DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.04.014

广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(4): 369~370

关于凸多面体的一个不等式

An Inequality about Convex Polytopes

吴树宏

WU Shu-hong

(武汉理工大学理学院数学系,湖北武汉 430070)

(Department of Mathematics, School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan, Hubei, 430070, China)

摘要: 证明关于原点对称的凸多面体 P 满足 $U(P)\leqslant \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}V(P)$,并且当且仅当 P 为平行多面体时等号成立.

关键词: 不等式 凸多面体 数学归纳法

中图法分类号: O186.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)04-0369-02

Abstract An inequality $U(P)\leqslant \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}V(P)$ about convex polytopes has been proved in this paper, and the equality hold up if and only if P is a parallelotope.

Key words inequality, convex polytopes, mathematical induction

设 P 为 R^n 中包含原点于其内点集的凸多面体,S^{n-1}为 R^n 中的单位球,V为体积 vol_n的缩写,$u_1,\cdots,u_N$ 为 P的外单位法向量.记 $h_1,\cdots,h_N$ 分别为从原点到 P的面 $S_1,\cdots,S_N$ 的距离,$a_1,\cdots,a_N$ 分别为相应于面 $S_1,\cdots,S_N$ 的面积(即 $n-1$维体积).易见 $V(P)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}a_ih_i$.定义 $U(P)^n=\frac{1}{n^n}\sum_{u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_n}\neq 0}h_{i_1}\cdots h_{i_n}a_{i_1}\cdots a_{i_n}$,其中 $u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_n}=0$当且仅当向量 $u_{i_1},\cdots,u_{i_n}$线性无关.本文证明文献[1]中,Erwin Lutwak, Deane Yang 和 Gaoyong Zhang 提出的一个关于泛函 V和 U的不等式.

1 凸多面体的不等式

若 P为 R^n 中的关于原点对称的凸多面体,此时是否有

$$U(P)\geqslant \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}V(P),$$

等号成立当且仅当 P为平行多面体.

2 不等式的证明

引理 **2.1** 若 P为 R^n 中的关于原点对称的凸多面体,$1\leqslant k\leqslant n-1$, $1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_k\leqslant N$, $u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_k}\neq 0$, $L=\{u_{i_l}(1\leqslant l\leqslant k)\}^{\perp}$, $P_L=L\cap P$,则

$$k\sum_{u_j\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_k}\neq 0}h_ja_j\geqslant (n-k)\sum_{u_j\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_k}=0}h_ja_j,$$

等式成立当且仅当 $P=\bigcup_{u_j\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_k}=0}\mathrm{co}(P_L\cap S_j)$.

证明 显然 $\dim P_L=n-k$.因为 P为 R^n 中的关于原点对称的凸多面体,故

$$\frac{1}{k}\sum_{u_j\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_k}=0}h_ja_j=$$

$$\sum_{u_j\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_k}=0}V[\mathrm{co}(P_L\cup S_j)]\leqslant V(P)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}h_ja_j=$$

$$\frac{1}{n}\Big[\sum_{u_j\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_k}=0}h_ja_j+\sum_{u_j\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_k}\neq 0}h_ja_j\Big],$$

从而有

$$k\sum_{u_j\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_k}\neq 0}h_ja_j\geqslant (n-k)\sum_{u_j\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_k}=0}h_ja_j.$$

所以等号成立当且仅当 $P=\bigcup_{u_j\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_k}=0}\mathrm{co}(P_L\cup S_j)$.

引理 **2.2** 若 P为 R^n 中的关于原点对称的凸多面体($n\geqslant 2$),则

$$\sum_{u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_n}\neq 0}h_{i_1}\cdots h_{i_n}a_{i_1}\cdots a_{i_n}\geqslant \frac{n!}{n^n}\Big(\sum_{i=1}^{N}a_ih_i\Big)^n,$$

等号成立当且仅当 P为平行多面体.

证明 若 $2\leqslant k\leqslant n$, $1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_k\leqslant N$, $u_{i_1}\wedge\cdots\wedge$

收稿日期: 2008-01-04

作者简介: 吴树宏(1963-),男,副教授,主要从事泛函分析方面的研究工作.

$u_{i_k}\neq 0$,先关于 k 用数学归纳法证明不等式

$$\sum_{u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_k}\neq 0} h_{i_1}\cdots h_{i_k} a_{i_1}\cdots a_{i_k} \geqslant \frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} a_i h_i\right)^k. \qquad (1)$$

若 $k=2$, $1\leqslant j\leqslant N$,由引理2.1,有

$$\sum_{i=1}^{N} a_i h_i = \sum_{u_j\wedge u_i\neq 0} h_i a_i + \sum_{u_j\wedge u_i=0} h_i a_i \leqslant \frac{n}{n-1}\cdot\sum_{u_j\wedge u_i\neq 0} h_i a_i,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} a_i h_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i a_j h_i h_j \leqslant \frac{n}{n-1}\cdot\sum_{u_j\wedge u_i\neq 0} a_i a_j h_i h_j,$$

