DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.01.005
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(1): 13～16

收缩临界 5连通图中 5度点的分布

The Distribution of Vertices of Degree 5 in Contraction Critical 5-Connected Graphs

李婷婷
LI Ting-ting

(广西经济管理干部学院公共课教学部,广西南宁 530007)
(Department of Public Teaching, Guangxi Economic Management Cadres College, Nanning, Guangxi, 530007, China)

摘要: 当 G是收缩临界 5连通图,$x\in V(G)$且 $d(x)\geqslant 6$,x_1,x_2为与 x相邻的 5度点时,证明如果 $x_1x_2\in E(G)$,则 x与 3个 5度点相邻.

关键词: 5连通图 收缩临界 断片
中图法分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)01-0013-04

Abstract Let G be a contraction critical 5-connected graph, $x\in V(G)$, $d(x)\geqslant 6$ and $x_1,x_2\in N(x)\cap V_5(G)$. If $x_1x_2\in E(G)$, then there exist 3 vertices of degree 5 in the neighborhood of x.

Key words 5-connected graphs, contraction critical, fragment

对于收缩临界 5连通图中 5度顶点的分布研究已有不少的成果. 1994年袁旭东[1]得到: 收缩临界 5连通图中每一个点都与 1个 5度点相邻.由此可以推出 G中至少有$\frac{1}{5}|G|$个 5度顶点. 1997年苏健基[2]进一步证明: 收缩临界 5连通图中每一个点都与 2个 5度点相邻.由此又可以推出 G中至少有$\frac{2}{5}|G|$个 5度顶点. 2005年, Ando[3]又重复得到袁旭东在 1994年得到的结果. 覃城阜[4]构造图例说明文献[2]中的"2"是最好可能的,并且得到: 设 G是收缩临界 5连通图,$x\in V(G)$且 $d(x)\geqslant 8$, x_1,x_2为与 x相邻的 5度点. 若 $x_1x_2\in E(G)$, 则 x与 3个 5度点相邻.本文在文献[4]的基础上,当 $d(x)\geqslant 6$时得到了与文献[4]同样的结论.

1 相关概念及引理

文中讨论的图都是有限简单图. 如果 k连通图 G中的一条边收缩之后所得到的图仍然 k连通,则称这条边为 G的 k可收缩边.一个不是完全图的 k连通图, 它的一条边 xy不可收缩,当且仅当图中有包含$\{x,y\}$的最小点割.不存在 k可收缩边的非完全 k连通图称为收缩临界 k连通图.显然收缩临界 k连通图中的每一条边都包含在某一个最小点割中.设 $G=(V(G),E(G))$是一个图, 记 $|G|=|V(G)|$.对于 $x\in F\subseteq V(G)$, $N_G(x)$表示 x在 G中的邻域的集合, $N_G(F)=(\bigcup_{x\in F}N_G(x))-F$, 记 $d(x)=|N(x)|$. $V_5(G)$表示图 G中 5度点的集合. 对于 $x\in V(G)$, 令 $\mathrm{V}(x)=|N(x)\cap V_5(G)|$.设 G不是完全图, T是 G的一个最小点割, F是 $G-T$的至少一个连通分支但不是全部连通分支的并,则称 F是 G的断片或 T-断片.为方便起见, 我们常常把 $V(F)$与 F等同起来.设 F是图 G的断片(或 T-断片), $\overline{F}=V(G)-(F\cup N_G(F))$,则 $\overline{F}$也是 G的断片或 T-断片, 且 $N(F)=T=N(\overline{F})$. T_G表示图 G中最小点割的集合, 若 F是 G的断片但 F的任一真子集都不是 G的断片, 则称 F为 G的端片. G中基数最小的断片称为 G的原子.对于图中的断片, 有以下要经常用到的性质[5]. 令 $T,T'\in T_G$, F,F'分别为 T-断片, T'-断片.

如果 $F\cap F'\neq\varnothing$, 那么 $|F\cap T'|\geqslant|\overline{F'}\cap T|$, $|F'\cap T|\geqslant|\overline{F}\cap T'|$. 如果 $F\cap F'\neq\varnothing\neq\overline{F}\cap\overline{F'}$, 那么 $F\cap F'$与 $\overline{F}\cap\overline{F'}$都是 G的断片并且

收稿日期: 2008-06-12
作者简介: 李婷婷(1982-),女,硕士,主要从事图论研究.

