DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.04.015
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(4): 371~373

混合变分不等式的一类迭代算法*

Some Iterative Algorithms for Mixed Variational Inequalities

唐国吉[1], 赵康生[2]
TANG Guo-ji[1], ZHAO Kang-sheng[2]

(1.广西民族大学数学与计算机科学学院, 广西南宁 530006; 2.南昌航空大学数学与信息科学学院, 江西南昌 330063)
(1. College of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning, Guangxi, 530006, China; 2. College of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang, Jiangxi, 330063, China)

摘要: 提出求解混合变分不等式的一个新的迭代算法1,并且当 f 是非空闭凸集 K 上的指示函数时,得到求解经典变分不等式的迭代算法2.对于算法1,在假设混合变分不等式的解集非空及不需要 $\lim_{n\to\infty} U_n=0$ 的条件下,证明迭代序列 $\{u_n\}$ 收敛于混变分不等式的唯一解.
关键词: 变分不等式 Ishikawa迭代 Lipschitz连续
中图法分类号: O221.2 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)04-0371-03

Abstract A new iterative algorithm 1 for solving mixed variational inequalities is proposed, and when f is the indicator function over a closed convex set K, we obtain algorithm 2 for solving classical variational inequalities. For algorithm 1 where $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ is removed, suppose the solution set is noempty. That the iterative sequeuce $\{u_n\}$ converges to the unique solution of mixed variational inequalities is proved.
Key words variational inequalities, Ishikawa iteration, Lipschitz continuous

设 H 是实 Hilbert空间, T 是 H 到其自身的非线性映射, $f: H\to R\cup\{+\infty\}$ 是一真凸下半连续泛函. 混合变分不等式是: 找 $u\in H$ 使得

$$<Tu, v-u>\geqslant f(u)-f(v),\ \forall v\in H. \quad (0.1)$$

设 K 是 H 中的一非空闭凸集,若 f 是 K 上的指示函数,即 $f(u)=W_K(u),\ \forall u\in H$,其中 $W_K(\cdot)$ 定义为

$$W_K(u):=\begin{cases}0, & u\in K,\\ +\infty, & u\in H\backslash K,\end{cases}$$

则混合变分不等式(0.1)等价于找 $u\in K$ 使得

$$<Tu, v-u>\geqslant 0,\ \forall v\in K. \quad (0.2)$$

问题(0.2)被称为经典的变分不等式.

关于问题(0.1), 很多学者已进行过研究[1~5]. 本文给出求解该问题的一些新的算法,其中算法1和算法2是 Ishikawa迭代格式.通常在 Ishikwa迭代格式中,要求 $\lim_{n\to\infty} U_n=0$,如文献[6]中的定理4.1~4.2,但是本文去掉了这些限制. 此外,我们给出算法中关于 d 的具体限制条件, 这比文献[2,3]中所用的 $\sqrt{1-2Td+T^2d^2}<1$ 条件更易于操作.

1 预备知识

定义1.1 设 $T: H\to 2^H$ 是极大单调算子, $d>0$, 称

$$J_d^T: H\to H,\ J_d^T(u)=(I+dT)^{-1}(u),\forall u\in H$$

为 T 的预解算子, 其中 I 表示 H 上的恒等算子.

引理1.1[5] 设 $d>0$,算子 T 是单调的当且仅当预解算子 $J_d^T=(I+dT)^{-1}$ 是严格非扩张的, 进一步,算子 T 是极大单调的当且仅当 J_d^T 是严格非扩张的,且 $\mathrm{dom}(J_d^T)=H$.

容易知道,当 T 是极大单调算子时, J_d^T 是单值的.

收稿日期: 2008-04-18
作者简介: 唐国吉(1979-), 男,讲师, 硕士, 主要从事泛函分析方面的研究工作。
* 广西民族大学青年科学基金项目资助。

定义 1.2 $T: H\to H$ 称为

(1) α强单调的，如果存在常数 $\alpha>0$，使得 $\langle Tu-Tv, u-v\rangle\geq\alpha\|u-v\|^2,\forall u,v\in H$.

(2) β-Lipschitz连续的，如果存在常数 $\beta>0$，使得 $\|Tu-Tv\|\leq\beta\|u-v\|,\forall u,v\in H$.

设 $f: H\to R\cup\{+\infty\}$ 是一真凸下半连续泛函，f 的次微分 ∂f 是极大单调算子. 如定义 1.1那样，我们可以定义 ∂f 的预解算子，记为 $J_\rho^f=(I+\rho\partial f)^{-1}$.

