DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.01.002
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(1): 4~ 6

极小子群的 F-S-补与有限群 p-幂零性*

F-S-Supplement of the Mininal Subgroups and p-nilpotentcy of Finite Groups

黄海兰,钟祥贵
HUANG Hai-lan, ZHONG Xiang-gui

(广西师范大学数学科学学院,广西桂林 541004)
(Department of Mathematics, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 利用极小子群的 F-S-补及极小阶反例法,研究有限群的 p-幂零性问题,得到有限群为 p-幂零的若干新判据.

关键词: 有限群 F-S-补 极小子群 p-幂零群
中图法分类号: O152.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)01-0004-03

Abstract Using F-S-supplement of the minimal subgroups and the minimal counterexample method, the p-nilpotency of finite groups is investigated. Some new sufficient conditions for a group to be a p-nilpotent group are obtained.

Key words finite groups, F-S-supplement, minimal subgroup, p-nilpotent group

子群的可补性在有限群理论的研究中起着极其重要的作用. Kegel[1,2]证明:如果群 G 的每一个极大子群在 G 中有循环补子群或 G 的某个幂零子群在 G 中有幂零补子群,则 G 可解.王燕鸣[3]提出 c-补概念并利用准素子群的 c-补研究超可解群和 p-幂零群的结构.最近,郭文彬,缪龙[4]从另一个角度定义了 F-S-补概念,并利用极大子群的 F-S-补给出群的若干新的性质和结构.本文继续这一工作,利用极小子群的 F-S-补来研究群的 p-幂零性,获得了有限群为 p-幂零的一些新结果.

本文讨论的群均为有限群, $G=[H]K$ 表示 G 是 H 与 K 的半直积,其中 $H\trianglelefteq G$.其他未予特殊说明的符号都是标准的.

1 定义及引理

设 G 为一个群,称群 G 的一个子群 H 在 G 中有补,如果存在 G 的子群 K,使得 $G=HK$ 且 $H\cap K=1$.

定义 1[4] 设 F 是一个群类, H 是群 G 的子群,称 H 在 G 中有 F-S-补,如果存在 G 的子群 K,使得 $G=HK$ 且 $K/K\cap H_G\in F$,其中 $H_G=\bigcap_{g\in G}H^g$ 是包含在 H 中 G 的最大正规子群,这时 K 叫做 H 在 G 中的 F-S-补.特别地,称 H 在 G 中有 p-幂零-S-补,如果存在 G 的子群 K,使得 $G=HK$ 且对于某个素数 p, $K/K\cap H_G$ 是 p-幂零群.

引理 1[4] 设 F 是一个商群闭且子群闭的群类, H 是 G 的子群,则下列陈述成立.

(1) 若 K 是 H 在 G 中的 F-S-补且 $N\trianglelefteq G$,则 KN/N 是 HN/N 在 G/N 中的 F-S-补.

(2) 设 $N\trianglelefteq G$ 且 $N\leq H$,若 K/N 是 H/N 在 G/N 中的 F-S-补,则 K 是 H 在 G 中的 F-S-补.

(3) 若 $H\leq D\leq G$ 且 K 是 H 在 G 中的 F-S-补,则 $K\cap D$ 是 H 在 D 中的 F-S-补.

引理 2[5] 设 G 是有限群, $P\in Syl_p(G)$,若 $N_G(P)=C_G(P)$,则 G 是 p-幂零群.

引理 3[6] 设 G 是内 p-幂零群(即真子群为 p-幂零,而 G 本身非 p-幂零),则 G 为内幂零群.

引理 4[6] 设 G 是内幂零群,则:

(1) 对 $|G|$ 的某个素因子 p, G 有一个正规 Sylow p-子群 P,且 $G/P\cong Q$,其中 Q 为 G 的非正规

收稿日期: 2008-05-26
作者简介: 黄海兰(1983-),女,硕士研究生,主要从事有限群论的研究工作。
* 广西科学基金项目(0575050),广西研究生教育创新计划项目(2007106020701M51)资助。

循环 Sylow q-子群,且 $p\neq q$;

(2) $P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群;

(3) 如果 P 非交换且 $p\neq 2$,则 $\exp P=p$;

(4) 如果 P 非交换且 $p=2$,则 $\exp P=4$;

(5) 如果 P 交换,则 $\exp P=p$.