$N(F\cap F')=(T\cap F')\cup(T\cap T')\cup(F\cap T')=N(\overline{F}\cup\overline{F}')$, $N(\overline{F}\cap\overline{F}')=(T\cap\overline{F}')\cup(T\cap T')\cup(\overline{F}\cap T')$. 如果 $F\cap F'\neq\varnothing$ 并且 $F\cap F'$ 不是断片，则 $\overline{F}\cap\overline{F}'=\varnothing$, $|F\cap T'|>|\overline{F}'\cap T|$, $|F'\cap T|>|\overline{F}\cap T'|$, $|F|\geqslant|\overline{F}'-\overline{F}|+2=|\overline{F}'|+2$. 其它的图论术语与记号见文献[6].

如果图 G 的每一个断片都有 G 的一个最小点割与它相交，则称 G 为几乎临界连通图. 对于几乎临界连通图与收缩临界连通图有下列性质.

引理 1 设 G 是收缩临界 5连通图，$x\in V(G)$，F 是 G 中的断片且 $x\in N(F)$. 若 $|F|\geqslant 3$, $|\overline{F}|\geqslant 2$，且 $N(x)\cap F=\{x_1\}$，则存在一点 x_2，使得 $x_2\in N(F)\cap N(x)\cap N(x_1)\cap V_5(G)$.

证明 取最小点割 $T_1\supseteq\{x,x_1\}$，设 F_1 是 T_1-断片. 先设 $F\cap F_1\neq\varnothing$，由于 $N(x)\cap(F\cap F_1)=\varnothing$，则 $|(F_1\cap N(F))\cup(N(F)\cap T_1)\cup(F\cap T_1)|\geqslant 6$，于是 $\overline{F}\cap\overline{F}_1=\varnothing$. 若 $F\cap\overline{F}_1\neq\varnothing$，同理可得 $|(\overline{F}_1\cap N(F))\cup(N(F)\cap T_1)\cup(F\cap T_1)|\geqslant 6$ 且 $F_1\cap\overline{F}=\varnothing$. 于是 $|F_1\cap N(F)|\geqslant|\overline{F}|+1\geqslant 3$, $|\overline{F}_1\cap N(F)|\geqslant|\overline{F}|+1\geqslant 3$，由此推出 $|N(F)|\geqslant 7$，矛盾. 若 $F\cap\overline{F}_1=\varnothing$，那么有 $|\overline{F}_1|=|\overline{F}_1\cap N(F)|=1$. 否则，$|\overline{F}_1\cap N(F)|\geqslant 2$, $|T_1\cap F|\geqslant|\overline{F}_1\cap N(F)|+1\geqslant 3$, $|T_1\cap\overline{F}|\leqslant 1$, $F_1\cap\overline{F}=\varnothing$, $|\overline{F}|=1$，与 $|\overline{F}|\geqslant 2$ 矛盾. 于是可以设 $\overline{F}_1=\{x_2\}$，从而有 $x_2\in N(F)\cap N(x)\cap N(x_1)\cap V_5(G)$，引理 1成立. 即若 $F\cap F_1\neq\varnothing$，则引理 1成立，由对称性，若 $F\cap\overline{F}_1\neq\varnothing$，同理引理 1成立.

现在只须证明 $F\subseteq T_1$ 的情形. 若 $F\subseteq T_1$，而 $|F|\geqslant 3$, $x\in T_1\cap N(F)$, $|T_1|=5$，则 $|T_1\cap\overline{F}|\leqslant 1$. 又由 $|\overline{F}|\geqslant 2$，不妨设 $F_1\cap\overline{F}\neq\varnothing$，则 $|F_1\cap N(F)|\geqslant|F|\geqslant 3$, $|\overline{F}_1\cap N(F)|\leqslant 1$, $\overline{F}\cap\overline{F}_1=\varnothing$，进而有 $|\overline{F}_1|=|\overline{F}_1\cap N(F)|=1$. 设 $\overline{F}_1=\{x_2\}$，于是 $x_2\in N(F)\cap N(x)\cap N(x_1)\cap V_5(G)$，引理 1亦成立.

引理 2[1] 设 G 是收缩临界 5连通图，$x\in V(G)$，F 是 G 中的断片且 $x\in N(F)$. 若 $|\overline{F}|\geqslant 2$ 且 $N(x)\cap N(F)\neq\varnothing$，那么 $N(x)\cap(F\cup N(F))\cap V_5(G)\neq\varnothing$.

