算子的伴随算子的循环性质,将文献[1]的结论推广到加权 Hardy空间,并补充了几种特殊情况下的结论.文中所有的记号均参考文献[1].

1 几个引理

引理 1.1 $H^2(\omega)$中的再生核为

$$K_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{k}^n(n+k)!\,z^n}{n!}=\frac{k!}{(1-\bar{k}z)^{k+1}}.$$

引理 1.2 对 $k\in N$,有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}T_k\int_0^{T_k}\mathrm{d}T_{k-1}\cdots\int_0^{T_2}\mathrm{d}T_1\cdot\int_0^{2\pi}|f(T_1e^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta\leqslant\|f\|_\omega^2,$$

$$\|f\|_\omega^2\leqslant\frac{2^k}{2\pi}\int_0^1\mathrm{d}T_k\int_0^{T_k}\mathrm{d}T_{k-1}\cdots\int_0^{T_2}\mathrm{d}T_1\cdot\int_0^{2\pi}|f(T_1e^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta.$$

收稿日期:2008-01-27

作者简介:吴树宏(1963-),男,副教授,主要从事泛函分析方面的研究工作。

证明 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, 则

$$\frac{1}{2c}\int_0^1 dT_k\int_0^{T_k} dT_{k-1}\cdots\int_0^{T_2} dT_1\cdot \int_0^{2c}|f(T_1e^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^1 dT_k\int_0^{T_k}dT_{k-1}\cdots \int_0^{T_2}\sum_{n=0}^\infty |f_n|^2T_1^{2n}dT_1 = \sum_{n=0}^\infty |f_n|^2 \frac{1}{(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+k)}.$$

再由

$$\|f\|_U^2=\sum_{n=0}^\infty |f_n|^2\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)},$$

即可以得出结论.

由引理1.2,按文献[2]中定理10.3.2的证明过程,有

引理1.3 若 h为D上的解析自映射,则 C_h 为 H_U^2 上的有界算子.

2 主要结论

为了书写方便,对于解析自映射 $h: D\to D$,记 $h_p(z)=\underbrace{h\circ\cdots\circ h}_{p}(z), p\geq 1$.

定理2.1 若 $h: D\to D$ 为解析自映射, 则

(1) C_h^* 不是超循环的.

(2) 若 a 为 h的 Denjoy-Wolff点,则满足: (i) h 非椭圆型自同构且 $a\in D$, $h'(a)\neq 0$, 或者 (ii) h为椭圆型自同构且不存在 $n\in N$ 满足 $h_n(z)=z$, $z\in D$, 那么 cv(C_h^*)在 $H^2(U)$中稠密.

(3) 当 $a\in D$, $h'(a)=0$, $h(z)\not\equiv a$, $z\in D$时, C_h^* 在 $H^2(U)$中循环.

(4) 满足下列条件之一时, C_h^* 在 $H^2(U)$中非循环. 1)存在 $n\in N$ 满足 $h_n(z)=z$, $z\in D$; 2) $a\in\partial D$, $h'(a)<1$; 3)存在D上的解析自映射 e,使得 $H\circ h=e\circ h$, 其中 $H(z)=[(1\pm 2i)z-1][z-1\pm 2i]^{-1}$; 4) h为内函数, h不是自同构, $a\in\partial D$.

证明 由引理1.3知 C_h 为 $H^2(U)$ 上的有界线性算子,从而 C_h^* 存在并且是 $H^2(U)$ 上的有界线性算子.注意 Hardy空间中的元均为 $H^2(U)$中的元,故文献[3]中有关 Hardy空间中复合算子点谱的结论在 $H^2(U)$ 中也成立.

(1) 因为 $C_h 1=1$,所以 C_h^* 非超循环[4].