引理 1.2[2,3] $u\in H$ 是问题(0.1)的解当且仅当 $u\in H$ 满足 $u=J_\rho^f(I-\rho T)(u)$，其中 $\rho>0$ 是一常数，$J_\rho^f=(I+\rho\partial f)^{-1}$.

引理 1.3[7] 设 $\{a_n\},\{t_n\},\{b_n\}$ 为非负序列，且 $a_{n+1}\leq(1-t_n)a_n+t_nb_n$，若 $t_n\in[0,1]$，$\sum_{n=0}^{\infty}t_n=+\infty$，$\lim_{n\to\infty}b_n=0$，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

2 迭代算法

算法 1 对任意给定的 $u_0\in H$，定义带误差项的 Ishikawa迭代序列 $\{u_n\}$ 为

$$u_{n+1}=(1-\alpha_n)u_n+\alpha_nJ_\rho^f(I-\rho T)v_n+\alpha_ne_n, \quad (2.1)$$

$$v_n=(1-\beta_n)u_n+\beta_nJ_\rho^f(I-\rho T)u_n, \quad (2.2)$$

其中 $\rho>0$ 为常数，$e_n\in H$，$\alpha_n,\beta_n\in[0,1]$，且 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$，$\lim_{n\to\infty}e_n=0$.

由 ∂f 的极大单调性及引理 1.1，知道 $\mathrm{dom}(J_\rho^f)=H$，因此算法 1是可定义的. 在算法 1中，若取 $\beta_n\equiv0$，则可得到文献[3]中的算法 3.4，即对任意给定的 $u_0\in H$，迭代序列 $\{u_n\}$ 由

$$u_{n+1}=(1-\alpha_n)u_n+\alpha_nJ_\rho^f(I-\rho T)u_n+\alpha_ne_n, \quad (2.3)$$

产生，其中 $\rho>0$ 为常数，α_n，e_n 与算法 1相同.

进一步，若 $\alpha_n\equiv1$，$e_n\equiv0$，则算法 2变成: 对任意给定的 $u_0\in H$，迭代序列 $\{u_n\}$ 由

$$u_{n+1}=J_\rho^f(I-\rho T)u_n \quad (2.4)$$

产生，其中 $\rho>0$ 为常数.

文献[2]中的算法 1~5均是在算法 1的基础上修改得到的.

设 K 是 H 中的一非空闭凸集，若 f 是 K 上的指示函数，即 $f(u)=\delta_K(u)$，$\forall u\in H$，注意到 $P_K=(I+\partial\delta_K)^{-1}$，则可以得到求解经典变分不等式问题(0.2)的一些新算法.

算法 2 对任意给定的 $u_0\in H$，定义带误差项的 Ishikawa迭代序列 $\{u_n\}$ 为

$$u_{n+1}=(1-\alpha_n)u_n+\alpha_nP_K(I-\rho T)v_n+\alpha_ne_n, \quad (2.5)$$

$$v_n=(1-\beta_n)u_n+\beta_nP_K(I-\rho T)u_n, \quad (2.6)$$

其中 $\rho>0$ 为常数，α_n，β_n，e_n 与算法 1相同.

在算法 2中取 $\beta_n\equiv0$，则可以得到: 对任意给定的 $u_0\in H$，迭代序列 $\{u_n\}$ 由

$$u_{n+1}=(1-\alpha_n)u_n+\alpha_nP_K(I-\rho T)u_n+\alpha_ne_n \quad (2.7)$$

产生，其中 $\rho>0$ 为常数，α_n，e_n 与算法 1相同.

3 算法的收敛性分析

定理 3.1 $T: H\to H$ 是一个 α强单调($\alpha>0$)和 β-Lipschitz连续($\beta>0$)的非线性算子，设 $\{u_n\}$ 是由算法 1产生的序列，其中当 $\beta\geq\alpha>0$ 时，取 $\rho<\frac{2\alpha}{\beta^2}$；当 $\alpha>\beta>0$ 时，取 $0<\rho<\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta^2}$ 或 $\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta^2}<\rho<\frac{2\alpha}{\beta^2}$，且问题(0.1)的解集非空，则 $\{u_n\}$ 收敛到问题(0.1)的唯一解 u.

证明 分两步证明. 先证明 $\{u_n\}$ 收敛到问题(0.1)的一个解.