引理 3[5] 设 G 是几乎临界 k 连通图，则 G 中有 4个断片 F_1,F_2,F_3,F_4 且 $F_1,F_2,F_3,F_4\cap(\bigcup T_G)$ 两两不相交.

引理 4[7] 设 G 是收缩临界 k 连通图，$A\subseteq V(G)$. 如果 A 是 G 的原子，或是单点集，或 $|N_G(A)|\geqslant k$ 并且存在 $(a',t')\in A\times N_G(A)$ 使得对任一 $(a,t)\in A\times N_G(A)-\{(a',t')\}$ 有 $at\in E(G)$，则 $G-A$ 是几乎临界 $k-|A|$ 连通图，并且 $N_G(A)\subseteq\bigcup T_{G-A}$，每一个 $G-A$ 的断片 F 都是 G 的 $N_{G-A}(F)\cup A$-断片.

引理 5 设 G 是收缩临界 5连通图，$B=\{b_1,b_2\}$ 是 G 中的断片. 若 $d(b_1)=6$，则 $G-B$ 是几乎临界 3连通图，$G-B$ 中有断片 F_1,F_2,F_3,F_4，使得 $F_i=\{u_i\}\subseteq V_5(G)$, $i=1,2,3$，且 $\{u_1,u_2,u_3\}\subseteq N(b_1)\cap N(b_2)$, $F_4\cap N(B)\cap\{u_1,u_2,u_3\}=\varnothing$.

证明 由于 $d(b_1)=6$，由引理 4，$G-B$ 是几乎临界 3连通图. 又由引理 3，$G-B$ 中有 4个断片 F_1,F_2,F_3,F_4 使 $F_1\cap N(B)$, $F_2\cap N(B)$, $F_3\cap N(B)$, $F_4\cap N(B)$ 两两不相交. 于是 $4\leqslant\sum_{i=1}^{4}|F_i\cap N(B)|\leqslant 5$. 不妨设 $|F_1\cap N(B)|\leqslant|F_2\cap N(B)|\leqslant|F_3\cap N(B)|\leqslant|F_4\cap N(B)|$，则 $|F_1\cap N(B)|=|F_2\cap N(B)|=|F_3\cap N(B)|=1$, $1\leqslant|F_4\cap N(B)|\leqslant 2$. 对 $i=1,2,3$，可设 $F_i\cap N(B)=\{u_i\}$. 由 $|F_i\cap N(B)|=1<2=|B|=|B\cap N(F_i)|$，有 $F_i\cap\overline{B}=\varnothing$，进而有 $|F_i|=|F_i\cap N(B)|=1$, $u_i\in V_5(G)\cap N(b_1)\cap N(b_2)$，并且 $F_4\cap N(B)\cap\{u_1,u_2,u_3\}=\varnothing$.

引理 6[4] 设 G 是收缩临界 5连通图，$x_1,x_2\in V_5(G)$. 如果 $N(x_1)\cap V_5(G)=\{x_2,y_1\}$, $N(x_2)\cap V_5(G)=\{x_1,y_2\}$ (y_1,y_2 可能相同)，且 $a\in N(x_1)\cap N(x_2)-V_5(G)$，则 $|N(a)\cap V_5(G)|\geqslant 3$.

2 主要结论

定理 1 设 G 是收缩临界 5连通图，$x\in V(G)$ 且 $d(x)\geqslant 6$, x_1,x_2 为与 x 相邻的 5度点. 若 $x_1x_2\in E(G)$，则 x 与 3个 5度点相邻.