故当 $k=2$ 时,(1)式成立.当 $2\leqslant k=m<n$ 时,(1)式成立,由引理2.1,有

$$\left(\sum_{i=1}^{N} a_i h_i\right)^{m+1} \leqslant \frac{(n-m)!\,n^m}{n!}\sum_{i=1}^{N} a_i h_i\cdot\sum_{u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_m}\neq 0} h_{i_1}\cdots h_{i_m} a_{i_1}\cdots a_{i_m} = \frac{(n-m)!\,n^m}{n!}\cdot\left[\sum_{u_j\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_m}\neq 0} h_j h_{i_1}\cdots h_{i_m} a_j a_{i_1}\cdots a_{i_m} + \sum_{u_j\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_m}=0,\ u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_m}\neq 0} h_j h_{i_1}\cdots h_{i_m} a_j a_{i_1}\cdots a_{i_m}\right] \leqslant$$

$$\frac{(n-m)!\,n^m}{n!}\left(1+\frac{m}{n-m}\right)\sum_{u_j\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_m}\neq 0} h_j h_{i_1}\cdots h_{i_m} a_j a_{i_1}\cdots a_{i_m}\leqslant \frac{(n-m-1)!\,n^{m+1}}{n!}\cdot\sum_{u_j\wedge u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_m}\neq 0} h_j h_{i_1}\cdots h_{i_m} a_j a_{i_1}\cdots a_{i_m},$$

即当 $k=m+1$ 时,(1)式成立.在(1)式中设 $k=n$ 即可以得出引理结论.又由引理2.1,可以知道等式成立当且仅当 P 为平行多面体.

定理 2.1 若 P 为 R^n 中的关于原点对称的凸多面体,则 $U(P)\geqslant \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}V(P)$,等式成立当且仅当 P 为平行多面体.

证明 由引理2.2,有

$$U(P)=\left(\frac{1}{n^n}\sum_{u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_n}\neq 0} h_{i_1}\cdots h_{i_n} a_{i_1}\cdots a_{i_n}\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant \left[\frac{n!}{n^n\cdot n^n}\left(\sum_{i=1}^{N} a_i h_i\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}=\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}V(P),$$

等号成立当且仅当 P 为平行多面体.

参考文献:

[1] Lutwak Erwin, Yang Deane, Zhang Gaoyong. A new affine invariant for polytopes and Schneider's projection problem [J]. Trans Amer Math Soc, 2001, 353 1767-1779.

(责任编辑:尹 闯)

(上接第368页 Continue from page 368)

把(8)式代入(9)式中,考虑到 $(1+\text{U}_j a^{m-1}(t_j,x_j))^m \leqslant (1+\text{U}_j a^{m-1}(t_j,x_j))$ 则可以推出

$$u(t,x)\leqslant \tilde{a}(t,x)+\tilde{a}(t,x)\left[\exp\left(\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} b(\text{F},s)\,d\text{F}ds\right)-1\right]+\tilde{a}(t,x)(1+\text{U}_1 a^{m-1}(t_1,x_1))\left[\exp\left(\int_{t_0}^{t_2}\int_{x_0}^{x_2} b(\text{F},s)\,d\text{F}ds\right)-\exp\left(\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} b(\text{F},s)\,d\text{F}ds\right)\right]+\cdots+\tilde{a}(t,x)\prod_{i=1}^{k-1}(1+\text{U}_i a^{m-1}(t_i,x_i))\times\left[\exp\left(\int_{t_0}^{t_k}\int_{x_0}^{x_k} b(\text{F},s)\,d\text{F}ds\right)-\exp\left(\int_{t_0}^{t_{k-1}}\int_{x_0}^{x_{k-1}} b(\text{F},s)\,d\text{F}ds\right)\right]+\sum_{i=1}^{k}\text{U}_i\tilde{a}^m(t_i,x_i)\prod_{j=1}^{i-1}(1+\text{U}_j a^{m-1}(t_j,x_j))\cdot\exp\left(\int_{t_0}^{t_i}\int_{x_0}^{x_i} b(\text{F},s)\,d\text{F}ds\right)+\int_{t_k}^{t}\int_{x_k}^{x} b(\text{F},s)\cdot u(\text{F},s)\,d\text{F}ds=\tilde{a}(t,x)\prod_{i=1}^{k}(1+\text{U}_i a^{m-1}(t_i,x_i))\cdot\exp\left(\int_{t_0}^{t_k}\int_{x_0}^{x_k} b(\text{F},s)\,d\text{F}\,ds\right)+\int_{t_k}^{t}\int_{x_k}^{x} b(\text{F},s)u(\text{F},s)\,d\text{F}ds. \qquad (10)$$

类似于(3)式的处理方法,由(10)式可以得出结论.

参考文献:

[1] Agarwal R P, Deng S, Zhang W. Generalization of a retarded Gronwall-like inequality and its applications [J]. Appl Math Comput, 2005, 165 599-612.

[2] Mitropolskiy Yu A, Iovane G, Borysenko S D. About a generalization of Bellman-Bihari type inequalities for discontinuous functions and their applications [J]. Nonlnear Anal, 2007, 66 2140-2165.

[3] Wang W S. A generalized retarded Gronwall-like inequality in two variables and applications to BVP[J]. Appl Math Comput, 2007, 191(1): 144-154.

[4] 王五生.一个推广的具有双重和离散不等式及其应用[J].四川大学学报:自然科学版,2007,44 733-738.

(责任编辑:尹 闯)