(2) 若(i)成立. 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, $f\in H^2(U)$. 对 $p\geq 1$, $K_k(z)$ 的 p阶导数为

$$K_k^{(p)}(z)=\frac{(k+p)!\,\bar{k}^p}{(1-\bar{k}z)^{k+p+1}} = \bar{k}^p (p+k)!\sum_{n=0}^\infty \binom{n+p+k}{p+k}\bar{k}^n z^n.$$

因为

$$\|K_a^{(p)}\|_U^2=\sum_{n=0}^\infty \frac{(n+k+p)!^2|a|^{2(p+n)}}{n!(n+k)!}\leq |a|^{2p}\sum_{n=0}^\infty\frac{(n+k+p)!}{(n+k)!}\cdot\frac{(n+2k+2p)!}{(n+k+p)!}|a|^{2n}\leq |a|^{2p-2k}\sum_{n=0}^\infty\frac{(n+k+2p)!}{n!}|a|^{2n} = |a|^{2p-2k}\left[\frac{1}{1-z}\right]^{(k+2p)}\Big|_{z=|a|^2}<\infty,$$

故 $K_w^{(p)}\in H^2(U)$. 又由于

$$\langle f,K_k^{(p)}\rangle_U=\sum_{n=0}^\infty f_n k^{n+p}\frac{(n+p+k)!}{(n+k)!} = k^p\sum_{n=0}^\infty f_n k^n\frac{(n+p+k)!}{(n+k)!} = k^{p-k}\sum_{n=0}^\infty f_n (z^{n+p+k})^{(p)}\Big|_{z=k} = k^{p-k}[z^{p+k}f(z)]^{(p)}\Big|_{z=k} =$$

$$k^{p-k}\sum_{q=0}^p\binom{p}{q} f^{(p-q)}(z)(z^{p+k})^{(q)}\Big|_{z=k} = k^{p-k}\sum_{q=0}^p\binom{p}{q} f^{(p-q)}(k)\frac{(p+k)!}{(p+k-q)!}k^{p+k-q} = k^{p-k}\sum_{q=0}^p \binom{p}{q} f^{(q)}(k)\frac{(p+k)!}{(q+k)!}k^{q+k}.$$

$\langle f,K_a^{(p)}\rangle_U=0$当且仅当 $f^{(p)}(a)=0\ (\forall p\geq 0)$,即当且仅当 $f(z)\equiv 0$. 此时 $\overline{\mathrm{span}}\{K_a^{(p)},p\geq 0\}=H^2(U)$. 那么存在 $c_{p,t}$ 及 $d_{p,t}$, $t=0,1,2,\cdots,p$, 此处 $c_{p,p}=1$, $d_{p,p}=[h'(a)]^p$, 满足

$$[f(h(z))]^{(p)}\Big|_{z=a}=\sum_{t=0}^p c_{p,t}f^{(t)}(a)[h'(a)]^t,$$

$$\sum_{t=q}^p \frac{(t+k)!\,t!}{(q+k)!\,q!\,(t-q)!}a^q d_{p,t} = \sum_{t=q}^p\frac{(p+k)!\,p!}{(t+k)!\,t!\,(p-t)!}[h'(a)]^q a^p c_{t,q}.$$

此时还有

$$\langle f, C_h^* K_a^{(p)}\rangle_U=\langle f\circ h, K_a^{(p)}\rangle_U = a^{p-k}\sum_{q=0}^p\binom{p}{q}\cdot [f(h(z))]^{(q)}\frac{(p+k)!}{(q+k)!}a^{q+k}\Big|_{z=a} = a^{p-k}\sum_{q=0}^p\binom{p}{q}\cdot$$

$$\sum_{t=0}^q c_{q,t}f^{(t)}(a)[h'(a)]^t\frac{(p+k)!}{(q+k)!}a^{q+k} = a^{p-k}\sum_{t=0}^p f^{(t)}(a)\sum_{q=t}^p\binom{p}{q} c_{q,t}[h'(a)]^t\frac{(p+k)!}{(q+k)!}a^{q+k}= a^{p-k}\sum_{q=0}^p f^{(q)}(a)\cdot$$

$\sum_{t=q}^{p}\binom{p}{t}c_{t,q}[h'(a)]^{q}\frac{(p+k)!}{(t+k)!}a^{t+k}=\sum_{q=0}^{p}f^{(q)}(a)\cdot$

