DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.01.001
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(1): 1～ 3

一系列新的 LA-群及其自同构群的阶*

A New Series of LA-Groups and the Order of Their Automorphism Groups

班桂宁,张中健,张 玉,吴建平
BAN Gui-ning, ZHANG Zhong-jian, ZHANG Yu, WU Jian-ping

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)
(School of Mathematics and Information Sciences, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要: 利用循环群扩张理论构造出一系列新群 $G=\langle a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n \mid a_1^{p^{t_1}}=a_2^{p^{t_2}}=a_3^{p^{t_3}}=a_4^{p^{t_4}}=\cdots=a_n^{p^{t_n}}=1,[a_1,a_3]=a_1^{p^s},[a_i,a_j]=1\rangle$ (这里 $i,j=1,2,\cdots,n$,但是 $i=1,j=3$ 不同时出现在 $[a_i,a_j]=1$ 中,p 为奇素数,s 为整数).给出新群的部分性质及其自同构群的阶,并证明新群均为 LA-群.

关键词: 有限 p-群 LA-群 自同构群
中图法分类号: O152.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)01-0001-03

Abstract A new series of groups G by extension theory of cyclic group are constructed, where $G=\langle a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n \mid a_1^{p^{t_1}}=a_2^{p^{t_2}}=a_3^{p^{t_3}}=a_4^{p^{t_4}}=\cdots=a_n^{p^{t_n}}=1,[a_1,a_3]=a_1^{p^s},[a_i,a_j]=1\rangle$ ($i,j=1,2,\cdots,n$. In the formula $[a_i,a_j]=1$, $i=1$ and $j=3$ don't occur at the same time, p is an odd prime, s is a positive integer). We give their properties as well as the order of their automorphism group, and prove that they are all LA-groups.

Key words finite p-group, LA-group, automorphism group

设 G 是有限 p-群,如果 G 的阶整除其自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 的阶,则称 G 为 LA-群.文献[1]由 $G=\langle a,b \mid a^{p^m}=b^{p^n}=1,[a,b]=a^{p^s}\rangle$,利用循环群扩张,最终构造出 $G=\langle a,b,c \mid a^{p^m}=b^{p^n}=c^{p^k}=1,[a,b]=a^{p^s},[a,c]=[b,c]=1\rangle$ (这里 m,n,k,s 均为非负整数).本文进一步推广这一个结果,给出 $G=\langle a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n \mid a_1^{p^{t_1}}=a_2^{p^{t_2}}=a_3^{p^{t_3}}=a_4^{p^{t_4}}=\cdots=a_n^{p^{t_n}}=1,[a_1,a_3]=a_1^{p^s},[a_i,a_j]=1\rangle$ (这里 $i,j=1,2,\cdots,n$,但是 $i=1,j=3$ 不同时出现在 $[a_i,a_j]=1$ 中,p 为奇素数,s 为整数)的性质和其自同构群的阶,并最终验证这些群都是 LA-群.

不作特别说明,文中所有的参数,如 $t_1,t_2,\cdots,t_n$; $x_1,x_2,\cdots,x_n$; $y_1,y_2,\cdots,y_n$; $z_1,z_2,\cdots,z_n$; $w_1,w_2,\cdots,w_n$; $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 和 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 均为非负整数,p 为奇素数,$s>0$,所有的群皆为有限群.为简便起见,以后在群的定义关系中,形如 $[a_i,a_j]=1,i,j=1,2,\cdots,n$ 略去不写.文中所用的术语以及定义均是标准的,具体可参照文献[1]和文献[2].