引理 5[7] 设 G 是内 p-幂零群,$N\trianglelefteq G$,P 为 G 的正规 Sylow p-子群.若 G/N 为 p-幂零群,则有 $P\leq N$.

引理 6[5] 设 G 是有限群,P 是 G 的 p-子群,但不是 Sylow p-子群,则 $P<N_G(P)$.

引理 7[8] 设 G 的每个极大子群 p-幂零而 G 本身非 p-幂零,则 G 有正规 Sylow p-子群 P,使得 $|G:P|$ 是素数 q 的方幂,其中 $(p\neq q)$,且 G 的每个极大子群是幂零群.

引理 8[9] 设 G 是有限群,p 是 $|G|$ 的一个素因子,$(|G|,p-1)=1$.若 $M\leq G$ 且 $|G:M|=p$,则 $M\trianglelefteq G$.

2 主要结果

定理 1 设 G 是有限群,p 是 $|G|$ 的一个素因子,$(|G|,p-1)=1$.如果 G 中存在一个正规子群 N,使得 G/N 是 p-幂零群,且 N 的每个极小子群在 G 中有 p-幂零 -S-补,那么 G 是 p-幂零群.

证明 假设定理结论不真,选择 G 是一个极小阶反例.则:

(1) G 是内幂零群,$G=[P]Q$,其中 P,Q 性质如引理 4所述.

对 $\forall L<G$,有 $L\cap N\trianglelefteq L$,且 $L/N\cap L\cong NL/N\leq G/N$ 是 p-幂零群.由引理 1,对 $\forall p\in\pi(N\cap L)$,$N\cap L$ 的任意 p 阶子群在 L 中有 p-幂零 -S-补.故 L 满足定理 1的条件,由 G 的选取知 L 是 p-幂零群,从而 G 是内 p-幂零群.由引理 3知 G 是内幂零群,从而 $G=[P]Q$,其中其中 P,Q 性质见引理 4.

(2) $p>2$.

如果 $p=2$,设 $A\leq N$ 且 $|A|=2$.依定理 1条件,存在 G 的子群 K,使得 $G=AK$ 且 $K/K\cap A_G$ 是 2-幂零群.如果 $K\cap A_G=1$,则 K 为 2-幂零群.注意到 $|G:K|=|A:A\cap K|\leq 2$.如果 $|G:K|=1$,则 $G=K$ 是 2-幂零群,矛盾.如果 $|G:K|=2$,则 $K\trianglelefteq G$.设 $K_{2'}$ 为 K 的正规 2-补,由 $K_{2'}\,\mathrm{char}\,K$ 知 $K_{2'}\trianglelefteq G$,从而 G 是 2-幂零群,矛盾.如果 $K\cap A_G\neq 1$,则 $A=A_G$,从而 $K=G$.这表明 G/A 是 2-幂零群.令 H/A 是 G/A 的正规 2-补,则 $H=AH_{2'}$,其中 $H_{2'}$ 是群 H 也是 G 的 $2'$-Hall子群.又由于 $|H:H_{2'}|=2$,从而 $H_{2'}\,\mathrm{char}\,H$,进一步有 $H_{2'}\trianglelefteq G$,从而 G 是 2-幂零群,矛盾.

(3) 导出矛盾.

由 $p>2$ 及引理 4知 $\exp P=p$.由 G/N 的 p-幂零性及引理 5知 $P\leq N$.任取 $x\in P\backslash\Phi(P)$,由定理 1的条件知 $\langle x\rangle$ 在 G 中有 p-幂零 -S-补,从而存在 G 的子群 K,使得 $G=\langle x\rangle K$ 且 $K/K\cap\langle x\rangle_G$ 是 p-幂零群.如果 $K=G$,则 $G/\langle x\rangle_G$ 是 p-幂零群.显然 $\langle x\rangle_G\neq 1$,从而 $\langle x\rangle_G=\langle x\rangle$.由 x 的选取及引理 4知 $\langle x\rangle\Phi(P)=P$,从而 $P=\langle x\rangle$,于是 $N_G(P)/C_G(P)$ 同构于 $p-1$ 阶群的一个子群.由 $(|G|,p-1)=1$ 知 $N_G(P)=C_G(P)$.由引理 2知 G 是 p-幂零群,矛盾.如果 $K<G$,记 $P_1=P\cap K$,则 $K\leq N_G(P_1)$.又由于 $P_1<P$,由引理 6知 $P_1<N_P(P_1)$,从而 $K<N_G(P_1)$.由 $|G:K|=|\langle x\rangle:\langle x\rangle\cap K|$ 整除 p 知 $|G:K|=p$,故 $N_G(P_1)=G$,即 $P_1\trianglelefteq G$.如果 $P_1\not\leq\Phi(P)$,则 $1\neq P_1\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq G/\Phi(P)$.由引理 4知 $P=P_1\leq K$,从而 $K=G$,矛盾.如果 $P_1\leq\Phi(P)$,则 $P=P\cap\langle x\rangle K=\langle x\rangle P_1=\langle x\rangle\Phi(P)$,从而 $P=\langle x\rangle$,于是 $N_G(P)/C_G(P)$ 同构于 $p-1$ 阶群的一个子群.由 $(|G|,p-1)=1$ 知 $N_G(P)=C_G(P)$.由引理 2知 G 是 p-幂零群,矛盾.定理 1证明完毕.