由假设，问题(0.1)的解集非空. 设 $u\in H$ 是问题(0.1)的一个解，由引理 1.2，知道 $u=J_\rho^f(I-\rho T)(u)$，

$$\|u_{n+1}-u\|=\|(1-\alpha_n)u_n+\alpha_nJ_\rho^f(I-\rho T)v_n+\alpha_ne_n-u\|=\|(1-\alpha_n)u_n+\alpha_nJ_\rho^f(I-\rho T)[(1-\beta_n)u_n+\beta_nJ_\rho^f(I-\rho T)u_n]+\alpha_ne_n-u\|=\|(1-\alpha_n)u_n+\alpha_nJ_\rho^f(I-\rho T)[(1-\beta_n)u_n+\beta_nJ_\rho^f(I-\rho T)u_n]-(1-\alpha_n)u-\alpha_nJ_\rho^f(I-\rho T)u+\alpha_ne_n\|=\|(1-\alpha_n)(u_n-u)+\alpha_n(J_\rho^f(I-\rho T)[(1-\beta_n)u_n+\beta_nJ_\rho^f(I-\rho T)u_n]-J_\rho^f(I-\rho T)u)+\alpha_ne_n\|\leq(1-\alpha_n)\|u_n-u\|+\alpha_n\|J_\rho^f(I-\rho T)[(1-\beta_n)u_n+\beta_nJ_\rho^f(I-\rho T)u_n]-J_\rho^f(I-\rho T)u\|+\alpha_n\|e_n\|.$$

由 J_ρ^f 的非扩张性，及 T 的 α强单调性和 β-Lipschitz连续性，可以得出

$$\|J_\rho^f(I-\rho T)[(1-\beta_n)u_n+\beta_nJ_\rho^f(I-\rho T)u_n]-J_\rho^f(I-\rho T)u\|^2\leq\|(I-\rho T)[(1-\beta_n)u_n+\beta_nJ_\rho^f(I-\rho T)u_n]-(I-\rho T)u\|^2=\|(1-\beta_n)u_n+\beta_nJ_\rho^f(I-\rho T)u_n-u\|^2-2\rho\langle T[(1-\beta_n)u_n+\beta_nJ_\rho^f(I-\rho T)u_n]-Tu,(1-\beta_n)u_n+\beta_nJ_\rho^f(I-\rho T)u_n-u\rangle+\rho^2\|T[(1-\beta_n)u_n+\beta_nJ_\rho^f(I-\rho T)u_n]-Tu\|^2\leq(1-2\alpha\rho+\beta^2\rho^2)\|(1-\beta_n)u_n+\beta_nJ_\rho^f(I-\rho T)u_n-u\|^2=(1-2\alpha\rho+\beta^2\beta^2)\|(1-\beta_n)(u_n-u)+\beta_n(J_\rho^f(I-\rho T)u_n-J_\rho^f(I-\rho T)u)\|^2\leq(1-2\alpha\rho+\beta^2\rho^2)[(1-\beta_n)\|u_n-u\|+\beta_n\|J_\rho^f(I-\rho T)u_n-J_\rho^f(I-$$

$dT)u\|]^2 \leqslant (1-2Td+U^2d^2)[(1-U_n)\|u_n-u\|+U_n\sqrt{1-2Td+U^2d^2}\|u_n-u\|]^2 \leqslant (1-2Td+U^2d^2)[1-(1-\sqrt{1-2Td+U^2d^2})U_n]^2\|u_n-u\|^2.$

其中当 $U\geqslant T>0$时，取 $d<\frac{2T}{U^2}$，或者当 $T>U>0$时，取 $0<d<\frac{T-\sqrt{T^2-U^2}}{U^2}$或$\frac{T+\sqrt{T^2-U^2}}{U^2}<d<\frac{2T}{U^2}$，都容易推出 $\sqrt{1-2Td+U^2d^2}<1$. 因此

$\|J_d^f(I-dT)[(1-U_n)u_n+U_nJ_d^f(I-dT)u_n]-J_d^f(I-dT)u\| \leqslant \sqrt{1-2Td+U^2d^2}[1-(1-\sqrt{1-2Td+U^2d^2})U_n]\|u_n-u\|.$

令 $\lambda_n=\sqrt{1-2Td+U^2d^2}[1-(1-\sqrt{1-2Td+U^2d^2})U_n]$，则有

$\|u_{n+1}-u\| \leqslant [(1-T_n)+T_n\lambda_n]\|u_n-u\|+T_n\|e_n\| \leqslant [1-(1-\lambda_n)T_n]\|u_n-u\|+(1-\lambda_n)T_n\frac{\|e_n\|}{1-\lambda_n}.$

在引理 1.3中令 $a_n=\|u_n-u\|$，$t_n=(1-\lambda_n)T_n$，$b_n=\frac{\|e_n\|}{1-\lambda_n}$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|=0$.