1 相关引理

引理 1.1[1] (Van Dyek) 设 G 是由生成元 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 和关系 $f_i(a_1,a_2,\cdots,a_r)=1,\forall i\in I$ 所定义的群. $H=\langle b_1,b_2,\cdots,b_r\rangle$ (这些 b_i 可能相同,$\forall i\in I$),$f_i(b_1,b_2,\cdots,b_r)=1$,则有满同态 $\theta: F_r/N\to H$, $a_iN\to b_i$,其中 $F_r=\langle a_1,a_2,\cdots,a_r\rangle$ 为自由群,$Y=\langle\{f_i(a_1,a_2,\cdots,a_r)\in F_r \mid i\in I\}\rangle$,$N=Y^{F_r}$ (Y 在 F_r 中的正规闭包),$G=F_r/N$.如果 $|G|\leq|H|<+\infty$,则上述 θ 为满足定义关系 $f_i(b_1,b_2,\cdots,b_r)=1(\forall i\in I)$ 的 $H=\langle b_1,b_2,\cdots,b_r\rangle$ (这些 b_i 可能相同 $\forall i\in I$)的群同构.

引理 1.2[2] 如果 $c(G)=2$,那么 $\exp(G')=\exp(G/Z(G))$.

引理 1.3[2] 设 G 是有限群,$a,b,c\in G$,则有

(1) $[ab,c]=[a,c]^b[b,c]$,

收稿日期: 2008-05-20
作者简介: 班桂宁(1962-),男,博士,教授,主要从事有限群与控制论研究工作。
* 国家自然科学基金项目(NO. 60574052)资助。

(2) $[a,bc]=[a,c][a,b]^c$.

引理 1.4[2] 设 G是有限群, $a,b,c\in G$且 $[a,b]\in Z(G)$,又设 n是正整数,则有

(1) $[a^n,b]=[a,b]^n$,

(2) $[a,b^n]=[a,b]^n$,

(3) $(ab)^n=a^nb^n[b,a]^{\binom{n}{2}}$.

2 主要结果

定理 2.1 设 $G=\langle a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n \mid a_1^{p^{t_1}}=a_2^{p^{t_2}}=a_3^{p^{t_3}}=a_4^{p^{t_4}}=\cdots=a_n^{p^{t_n}}=1,[a_1,a_3]=a_1^{p^s}\rangle$.如果 $s>0$,那么 G为一个群且 $G\cong\bar F$.这里 $F=\langle b_1,b_2,\cdots,b_r\rangle$为一个自由群, $S=\{b_1^{p^{t_1}},b_2^{p^{t_2}},\cdots,b_n^{p^{t_n}},[b_1,b_3]b_1^{p^s},[b_i,b_j]\}$, $\bar F=F/S^F=\langle\bar b_1,\bar b_2,\cdots,\bar b_n\rangle$, $\bar b_1^{p^{t_1}}=\bar b_2^{p^{t_2}}=\cdots=\bar b_n^{p^{t_n}}=1$, $[\bar b_1,\bar b_3]=\bar b_1^{p^s}$, $[\bar b_i,\bar b_j]=1$(这里 $i,j=1,2,\cdots,n$,但是 $i=1,j=3$不同时出现在 $[\bar b_i,\bar b_j]=1$中).

证明 设 $N=\langle a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n\mid a_1^{p^{t_1}}=a_2^{p^{t_2}}=a_3^{p^{t_3}}=a_4^{p^{t_4}}=\cdots=a_{n-1}^{p^{t_{n-1}}}=1,[a_1,a_3]=a_1^{p^s},\rangle$, $F=Z_{p^{t_n}}=\langle a_n\rangle$,规定 $\theta=T(s)$: $N\to F$,使得 $a_i\to a'_i=a_i^{a_n}=a_i$, $1\le i\le n-1$.又由 $a_i^{F}=a_i$, $a_i^{F^2}=a_i,\cdots,a_i^{F^{p^{t_n}}}=a_i$,显然, $F\in \mathrm{Aut}(N)$.由定义关系 $[a'_1,a'_3]=[a_1,a_3]=a_1^{p^s}$.当 $i,j=1,2,\cdots,n$,但 $i=1,j=3$不同时出现,均有 $[a'_1,a'_3]=1$, $a_i'^{p^{t_i}}=a_i^{p^{t_i}}=1(1\le i\le n-1)$.所以有 $a=1$即 $a^F=a=1$, $a^{p^{t_n}}=a=1$.于是 $G=\mathrm{Ext}(N,p^{t_n},1,F)$.