定理 2 设 G 是有限群,p 是 $|G|$ 的一个素因子,$P\in\mathrm{Syl}_p(G)$.如果 $P\cap G'$ 的每个极小子群在 $N_G(P)$ 中有 p-幂零 -S-补,且 $N_G(P)$ 为 p-幂零群,那么 G 是 p-幂零群.

证明 假设定理结论不真,选择 G 是一个极小阶反例.则:

(1) $P\cap G'\leq Z(N_G(P))$.

如果 $P\cap G'=1$,则结论显然成立.如果 $P\cap G'\neq 1$,设 N_1 是 P 的极小正规子群且 $N_1\leq P\cap G'$.由 P 的幂零性知 $N_1\leq Z(P)$ 且 $|N_1|=p$.依定理 2的条件及引理 1知 N_1 在 P 中有 p-幂零 -S-补,从而存在 P 的子群 K_1,使得 $P=N_1K_1$.于是 $P\cap G'=(P\cap G')\cap N_1K_1=N_1((P\cap G')\cap K_1)$.设 N_2 是 $(P\cap G')\cap K_1$ 的极小正规子群.由 $N_1\leq Z(P)$ 知 $(P\cap G')\cap K_1\trianglelefteq P$.同理知 $N_2\leq Z(P)$ 且 $|N_2|=p$.以此类推得 $P\cap G'=N_1\times N_2\times\cdots\times N_s$,其中 $N_i\leq Z(P)$,s 是有限整数.从而 $P\cap G'\leq Z(P)$.依定理 2的条件,$N_G(P)$ 有正规 p-补 H,使得 $N_G(P)=P\times H$.从而 $P\cap G'\leq Z(N_G(P))$.

(2) 导出矛盾.

由引理 7知 G 有子群 L 是内 p-幂零群,从而 L

是内幂零群.由引理 4知 $L=[L_p]L_q$,其中 $p\neq q$. L_p 是 L 的正规 Sylow p-子群, L_q 是 L 的非正规循环 Sylow q-子群.从而 $L=L_q^L$. 若否,则 $L_q^L<L$,由 L_q^L 的幂零性知 $L_q \ \mathrm{char}\ L_q^L$,从而 $L_q\trianglelefteq L$,矛盾. 进一步有 $L_p=[L_p,L_q]$.事实上,由 $L_p\trianglelefteq L$ 知 $[L_p,L_q]\leq L_p$.如果 $[L_p,L_q]<L_p$,由 $[L_p,L_q]\trianglelefteq\langle L_p,L_q\rangle=L$ 知 $[L_p,L_q]L_q<L$,从而 $[L_p,L_q]L_q=[L_p,L_q]\times L_q$,于是 $[L_p,L_q]\leq C_L(L_q)$. 从而 $[L_p,L_q]\leq C_L(L_q^L)=C_L(L)=Z(L)$, $L/Z(L)$ 是幂零群,进而 L 是幂零群,矛盾.从而 $L_p\leq G'$.不妨设 $L_p\leq P$,从而 $L_p\leq P\cap G'$. 由(1)知 $L_p\leq Z(N_G(P))$,从而 $N_G(P)\leq C_G(L_p)$. 记 $A=N_G(L_p)$,由 Frattini 论断知 $A=N_G(L_p)=C_G(L_p)N_A(P)$,从而 $N_G(L_p)=C_G(L_p)$,故 L 是 p-幂零群,矛盾.定理 2证明完毕.