证明 用反证法. 假设 $N(x)\cap V_5(G)=\{x_1,x_2\}$. 令 $S=\{y\in V(G)|d(y)\geqslant 6, xy\in E(G)\}$. 取断片 A 满足 $x\in N(A)$, $N(A)\cap S\neq\varnothing$, $A\cap\{x_1,x_2\}=\varnothing$ 且 $|A|$ 最小. 于是 $|A|\geqslant 2$. 设 $y\in N(A)\cap S$. 由引理 2以及 $\mathrm{V}(x)=2$，有 $N(A)\cap\{x_1,x_2\}\neq\varnothing$. 下面证明 $\{x_1,x_2\}\not\subseteq N(A)$. 若 $\{x_1,x_2\}\subseteq N(A)$，可推出 $|N(x_1)\cap A|\geqslant 2$. 因为若 $|N(x_1)\cap A|=1$，由 $y\in N(A)-\{x_1\}$，可知 $A\cap\overline{\{x_1\}}$ 是比 A 的阶更小，且满足条件的断片，矛盾. 同理 $|N(x_2)\cap A|\geqslant 2$. 由此推出 $|N(x_1)\cap\overline{A}|=1$, $|N(x_2)\cap\overline{A}|=1$. 于是 $\overline{A}\cap\overline{\{x_1\}}\neq\varnothing$，否则 $\mathrm{V}(x)$

≥ 3, 矛盾.所以有 $|\overline{A}|\geq 2$. 若 $|\overline{A}|=2$, 设 $\overline{A}-N(x_1)=\{u\}$, 则 $u\in N(x)\cap V_5(G)$, 因而 $V(x)\geq 3$, 矛盾. 于是 $|\overline{A}|\geq 3$. 而 $|N(x_1)\cap\overline{A}|=1$, 设 $N(x_1)\cap\overline{A}=\{t\}$, 由引理 1有 $x_2t\in E(G)$. 由于 $N(x_2)\cap(\overline{A}\cap\overline{\{x_1\}})\neq\varnothing$, $|N(x_2)\cap A|\geq 2$, $\{x,x_1,t\}\subseteq N(x_2)$, 则 $d(x_2)\geq 6$, 矛盾.所以 $\{x_1,x_2\}\not\subseteq N(A)$. 不妨设 $x_1\in N(A)$, $x_2\in\overline{A}$. 易见 $|N(x_1)\cap A|\geq 2$.

断言　若 $|\overline{A}|\geq 2$, 则 $|N(x_1)\cap\overline{A}|\geq 2$.

否则, $|N(x_1)\cap\overline{A}|\leq 1$, 即 $N(x_1)\cap\overline{A}=\{x_2\}$. 由 $|\overline{A}|\geq 2$, 有 $\overline{A}\cap\overline{\{x_1\}}\neq\varnothing$. 若 $|\overline{A}|=2$, 则 $\overline{A}-\{x_2\}\subseteq N(x)\cap V_5(G)$, 因而 $V(x)\geq 3$, 矛盾. 于是 $|\overline{A}|\geq 3$. 取最小点割 $T\supseteq\{x_1,x_2\}$, 设 F 是 T-断片. 若 $\overline{A}\subseteq T$, 而 $|\overline{A}|\geq 3$, 则 $|A\cap T|\leq 1$. 又由 $|A|\geq 2$, 不妨设 $A\cap F\neq\varnothing$, 则 $|F\cap N(A)|\geq|T\cap\overline{A}|\geq 3$, 于是 $|\overline{F}\cap N(A)|\leq 1$, $\overline{F}\cap A=\varnothing$, $|A\cap T|=|\overline{F}\cap N(A)|=1$, 且 $\{x,y\}\subseteq N(A\cap F)$, 所以 $A\cap F$ 是比 A 的阶更小, 且满足条件的断片, 与 A 的最小性矛盾. 于是 $\overline{A}\not\subseteq T$, 不妨设 $F\cap\overline{A}\neq\varnothing$. 由于 $N(x_1)\cap\overline{A}=\{x_2\}$, 则 $N(x_1)\cap(F\cap\overline{A})=\varnothing$, 于是 $|(F\cap N(A))\cup(T\cap N(A))\cup(T\cap\overline{A})|\geq 6$ 且 $A\cap\overline{F}=\varnothing$. 若 $\overline{A}\cap\overline{F}\neq\varnothing$, 同理有 $|(\overline{F}\cap N(A))\cup(T\cap N(A))\cup(T\cap\overline{A})|\geq 6$ 且 $A\cap F=\varnothing$. 而 $|A|\geq 2$, $|F\cap N(A)|\geq|A|+1\geq 3$, $|\overline{F}\cap N(A)|\geq|A|+1\geq 3$, $x_1\in T\cap N(A)$, 由此推出 $|N(A)|\geq 7$, 矛盾. 于是 $\overline{A}\cap\overline{F}=\varnothing$. 若 $|\overline{F}\cap N(A)|\geq 2$, 则 $|\overline{A}\cap T|\geq|\overline{F}\cap N(A)|+1\geq 3$, $|A\cap T|\leq 1$, $A\cap F=\varnothing$, 进而有 $|A|=1$, 与 $|A|\geq 2$ 矛盾. 于是 $|\overline{F}\cap N(A)|=1$. 设 $\overline{F}\cap N(A)=\{t\}$, 则 $|N(t)\cap\overline{A}|\geq 2$. 又由 A 的最小性知 $|N(t)\cap A|\geq 2$. 于是 $|N(t)\cap A|=|N(t)\cap\overline{A}|=2$, $|F\cap N(A)|=3$. 设 $N(t)\cap\overline{A}=\{x_2,t^*\}$, $F\cap N(A)=\{x,y,u\}$.