设 $F=\langle b_1,b_2,\cdots,b_n\rangle$为一个自由群, $S=\{b_1^{p^{t_1}},b_2^{p^{t_2}},\cdots,b_n^{p^{t_n}},[b_1,b_3]b_1^{p^s},[b_i,b_j]\}$.另设 $N=S^F$, $\bar F=F/N=F/S^F=\langle\bar b_1,\bar b_2,\cdots,\bar b_n\rangle$, $\bar b_1^{p^{t_1}}=\bar b_2^{p^{t_2}}=\cdots=\bar b_n^{p^{t_n}}=1$, $[\bar b_1,\bar b_3]=\bar b_1^{p^s}$, $[\bar b_i,\bar b_j]=1$(这里 $i,j=1,2,\cdots,n$,但是 $i=1,j=3$不同时出现在 $[\bar b_i,\bar b_j]=1$中).由于 $(\bar b_iN)^{\bar b_n}=\bar b_iN$, $1\le i\le n-1$,于是 $\langle\bar b_1N,\bar b_2N,\cdots,\bar b_{n-1}N\rangle\trianglelefteq F/N$, $|(F/N)/\langle\bar b_1N,\bar b_2N,\cdots,\bar b_{n-1}N\rangle|\le p^{t_n}$,又有 $|\langle\bar a_1N,\bar a_2N,\cdots,\bar a_{n-1}N\rangle|\le p^{t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}}$.故 $|(F/N)|\le p^{t_1+t_2+\cdots+t_n}=|G|$.由引理 1.1,可知 $\bar F\cong G$.

定理 2.2 如果 $p^{rs}\equiv 0(\bmod p^{t_1})$,那么 $c(G)=r$, $r\ge 2$.

证明 由于 $[a_1,a_3]=a_1^{p^s}$, $[a_i,a_j]=1$(这里 $i,j=1,2,\cdots,n$,但是 $i=1,j=3$不同时出现在 $[a_i,a_j]=1$中), $a_1^{p^s}\in G'$.又由于 $[a_1,a_3]=a_1^{p^s}\in\langle a_1^{p^s}\rangle$, $[a_i,a_j]=1\in\langle a_1^{p^s}\rangle$(这里 $i,j=1,2,\cdots,n$,但是 $i=1,j=3$不同时出现在 $[a_i,a_j]=1$中).故 $G'\le\langle a_1^{p^s}\rangle$,于是 $G'=\langle a_1^{p^s}\rangle$.再由 $[a_1^{p^s},a_3]=a_1^{-p^s}(a_1^{a_3})^{p^s}=a_1^{p^{2s}}$.如果 $p^{2s}\equiv 0(\bmod p^{t_1})$,那么有 $c(G)=2$.根据引理 1.2有 $\exp(G')=\exp(G/Z(G))$.若 $a_1^{p^{2s}}\ne 1$,则 $[a_1^{p^{2s}},a_3]=a_1^{-p^{2s}}(a_1^{a_3})^{p^{2s}}=a_1^{p^{3s}}$.如果 $p^{3s}\equiv 0(\bmod p^{t_1})$,那么有 $c(G)=3$.若 $a_1^{p^{3s}}\ne 1$,则 $[a_1^{p^{3s}},a_3]=a_1^{-p^{3s}}(a_1^{a_3})^{p^{3s}}=a_1^{p^{4s}}$.如果 $p^{4s}\equiv 0(\bmod p^{t_1})$,那么有 $c(G)=4$.同理,若 $a_1^{p^{(r-1)s}}\ne 1$,则 $[a_1^{p^{(r-1)s}},a_3]=a_1^{-p^{(r-1)s}}(a_1^{a_3})^{p^{(r-1)s}}=a_1^{p^{rs}}$.如果 $p^{rs}\equiv 0(\bmod p^{t_1})$,那么有 $c(G)=r$.

定理 2.3 在群 $G=\langle a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n\mid a_1^{p^{t_1}}=a_2^{p^{t_2}}=a_3^{p^{t_3}}=a_4^{p^{t_4}}=\cdots=a_n^{p^{t_n}}=1,[a_1,a_3]=a_1^{p^s}\rangle$中,如果 $t_1=t_3=2$, $t_2,t_4,t_5,\cdots,t_n\ge 1$, $s=1$,那么 $G'\le Z(G)$且 $Z(G)=<a_1^p>\times<a_2>\times<a_3^p>\times<a_4>\times\cdots\times<a_n>$.