由 λ_n 的定义容易知道 λ_n 关于 U_n 是单调下降的，因此

$$0\leqslant 1-2Td+U^2d^2<\lambda_n<\sqrt{1-2Td+U^2d^2}<1. \tag{3.1}$$

由(3.1)式及 $T_n\in[0,1]$，知道 $t_n\in[0,1]$. 再由$\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_n=\infty$，知道$\sum\limits_{n=0}^{\infty}t_n=\infty$. 由(3.1)式及 $\lim\limits_{n\to\infty}e_n=0$，知道 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. 利用引理 1.3得到 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|=0$. 因此$\{u_n\}$收敛于问题(0.1)的一个解 u.

再证明解的唯一性. 若 $w\in H$ 也是问题(0.1)的一个解. 由定理第一部分的证明知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-w\|=0$. 又由于 $\|u-w\|\leqslant\|u_n-u\|+\|u_n-w\|\to 0$，这样就证明了 $u=w$.

注　定理(3.1)中给出关于 d的约束条件：当 $U\geqslant T>0$时，取 $d<\frac{2T}{U^2}$；当 $T>U>0$时，取 $0<d<\frac{T-\sqrt{T^2-U^2}}{U^2}$或$\frac{T+\sqrt{T^2-U^2}}{U^2}<d<\frac{2T}{U^2}$，这比文献[2,3]中的 $\sqrt{1-2Td+U^2d^2}<1$更加具体更加便于操作.

推论 3.1[3]　设 $T: H\to H$是一个分别关于常数 $T>0$, $U>0$的 T强单调和 U-Lipschitz连续的非线性算子，$\{u_n\}$是由(2.3)式产生的序列，且问题(0.1)的解集非空. 若 $\sqrt{1-2Td+U^2d^2}<1$，则$\{u_n\}$收敛到问题(0.1)的唯一解 u.

定理 3.2　$T: H\to H$是一个分别关于常数 $T>0$, $U>0$的 T强单调和 U-Lipschitz连续的非线性算子. 设$\{u_n\}$是由算法 2产生的序列，其中当 $U\geqslant T>0$时，取 $d<\frac{2T}{U^2}$；当 $T>U>0$时，取 $0<d<\frac{T-\sqrt{T^2-U^2}}{U^2}$或$\frac{T+\sqrt{T^2-U^2}}{U^2}<d<\frac{2T}{U^2}$，且问题(0.2)的解集非空，则$\{u_n\}$收敛到问题(0.2)的唯一解 u.

证明　注意到 P_K的非扩张性，仿照定理 3.1的证明即可以得出定理 3.2成立.

推论 3.2　$T: H\to H$是一个分别关于常数 $T>0$, $U>0$的 T强单调和 U-Lipschitz连续的非线性算子，设$\{u_n\}$是由(2.7)式产生的序列，其中当 $U\geqslant T>0$时，取 $d<\frac{2T}{U^2}$；当 $T>U>0$时，取 $0<d<\frac{T-\sqrt{T^2-U^2}}{U^2}$或$\frac{T+\sqrt{T^2-U^2}}{U^2}<d<\frac{2T}{U^2}$且问题(0.2)的解集非空，则$\{u_n\}$收敛到问题(0.2)的唯一解 u.

证明　在定理 3.2的证明中令 $U_n\equiv 0$，即可以得出推论 3.2成立.

参考文献：

[1] Noor M A. A new iterative method for monotone mixed variational inequalities[J]. Math Comput Modelling, 1997, 26(7): 29-34.

[2] Zhang X. Some new iterative algorithms for monotone mixed variational inequalities[J]. Appl Math J Chinese Univ Ser B, 2002, 17(1): 80-84.

[3] 毕中胜，张超，葛瑜. 关于单调混合变分不等式的带误差项的 Mann迭代算法[J]. 辽宁师范大学学报：自然科学版，2003, 26(1): 5-7.

[4] Noor M A. Splitting methods for pseudomonotone mixed variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 2000, 246: 189-216.

[5] 何炳生，廖立志，杨振华. 极大单调算子的一个新的近似邻近点算法[J]. 中国科学：A辑，2002, 32(11): 1026-1032.

[6] Tan K K, XU H K. Iterative solutions to nonlinear equations of strongly accretive operators in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1993, 178: 9-21.

[7] Weng X L. Fixed point iteration for local strictly pseudo-contractive mapping[J]. Proc Amer Math Soc, 1991, 113: 727-731.

(责任编辑：尹　闯)