若 $x_2t^*\in E(G)$, 而 $\{x,x_1,t\}\subseteq N(x_2)$, 则 $|N(x_2)\cap(F\cap\overline{A})|=1$. 设 $N(x_2)\cap(F\cap\overline{A})=\{s\}$. 显然 $|\overline{A}\cap F|\geq 2$, 否则 $V(x)\geq 3$, 矛盾.令 $F'=\overline{A}\cap F-\{s\}\neq\varnothing$, 则 F' 是断片, $N(F')=\{s,t^*,x,y,u\}$.而 $|\overline{F'}|\geq 2$, 由引理 2有 $N(x)\cap(F'\cup N(F'))\cap V_5(G)\neq\varnothing$, $V(x)\geq 3$, 矛盾. 于是 $x_2t^*\notin E(G)$. 令 $M=\overline{A}-\{x_2\}$, 则 M 是断片, $N(M)=\{x,y,u,x_2,t\}$, $N(t)\cap M=\{t^*\}$. 于是 $|M|\geq 3$, $|\overline{M}|\geq 3$. 由引理 1知存在 $f\in N(M)\cap N(t)\cap N(t^*)\cap V_5(G)$, 这时只能是 $f=x_2$, 但是 $x_2t^*\notin E(G)$, 矛盾.由此得断言成立.

情形 1　$|A|=2$. 令 $A=\{z_1,z_2\}$, $N(A)=\{x,x_1,y,y_1,y_2\}$.设 $z_1\in N(x)$, 则 $d(z_1)=6$. 由引理 5, $y_1,y_2\in V_5(G)$. 若 $|\overline{A}|=1$, 即 $\overline{A}=\{x_2\}$, 则 $x\in V_5(G)$, 矛盾.于是 $|\overline{A}|\geq 2$, 由断言有 $|N(x_1)\cap\overline{A}|\geq 2$,则 $|N(x_1)\cap A|=|N(x_1)\cap\overline{A}|=2$, $N(x_1)\cap A=\{z_1,z_2\}$.设 $N(x_1)\cap\overline{A}=\{x_2,t\}$, 由引理 2, $N(x_1)\cap(A\cup N(A))\cap V_5(G)\neq\varnothing$, 由此推出 $z_2\in V_5(G)$, 因而 $xz_2\notin E(G)$.取最小点割 $T_1\supseteq\{x_1,z_2\}$, 设 F_1 是 T_1-断片, 则 $z_1\in T_1$. 由 $d(x)\geq 6$, $d(y)\geq 6$, $x_1y_1,x_1y_2\notin E(G)$, 有 $|F_1\cap N(A)|=2=|\overline{F_1}\cap N(A)|$, $|\overline{A}\cap T_1|=2$. 不妨设 $x\in F_1\cap N(A)$, 于是 $F_1\cap\overline{A}\neq\varnothing$. 否则, $x\in V_5(G)$, 矛盾. 又有 $\overline{F_1}\cap\overline{A}\neq\varnothing$. 否则 $N(x_1)\cap\overline{F_1}=\varnothing$, 矛盾.所以 $F_1\cap\overline{A}$ 与 $\overline{F_1}\cap\overline{A}$ 都是断片,而 $\{z_1,z_2,x\}\subseteq N(x_1)$, 则 $|N(x_1)\cap(F_1\cap\overline{A})|=1=|N(x_1)\cap(\overline{F_1}\cap\overline{A})|$, $x_2\in F_1\cap\overline{A}$, $t\in\overline{F_1}\cap\overline{A}$. 若 $|F_1\cap\overline{A}|=1$, 则 $F_1\cap\overline{A}=\{x_2\}$. 由文献 [2],可知 $|N(x_2)\cap V_5(G)|\geq 2$, 由此推出 $x\in V_5(G)$, 矛盾.若 $|F_1\cap\overline{A}|=2$, 令 $F_1\cap\overline{A}=\{x_2,z\}$. 由于 $x_1z\notin E(G)$, 则 $z\in V_5(G)$, $xz\in E(G)$, $V(x)\geq 3$, 矛盾. 于是 $|F_1\cap\overline{A}|\geq 3$.