证明 由 $t_1=t_3=2$, $t_2,t_4,t_5,\cdots,t_n\ge 1$, $s=1$,有 $G'=\langle a_1^p\rangle$.由 $[a_1,a_3]=a_1^p$,得 $a_1^{a_3}=a_1^{p+1}$, $[a_1^p,a_3]=a_1^{-p}(a_1^{a_3})^p=a_1^{-p}(a_1^{p+1})^p=a_1^{p^2}=1$, $[a_1^p,a_i]=1$, $i=2,4,5,\cdots,n$, $[a_1,a_3^p]=(a_3^{a_1})^pa_3^p=(a_1^pa_3^{-1})^pa_3^p=a_1^{p^2}=1$, $[a_i,a_3^p]=1$, $i=2,4,5,\cdots,n$.又 $[a_i,a_j]=1\in\langle a_1^{p^s}\rangle$(这里 $i,j=1,2,\cdots,n$,但是 $i=1,j=3$不同时出现在 $[a_i,a_j]=1$中).于是 $<a_1^p>\times<a_2>\times<a_3^p>\times<a_4>\times\cdots\times<a_n>\le Z(G)$.又因为 $|G|=p^{t_1+t_2+\cdots+t_n}$, $|<a_1^p>\times<a_2>\times<a_3^p>\times<a_4>\times\cdots\times<a_n>|=p^{t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}}$,所以 $|G/Z(G)|\le p^2$.于是有 $Z(G)=<a_1^p>\times<a_2>\times<a_3^p>\times<a_4>\times\cdots\times<a_n>$.易见 $G'\le Z(G)$.

定理 2.4 在群 $G=\langle a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n\mid a_1^{p^{t_1}}=a_2^{p^{t_2}}=a_3^{p^{t_3}}=a_4^{p^{t_4}}=\cdots=a_n^{p^{t_n}}=1,[a_1,a_3]=a_1^{p^s}\rangle$中,如果 $t_1=t_3=2s$, $t_2,t_4,t_5,\cdots,t_n\ge 1$, $s=1$,那么 $G'\le Z(G)$且 $Z(G)=<a_1^{p^s}>\times<a_2>\times<a_3^{p^s}>\times<a_4>\times\cdots\times<a_n>$.

证明 由 $[a_1,a_3]=a_1^{p^s}$,得 $a_1^{a_3}=a_1^{p^s+1}$, $[a_1^{p^s},a_3]=a_1^{-p^s}(a_1^{a_3})^{p^s}=a_1^{p^{2s}}$.因为 $t_1=2s$,所以 $[a_1^{p^s},a_3]=1$, $[a_1^{p^s},a_i]=1(i=2,4,5,\cdots,n)$.由此 $a_1^{p^s}\in Z(G)$, $G'=\langle a_1^{p^s}\rangle\in Z(G)$.又由于 $[a_i,a_3^{p^s}]=[a_i,a_3]^{p^s}=1$, $i=1,2,4,5,\cdots,n$,故 $\langle a_3^{p^s}\rangle\in Z(G)$.再因为 $[a_i,a_j]=1\in\langle a_3^{p^s}\rangle$(这里 $i,j=1,2,\cdots,n$,但是 $i=1,j=3$不同时出现在 $[a_i,a_j]=1$中).于是 $<a_1^{p^s}>\times<a_2>\times<a_3^{p^s}>\times<a_4>\times\cdots\times<a_n>\le Z(G)$.又因为 $|G|=p^{t_1+t_2+\cdots+t_n}$, $|<a_1^{p^s}>\times<a_2>\times<a_3^{p^s}>\times<a_4>\times\cdots\times<a_n>|=p^{2s+t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}}$,所以

$|G/Z(G)| \le p^2$. 于是有 $Z(G) = \langle a_1^{p^s}\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle a_3^{p^s}\rangle \times \langle a_4\rangle \times \cdots \times \langle a_n\rangle$. 易见 $G' \le Z(G)$.