定理 3 设 G是有限群,p是 $|G|$ 的一个素因子,$(|G|,p-1)=1$, $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$.如果 $P\cap G'$的每个极小子群在 $N_G(P)$中有 p-幂零-S-补,那么 G 是 p-幂零群.

证明 假设定理结论不真,选择 G是一个极小阶反例.则:

(1) 如果 $N_G(P)<G$,则 $N_G(P)$满足定理 3的条件,从而 $N_G(P)$是 p-幂零群.由定理 2知 G是 p-幂零群,矛盾.

(2) 如果 $N_G(P)=G$,则 $P\trianglelefteq G$.对 $\forall L<G$且 $R\in\mathrm{Syl}_p(L)$,则 $R\leq P$且 $R=P\cap L$,从而 $R\cap L'=(P\cap L)\cap L'\leq P\cap G'$且 $N_L(R)\leq N_G(P)$.由引理 1知 L满足定理 3的条件.由 G的选取知 L是 p-幂零群,从而 G是内 p-幂零群.由引理 3知 G是内幂零群.设 A是 $P\cap G'$的极小子群,从而存在 G的子群 K,使得 $G=AK$且 $K/K\cap A_G$是 p-幂零群.如果 $K=G$,则 G/A_G是 p-幂零群,显然 $A_G\neq 1$,从而 $A_G=A$.由 $A\trianglelefteq G$及引理 4知 $A\Phi(P)=P$或 $A\leq\Phi(P)$.如果 $P=A\Phi(P)$,则 $P=A$,于是 $N_G(P)/C_G(P)$同构于 $p-1$阶群的一个子群.由 $(|G|,p-1)=1$知 $N_G(P)=C_G(P)$.由引理 2知 G是 p-幂零群,矛盾.如果 $A\leq\Phi(P)$,由 $P\trianglelefteq G$知 $\Phi(P)\leq\Phi(G)$,从而 $A\leq\Phi(G)$,故 $G/\Phi(G)\cong G/A/\Phi(G)/A$是 p-幂零群.进一步有 G是 p-幂零群,矛盾.如果 $K<G$,由 K的幂零性知 $K=K_p\times K_{p'}$. 下面考虑子群 $N_G(K_p)$,如果 $N_G(K_p)=G$,则 $K_p\trianglelefteq G$.由引理 4知 $K_p=P$或 $K_p\leq\Phi(P)$. 如果 $K_p=P$,则 $A\leq K_p$,从而 $G=K$,矛盾. 如果 $K_p\leq\Phi(P)$,则 $P=AK_p=A$,于是 $N_G(P)/C_G(P)$同构于 $p-1$阶群的一个子群.由 $(|G|,p-1)=1$知 $N_G(P)=C_G(P)$.由引理 2知 G是 p-幂零群,矛盾.如果 $N_G(K_p)<G$,则 $|G:N_G(K_p)|=p$.由引理 8知 $N_G(K_p)$是 G的幂零正规子群,从而 G是 p-幂零群,矛盾.

推论 1 设 G是有限群,p是 $|G|$ 的最小素因子,$P\in\mathrm{Syl}_p(G)$. 如果 $P\cap G'$ 的每个极小子群在 $N_G(P)$中有 p-幂零-S-补,那么 G是 p-幂零群.

参考文献:

[1] Kegel O H. On Huppert's characterization of finite supersoluble groups[M]. New York: Proc Internat Conf Theory Groups, 1967.

[2] Kegel O H. Produkte nilpotenter gruppen[J]. Arch Math, 1961, 12: 90-93.

[3] Wang Y. Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups c-supplemented[J]. J Algebra, 2000, 224(2): 467-478.

[4] Miao L, Guo W. Finite groups with some primary subgroups F-S-supplemented [J]. Comm Algebra, 2005, 33(8): 2789-2800.

[5] 徐明曜.有限群导引(上)[M].北京:科学出版社, 1999.

[6] Huppert B. Endliche gruppen I[M]. Berlin: Springer, 1967.

[7] 李世荣,赵先鹤,蒙忠传.关于有限群的补子群[J].广西科学, 2004, 11(3): 161-164.

[8] Robinson D J S. A course in the theory of groups[M]. New York: Springer, 1993.

[9] Miao L. On p-nilpotency of finite groups[J]. Bull Braze Math Soc New Series, 2007, 38(4): 585-594.

(责任编辑:尹 闯)