$\sum_{t=q}^{p}d_{p,t}\binom{t}{q}\frac{(t+k)!}{(q+k)!}a^{q+t}=\sum_{t=0}^{p}d_{p,t}a^{t-k}\cdot$

$\sum_{q=0}^{t}\binom{t}{q}f^{q}(a)\frac{(t+k)!}{(q+k)!}a^{q+k}=\sum_{t=0}^{p}d_{p,t}\langle f,K_a^{(t)}\rangle_U=$

$\langle f,\sum_{t=0}^{p}\bar d_{p,t}K_a^{(t)}\rangle_U$,

故 $C_h^*K_a^{(p)}(z)=\sum_{t=0}^{p}\bar d_{p,t}K_a^{(t)}(z)$.

设 $R=(r_{p,q})$ 为无穷下三角距阵,此处当 $p<q$ 时 $r_{p,q}=0$,当 $p\geqslant q$ 时 $r_{p,q}=\bar d_{p,q}$.则 $[\overline{h'(a)}]^n(n\geqslant 0)$ 为 R^T 的特征值.事实上,存在 $l_n=(l_{n,0},l_{n,1},\cdots,l_{n,n},0,\cdots)$,$l_{n,n}=1$ 满足 $R^Tl_n^T=[\overline{h'(a)}]^nl_n^T$.设 $S_n(z)=\sum_{p=0}^{n}l_{n,p}K_a^{(p)}(z)$,则

$$C_h^*S_n(z)=\sum_{p=0}^{n}l_{n,p}C_h^*K_a^{(p)}(z)=\sum_{p=0}^{n}l_{n,p}\sum_{t=0}^{p}\bar d_{p,t}\cdot$$

$$K_a^{(t)}(z)=\sum_{t=0}^{n}(\sum_{p=t}^{n}\bar d_{p,t}l_{n,p})K_a^{(t)}(z)=[\overline{h'(a)}]^n\cdot$$

$$\sum_{t=0}^{n}l_{n,t}K_a^{(t)}(z)=[\overline{h'(a)}]^nS_n(z).$$

由文献[1]中引理 3.1,对 $p\neq q$,有 $[\overline{h'(a)}]^p\neq[\overline{h'(a)}]^q$,故 $S_n\in H^2(U)$.

$$C_h^*\frac{S_n}{\|S_n\|}=[\overline{h'(a)}]^n\frac{S_n}{\|S_n\|},$$

从而 $\overline{\mathrm{span}}\{S_n,n\geqslant 0\}=\overline{\mathrm{span}}\{K_a^{(n)},n\geqslant 0\}=H^2(U)$.注意 $K=\overline{\{[\overline{h'(a)}]^n,n\geqslant 0\}}$ 为复平面 C 上不包含内点且不分割平面的紧集.又由文献[1]中引理 3.6 和引里 3.7 知道 $\{[\overline{h'(a)}]^n,n\geqslant 0\}$ 为 SS 序列,再由文献[1]中引理 3.9 知道 $\mathrm{cv}(C_h^*)$ 在 $H^2(U)$ 中稠密.

若 h 是非椭圆型自同构,$a=0$,$h'(0)\neq 0$.设 $b\in D/\{0\}$ 且 $j(z)=j^{-1}(z)=\frac{b-z}{1-\bar bz}$,$O(z)=j^{-1}\circ h\circ j(z)$,则 $O(z)$ 为 D 的解析自映射,但非 D 上的椭圆型自同构.因为

$$j'(z)=[j^{-1}(z)]'=\frac{|b|^2-1}{(1-\bar bz)^2},O(b)=j^{-1}\circ h\circ j(b)=b,$$

$$O'(b)=[j^{-1}(b)]'h'(0)j'(b)\neq 0.$$

由(2)知 $\mathrm{cv}(C_O^*)$ 在 $H^2(U)$ 中稠密.再由文献[1]中引理 3.2 可以得出 $\mathrm{cv}(C_h^*)$ 在 $H^2(U)$ 中稠密.