定理 2.5 在群 $G = \langle a_1,a_2,a_3,a_4 \mid a_1^{p^{t_1}} = a_2^{p^{t_2}} = a_3^{p^{t_3}} = a_4^{p^{t_4}} = 1, [a_1,a_3] = a_1^{p^s}\rangle$ 中，如果 $t_4 > t_3 > t_2 > t_1 > s$，则 $|\mathrm{Aut}(G)| = (p-1)^8 p^{2t_1+5t_2+3t_3+t_4+5s-8}$.

证明 设 $a_1' = a_1^{x_1}a_2^{x_2}a_3^{x_3}a_4^{x_4}$, $a_2' = a_1^{y_1}a_2^{y_2}a_3^{y_3}a_4^{y_4}$, $a_3' = a_1^{z_1}a_2^{z_2}a_3^{z_3}a_4^{z_4}$, $a_4' = a_1^{w_1}a_2^{w_2}a_3^{w_3}a_4^{w_4}$. 由 $a_1'^{p^{t_1}} = 1$ 得 $x_i p^{t_1} \equiv 0(\bmod p^{t_i})$, $i = 1,2,3,4$. 因为 $t_4 > t_3 > t_2 > t_1 > s$，所以 $x_i \equiv 0(\bmod p^{t_i-t_1})$, $i = 2,3,4$. 于是将 $a_1' = a_1^{x_1}a_2^{x_2p^{t_2-t_1}}a_3^{x_3p^{t_3-t_1}}a_4^{x_4p^{t_4-t_1}}$, $a_2' = a_1^{y_1}a_2^{y_2}a_3^{y_3}a_4^{y_4}$, $a_3' = a_1^{z_1}a_2^{z_2}a_3^{z_3}a_4^{z_4}$, $a_4' = a_1^{w_1}a_2^{w_2}a_3^{w_3}a_4^{w_4}$ 代入定义关系.

由 $[a_1', a_3'] = [a_1^{x_1}a_2^{x_2p^{t_2-t_1}}a_3^{x_3p^{t_3-t_1}}a_4^{x_4p^{t_4-t_1}}, a_1^{z_1}a_2^{z_2}a_3^{z_3}a_4^{z_4}] = a_1^{p^s(x_1z_3 - x_3z_1p^{t_3-t_1})}$. $a_1'^{p^s} = (a_1^{x_1}a_2^{x_2p^{t_2-t_1}}a_3^{x_3p^{t_3-t_1}}a_4^{x_4p^{t_4-t_1}})^{p^s} = a_1^{x_1p^s + x_1x_3p^{t_3-t_1}\binom{p^s}{2}}$。$a_2^{x_2p^{t_2-t_1+s}}a_4^{x_4p^{t_4-t_1+s}}a_3^{x_3p^{t_3-t_1+s}}$. 再由于 $[a_1',a_3'] = a_1'^{p^s}$，于是有 $a_2^{x_2p^{t_2-t_1+s}} = 1$, $a_3^{x_3p^{t_3-t_1+s}} = 1$, $a_4^{x_4p^{t_4-t_1+s}} = 1$, $p^s(x_1z_3 - x_3z_1p^{t_3-t_1}) = x_1p^s + x_1x_3p^{t_3-t_1}\binom{p^s}{2}$. 由条件 $t_4 > t_3 > t_2 > t_1 > s$，即可以写成 $x_i \equiv 0(\bmod p^{t_i-s})$, $i = 2,3,4$. 又因为 $x_i \equiv 0(\bmod p^{t_i-t_1})$, $i = 2,3,4$, 于是得到 $x_i \equiv 0(\bmod p^{t_i-s})$, $i = 2,3,4$, $(x_1,p) = 1$. 同理，利用引理 1.3和 1.4最终均能得到如下结果:

$[a_1',a_2'] = a_1^{x_1y_3p^s - x_3y_1p^{t_3-t_1+s}} = 1$. 于是得到 $x_1y_3p^s - x_3y_1p^{t_3-t_1+s} \equiv 0(\bmod p^{t_1})$. 由 $(x_1,p) = 1$，则 $y_3 \equiv 0(\bmod p^{t_1-s})$ 且 $a_2' = a_1^{y_1}a_2^{y_2}a_3^{y_3p^{t_1-s}}a_4^{y_4}$.