令 $M=F_1\cap\overline{A}$, 则 $|M|\geq 3$, $|\overline{M}|\geq 5$. 由于 $N(x_1)\cap M=\{x_2\}$, 由引理 1知存在 $f\in N(M)\cap N(x_1)\cap N(x_2)\cap V_5(G)$, 但 $N(M)\cap N(x_1)=\{x\}$, $x\notin V_5(G)$, 矛盾.

情形 2　$|A|\geq 3$. 取 $z\in N(x)\cap A$, 最小点割 $T\supseteq\{x,z\}$, 并设 F 是 T-断片. 首先证明 $A\not\subseteq T$. 若 $A\subseteq T$, 则 $|A|=3$. 否则, $|A\cap T|=|A|\geq 4$, 有 $\overline{A}\cap T=\varnothing$.不妨设 $\overline{A}\cap F\neq\varnothing$, 则 $|N(A)\cap F|\geq|A\cap T|\geq 4$, $\overline{F}\cap N(A)=\varnothing$, $\overline{F}\cap\overline{A}=\varnothing$, 即 $\overline{F}=\varnothing$, 矛盾. 设 $A=\{z,z_1,z_2\}$, 若 $|\overline{A}|=1$,由于 $F\cap N(A)\neq\varnothing\neq\overline{F}\cap N(A)$, 则 $x_2\in T$. 不妨设 $x_1\in\overline{F}$. 若 $|\overline{F}\cap N(A)|=1$, 设 $F\cap N(A)=\{y,y_1,y_2\}$. 由文献 [2]有 $|N(x_1)\cap V_5(G)|\geq 2$, $|N(x_2)\cap V_5(G)|\geq 2$. 不妨设 $z_1,y_1\in V_5(G)$, 若 $|N(x_1)\cap V_5(G)|\geq 3$或 $|N(x_2)\cap V_5(G)|\geq 3$, 则 $x\in V_5(G)$, 矛盾. 于是 $|N(x_1)\cap V_5(G)|=2$, $|N(x_2)\cap V_5(G)|=2$,由引理 6, $V(x)\geq 3$, 矛盾. 若 $|\overline{F}\cap N(A)|=2$, 则 $|F\cap N(A)|=2$. 于是 $d(y)=6$, 由引理 5, $z_1,z_2\in V_5(G)$, 因而 $N(x)\cap A=\{z\}$. 又由文献 [2], $|N(x_2)\cap V_5(G)|\geq 2$, 则 $x\in V_5(G)$, 矛盾.若 $|\overline{F}\cap N(A)|=3$, 则 $|F\cap$

$N(A)| = 1$, $V(x) \geq 3$, 矛盾. 于是 $|\overline{A}| \geq 2$. 由于 $|A| = 3$, 则 $|\overline{A} \cap T| \leqslant 1$, 而 $|\overline{A}| \geq 2$, 不妨设 $F \cap \overline{A} \neq \varnothing$. 于是有 $|F \cap N(A)| \geq |A| \geq 3$, $|\overline{F} \cap N(A)| \leqslant 1$, $\overline{F} \cap \overline{A} = \varnothing$, 进而有 $|\overline{F}| = |\overline{F} \cap N(A)| = 1$. 设 $\overline{F} = \{t\}$, 则 $t \in V_5(G)$, $|N(t) \cap \overline{A}| = 1$. 由断言可知, $|N(x_1) \cap \overline{A}| \geq 2$, 那么 $t \neq x_1$, $V(x) \geq 3$, 矛盾. 所以 $A \not\subseteq T$.