若(ii)成立.由文献[3]知道存在 D 中的自同构 j,V 对所有 $p\geqslant 1$ 满足 $h=j^{-1}\circ V\circ j$.此处 $V(z)=\lambda z$,$\lambda\in C$,$|\lambda|=1$,$\lambda^n\neq 1$.若 $\_(z)=\bar\lambda z$,$f,g\in H^2(U)$,则

$$\langle C_V^*f,g\rangle_U=\langle f,C_Vg\rangle_U=\langle C_{\_}f,g\rangle_U.$$

故 $C_V^*=C_{\_}$,$C_{\_}z^n=\bar\lambda^nz^n$ 且 $\overline{\mathrm{span}\{z^p,p\geqslant 0\}}=H^2(U)$.设 $K=\overline{\mathrm{co}}\{\bar\lambda^n,n\geqslant 0\}$,则由文献[1]中引理 3.6 3.8 知道 $\{\bar\lambda^n,n\geqslant 0\}$ 为 SS 序列.由文献[1]中引理 3.9 知道 $\mathrm{cv}(C_{\_})=\mathrm{cv}(C_V^*)$ 在 $H^2(U)$ 中稠密.故再由文献[1]中引理 3.2 有 $\mathrm{cv}(C_h^*)$ 在 $H^2(U)$ 中稠密.

(3)若 $a\in D$,$h'(a)=0$ 且 $h(z)\neq a\ (z\in D)$,则存在 $b\in D$,对所有 $n\geqslant 1$,有 $h_n(b)\neq a$.设 $f\in H^2(U)$ 垂直于 $\{(C_h^*)^nK_b,n\geqslant 0\}$.则对所有的 $n\geqslant 1$,有

$$0=\langle f,(C_h^*)^nK_b\rangle_U=\langle f,K_{h_n(b)}\rangle_U=f[h_n(b)].$$

因为 f 在 D 上解析,$\lim_{k\to\infty}h_k(b)=a$,$f(z)\equiv 0(z\in D)$,故 K_b 为 C_h^* 循环向量.

(4)若存在 $n\in N$,满足 $h_n(z)=z\ (z\in D)$,则 $\{(C_h^*)^p,p\geqslant 1\}\{C_{h_p}^*,p\geqslant 1\}=\{C_{h_p}^*,1\leqslant p\leqslant n\}$,故 C_h^* 非循环.

若 $a\in\partial D$,$0<h'(a)<1$,那么或者存在 D 上的解析自映射 e,使得 $H\circ h=e\circ h$,其中 $H(z)=[(1\pm 2i)z-1][z-1\pm 2i]^{-1}$;或者 h 为内函数,h 不是自同构,$a\in\partial D$,则 C_h 有一个具有无穷重特征向量的特征值[3].由文献[1]中引理 3.3,C_h^* 在 $H^2(U)$ 中非循环.

注 若 $h(z)\equiv b\in D(z\in D)$.设 $f,g\in H^2(U)$,则对任意 $n\in N$,有

$\langle f,(C_h^*)^ng\rangle_U=\langle(C_h)^nf,g\rangle_U=\langle C_hf,g\rangle_U=\langle f,C_h^*g\rangle_U$,故 $(C_h)^n=C_h^*$.

即此情形为上述情形的特例.

参考文献:

[1] Wu Shuhong, Wang Maofa, Liu Peide. Two problems about composition operators on Hardy space[J]. Acta Mathematica Scientia, 2005, 25B(3): 515-524.

[2] Zhu K H. Operator theory in function spaces[M]. New York: Marcel Dekker, INC, 1990.

[3] 徐宪民.复合算子理论[M].北京:科学出版社,1999.

[4] Chan K C, Shapiro J H. The cyclic behavior of translation operators on Hilbert space of entire functions[J]. Indiana Univ Math J, 1991, 40: 1421-1449.

(责任编辑:尹 闯)