$[a_1',a_4'] = a_1^{x_1w_3p^s - x_3w_1p^{t_3-t_1+s}} = 1$. 于是得到 $x_1w_3p^s - x_3w_1p^{t_3-t_1+s} \equiv 0(\bmod p^{t_1})$. 由 $(x_1,p) = 1$，则 $w_3 \equiv 0(\bmod p^{t_1-s})$ 且 $a_4' = a_1^{w_1}a_2^{w_2}a_3^{w_3p^{t_1-s}}a_4^{w_4}$.

$[a_2',a_3'] = a_1^{y_1z_3p^s - y_3z_1p^{t_1}} = 1$. 于是得到 $y_1z_3p^s - y_3z_1p^{t_1} \equiv 0(\bmod p^{t_1})$.

$[a_2',a_4'] = a_1^{y_1w_3p^{t_1} - y_3w_1p^{t_1}} = 1$. 于是得到 $y_1w_3p^{t_1} - y_3w_1p^{t_1} \equiv 0(\bmod p^{t_1})$，则 $y_1w_3 = y_3w_1$.

$[a_3',a_4'] = a_1^{z_1w_3p^{t_1} - z_3w_1p^{t_1}} = 1$. 于是得到 $z_1w_3p^{t_1} - z_3w_1p^{t_1} \equiv 0(\bmod p^{t_1})$，则 $z_1w_3 = z_3w_1$.

$a_2'^{p^{t_2}} = a_3^{y_3p^{t_1+t_2-s}}a_4^{y_4p^{t_2}} = 1$. 于是有 $a_3^{y_3p^{t_1+t_2-s}} = 1$, $a_4^{y_4p^{t_2}} = 1$. 由条件 $t_4 > t_3 > t_2 > t_1 > s$，也可以写成 $y_3p^{t_1+t_2-s} \equiv 0(\bmod p^{t_3})$, $y_4p^{t_2} \equiv 0(\bmod p^{t_4})$. 即得到 $y_3 \equiv 0(\bmod p^{t_3-t_1-t_2+s})$, $y_4 \equiv 0(\bmod p^{t_4-t_2})$.

$a_3'^{p^{t_3}} = a_2^{z_2p^{t_3}}a_4^{z_4p^{t_4}} = 1$. 于是有 $a_2^{z_2p^{t_3}} = 1$, $a_4^{z_4p^{t_4}} = 1$. 由条件 $t_4 > t_3 > t_2 > t_1 > s$，也可以写成 $z_2p^{t_3} \equiv 0(\bmod p^{t_2})$, $z_4p^{t_4} \equiv 0(\bmod p^{t_4})$. 即得到 $(z_2,p) = 1$, $z_4 \equiv 0(\bmod p^{t_4-t_3})$.

$a_4'^{p^{t_4}} = a_2^{w_2p^{t_4}}a_3^{w_3p^{t_1+t_4-s}} = 1$. 于是有 $w_2p^{t_4} = 1$, $w_3p^{t_1+t_4-s} = 1$. 由条件 $t_4 > t_3 > t_2 > t_1 > s$，也可以写成 $w_2p^{t_4} \equiv 0(\bmod p^{t_2})$, $w_3p^{t_1+t_4-s} \equiv 0(\bmod p^{t_3})$. 即得到 $(w_2,p) = 1$, $w_3 \equiv 0(\bmod p^{t_3+s-t_1-t_4})$. 所以有 $z_1w_3 = z_3w_1$, $y_1w_3 = y_3w_1$. 又 $w_3 \equiv 0(\bmod p^{t_1-s})$, $z_3 \equiv 0(\bmod p^{t_1-s})$, $y_3 \equiv 0(\bmod p^{t_1-s})$, 于是得到 $(z_1,p) = 1$, $(w_1,p) = 1$, $(y_1,p) = 1$. 另外由 $(y_1,p) = 1$, $y_1z_3p^s - y_3z_1p^{t_1} \equiv (\bmod p^{t_1})$ 及文献 [3]有 $x_1y_2 - x_2y_1 \ne 0$, $z_3w_4 - z_4w_3 \ne 0$, 于是得到 $(y_2,p) = 1$, $(w_4,p) = 1$.