再证明 $N(x) \cap A \subseteq N(x_1) \cap A$, $|N(x) \cap A| \leqslant 2$. 不妨设 $F \cap A \neq \varnothing$. 由 A 的最小性有 $|(F \cap N(A)) \cup (T \cap N(A)) \cup (T \cap A)| \geq 6$, 则 $\overline{F} \cap \overline{A} = \varnothing$. 若 $\overline{F} \cap A \neq \varnothing$, 同理有 $|(\overline{F} \cap N(A)) \cup (T \cap N(A)) \cup (T \cap A)| \geq 6$ 且 $F \cap \overline{A} = \varnothing$. 由此推出 $|\overline{A}| = 1$, $|F \cap N(A)| = 2 = |\overline{F} \cap N(A)|$, $|A \cap T| = 3$. 不妨设 $x_1 \in \overline{F} \cap N(A)$. 而 $|F| < |A|$, 与 A 的最小性矛盾, 于是 $\overline{F} \cap A = \varnothing$. 若 $|\overline{F}| = |\overline{F} \cap N(A)| \geq 2$, 则 $|F \cap N(A)| \leqslant 2$, $|A \cap T| \geq |\overline{F} \cap N(A)| \geq 2 + 1 = 3$, $F \cap \overline{A} = \varnothing$, $|\overline{A} \cap T| \leqslant 1$, $|\overline{A}| = |\overline{A} \cap T| = 1$, $|A \cap T| = 3$, $|F \cap N(A)| = 2 = |\overline{F} \cap N(A)|$. 当 $x_1 \in F$ 时, 由于 $|\overline{F}| < |A|$, 则与 A 的最小性矛盾. 当 $x_1 \in \overline{F}$ 时, 由于 $|F| < |A|$, 也与 A 的最小性矛盾. 于是 $|\overline{F}| = 1$, $\overline{F} = \{x_1\}$, $z \in N(x_1) \cap A$. 由 z 的任意性有 $N(x) \cap A \subseteq N(x_1) \cap A$. 显然 $2 \leqslant |N(x_1) \cap A| \leqslant 3$, 由此有 $|N(x) \cap A| \leqslant 2$. 否则, $|N(x) \cap A| = 3$, $N(x) \cap A = N(x_1) \cap A$. 而由文献[2], $|N(x_1) \cap V_5(G)| \geq 2$, $V(x) \geq 3$, 矛盾.