综上所述，$x_i \equiv 0(\bmod p^{t_i-s})$, $i = 2,3,4$, $y_i \equiv 0(\bmod p^{t_i-t_2})$, $i = 3,4$, $z_3 \equiv 0(\bmod p^{t_1-s})$, $z_4 \equiv 0(\bmod p^{t_4-t_3})$, $w_3 \equiv 0(\bmod p^{t_1-s})$, $(z_2,p) = 1$, $(w_2,p) = 1$, $(x_1,p) = 1$, $(y_1,p) = 1$, $(z_1,p) = 1$, $(w_1,p) = 1$, $(y_2,p) = 1$, $(w_4,p) = 1$. 于是得到 $|\mathrm{Aut}(G)| = (p-1)^8p^{2t_1+5t_2+3t_3+t_4+5s-8}$. 由 $|G| = p^{t_1+t_2+t_3+t_4}$ 及 LA-群的定义，得 $|G| \mid |\mathrm{Aut}(G)|$，故 G 为 LA-群.

定理 2.6 在群 $G = \langle a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n \mid a_1^{p^{t_1}} = a_2^{p^{t_2}} = a_3^{p^{t_3}} = a_4^{p^{t_4}} = \cdots = a_n^{p^{t_n}} = 1, [a_1,a_3] = a_1^{p^s}\rangle$ 中，如果 $t_n > \cdots > t_4 > t_3 > t_2 > t_1 > s$，则 $|\mathrm{Aut}(G)| = (p-1)^{\frac{n^2-n+4}{2}}$。$p^{2t_1+(2n-3)t_2+(2n-5)t_3+(2n-7)t_4+\cdots+3t_{n-1}+t_n+(2n-3)s-\frac{n^2-n+4}{2}}$.

证明 设 $a_1' = a_1^{x_1}a_2^{x_2}a_3^{x_3}a_4^{x_4}a_5^{x_5}\cdots a_n^{x_n}$, $a_2' = a_1^{y_1}a_2^{y_2}a_3^{y_3}a_4^{y_4}a_5^{y_5}\cdots a_n^{y_n}$, $a_3' = a_1^{z_1}a_2^{z_2}a_3^{z_3}a_4^{z_4}a_5^{z_5}\cdots a_n^{z_n}$, $a_4' = a_1^{w_1}a_2^{w_2}a_3^{w_3}a_4^{w_4}a_5^{w_5}\cdots a_n^{w_n}$, $a_5' = a_1^{r_1}a_2^{r_2}a_3^{r_3}a_4^{r_4}a_5^{r_5}\cdots a_n^{r_n}$, $\cdots$, $a_3' = a_1^{u_1}a_2^{u_2}a_3^{u_3}a_4^{u_4}a_5^{u_5}\cdots a_n^{u_n}$，基于定理 2.5同样的证明方法，最终得到 $|\mathrm{Aut}(G)| = (p-1)^{\frac{n^2-n+4}{2}}$。$p^{2t_1+(2n-3)t_2+(2n-5)t_3+(2n-7)t_4+\cdots+3t_{n-1}+t_n+(2n-3)s-\frac{n^2-n+4}{2}}$. 由 $|G| = p^{t_1+t_2+t_3+t_4+\cdots+t_{n-1}+t_n}$ 及 LA-群的定义，得 $|G| \mid |\mathrm{Aut}(G)|$，故 G 为 LA-群.

参考文献:

[1] Ban Guining, Ghen Liying, Zhou Yu. A new series of LA-groups [J]. J Guangxi Teachers Education University, 2007, 24(4): 5-7.

[2] 徐明曜. 有限群导引(上,下册) [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[3] 董心灵. p^6阶群的自同构群的阶(H_{11},H_{33}) [D]. 南宁: 广西大学, 2004.

(责任编辑: 尹 闯)