若 $|\overline{A}| = 1$, 即 $\overline{A} = \{x_2\}$. 设 $N(A) = \{x, x_1, y, y_1, y_2\}$. 当 $|N(x_1) \cap A| = 2$ 时, 设 $N(x_1) \cap A = \{z, z_1\}$. 若 $y \in N(x_1) \cap N(A)$, 则 $N(A) \cap \overline{\{x_1\}} = \{y_1, y_2\}$. 由文献[2], $|N(x_1) \cap V_5(G)| \geq 2$, $|N(x_2) \cap V_5(G)| \geq 2$, 则 $z_1 \in V_5(G)$, 且不妨设 $y_1 \in V_5(G)$, 由此有 $x \in V_5(G)$, 矛盾. 若 $y \in N(A) \cap \overline{\{x_1\}}$, 不妨设 $N(A) \cap \overline{\{x_1\}} = \{y, y_1\}$, $N(x_1) \cap N(A) = \{x, y_2\}$. 再由文献[2]有 $|N(x_1) \cap V_5(G)| \geq 2$, $|N(x_2) \cap V_5(G)| \geq 2$. 若 $|N(x_1) \cap V_5(G)| \geq 3$ 或 $|N(x_2) \cap V_5(G)| \geq 3$, 则 $x \in V_5(G)$, 矛盾. 于是 $|N(x_1) \cap V_5(G)| = 2$, $|N(x_2) \cap V_5(G)| = 2$, 由引理 6, $V(x) \geq 3$, 矛盾. 当 $|N(x_1) \cap A| = 3$ 时, 设 $N(x_1) \cap A = \{z, z_1, z_2\}$, 则 $N(A) \cap \overline{\{x_1\}} = \{y, y_1, y_2\}$. 还由文献[2]有 $|N(x_1) \cap V_5(G)| \geq 2$, $|N(x_2) \cap V_5(G)| \geq 2$, 不妨设 $z_1, y_1 \in V_5(G)$. 若 $|N(x_1) \cap V_5(G)| \geq 3$ 或 $|N(x_2) \cap V_5(G)| \geq 3$, 则 $x \in V_5(G)$, 矛盾. 于是 $|N(x_1) \cap V_5(G)| = 2$, $|N(x_2) \cap V_5(G)| = 2$, 由引理 6, $V(x) \geq 3$, 矛盾. 所以 $|\overline{A}| \geq 2$, 由断言有 $|N(x_1) \cap \overline{A}| \geq 2$. 于是 $|N(x_1) \cap A| = 2 = |N(x_1) \cap \overline{A}|$, 设 $N(x_1) \cap A = \{z, z_1\}$. 取最小点割 $T_1 \supseteq \{x_1, z_1\}$, 设 F_1 是 T_1-断片. 若 $A \subseteq T_1$, 则 $|A \cap T_1| = |A| \geq 3$, $|\overline{A} \cap T_1| \leqslant 1$. 而 $|\overline{A}| \geq 2$, 不妨设 $F_1 \cap \overline{A} \neq \varnothing$, 则 $|N(A) \cap F_1| \geq |A \cap T_1| \geq 3$, 于是 $|N(A) \cap \overline{F}_1| \leqslant 1$, 进而有 $\overline{A} \cap \overline{F}_1 = \varnothing$, 所以 $|\overline{F}_1| = |N(A) \cap \overline{F}_1| = 1$, $\overline{F}_1 = \{x\}$, $x \in V_5(G)$, 矛盾. 不妨设 $F_1 \cap A \neq \varnothing$, 若 $|X_1| = |(A \cap T_1) \cup (N(A) \cap T_1) \cup (N(A) \cap F_1)| = 5$, 则 $N(x_1) \cap (F_1 \cap A) \neq \varnothing$, $z \in F_1 \cap A$, $x \in X_1$. 若 $F_1 \cap A = \{z\}$, 则 $V(x) \geq 3$, 矛盾. 若 $|F_1 \cap A| \geq 2$, 则 $(X_1 - \{x, x_1\}) \cup \{z\}$ 是 4点割, 矛盾. 所以 $|X_1| \geq 6$, $\overline{A} \cap \overline{F}_1 = \varnothing$. 若 $A \cap \overline{F}_1 \neq \varnothing$, 同理 $|(A \cap T_1) \cup (N(A) \cap T_1) \cup (N(A) \cap \overline{F}_1)| \geq 6$ 且 $\overline{A} \cap F_1 = \varnothing$. 由 $|\overline{A} \cap T_1| = |\overline{A}| \geq 2$, 有 $|F_1 \cap N(A)| \geq |\overline{A} \cap T_1| + 1 \geq 3$, $|\overline{F}_1 \cap N(A)| \geq |\overline{A} \cap T_1| + 1 \geq 3$, 进而有 $|N(A)| \geq 7$, 矛盾. 于是 $A \cap \overline{F}_1 = \varnothing$. 若 $|\overline{F}_1 \cap N(A)| \geq 2$, 则 $|A \cap T_1| \geq |\overline{F}_1 \cap N(A)| + 1 \geq 3$. 于是 $|\overline{A} \cap T_1| \leqslant 1$, $\overline{A} \cap F_1 = \varnothing$, $|\overline{A}| = |\overline{A} \cap T_1| \leqslant 1$, 与 $|\overline{A}| \geq 2$ 矛盾. 所以 $|\overline{F}_1| = |\overline{F}_1 \cap N(A)| = 1$, $\overline{F}_1 = \{x\}$, $x \in V_5(G)$, 矛盾. 定理 1证明完毕.

参考文献:

[1] 袁旭东. 5连通图的可收缩边[J]. 广西师范大学学报: 自然科学版, 1994(3): 30-32.

[2] 苏健基. 收缩临界 5连通图中的 5度顶点[J]. 广西师范大学学报: 自然科学版, 1997(3): 12-16.

[3] Kiyoshi Ando, Atsushi Kaneko, Kenichi Kawarabayashi. Vertices of degree 5 in a contraction critically 5-connected graph[J]. Graphs Combin, 2005, 21: 27-37.

[4] 覃城阜. 收缩临界 5连通图的性质[D]. 桂林: 广西师范大学, 2004.

[5] Mader W. Generalizations of critical connectivity of graphs[J]. Discrete Math, 1988, 72: 267-283.

[6] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications[M]. New York: Macmillan, 1976.

[7] Kriesell M. A degree sum condition for the existence of a contractible edge in a k-connected graph[J]. J Combin Theory: Ser B, 2001, 82: 81-101.

(责任编辑: 尹 闯)