DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.01.006
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(1): 17~ 22

局部凸空间的平均一致凸性与平均一致光滑性*

Average Uniform Convexity and Average Uniform Smoothness in Locally Convex Spaces

林尤武[1],魏文展[2],唐献秀[1]
LIN You-wu[1], WEI Wen-zhan[2], TANG Xian-xiu[1]

(1.广西师范学院数学与计算机科学系,广西南宁 530023; 2.广西经贸职业技术学院,广西南宁 530021)
(1. Department of Mathematics and Computer Science, Guangxi Teachers Education University, Nanning, Guangxi, 530023, China; 2. Guangxi Economic Trade Polytechnic, Nanning, Guangxi, 530021, China)

摘要:引进局部凸空间的平均一致凸性的概念,给出其对偶的定义,得到平均一致凸(平均一致光滑)的局部凸空间的特征刻画及其在 P-自反条件下的对偶关系:(X,P)是平均一致凸(平均一致光滑)的当且仅当(X',P')是平均一致光滑(平均一致凸)的.
关键词:局部凸空间 平均一致凸性 平均一致光滑性 对偶关系 P-自反
中图法分类号: O177 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)01-0017-06

Abstract The definition of average uinform converxity in locally conver spaces is introduced, and we give the definition of average uniform smoothness in locally conver spaces as the dual of average uniform converxity, and obtained some necessary and sufficient conditions of average uinform converxity (average uniform smoothness) in locally conver spaces. In addition, on the conditions of P-reflexivity, we obtained the dual relations of between average uinform converxity and average uniform smoothness, also, (X, P) is average uinform converxity (average uinform smoothness) if and only if (X', P') is average uinform smoothness (average uinform converxity).
Key words locally conver spaces, average uniform converxity, average uniform smoothness, dual theorem, P-reflexivity

1977年 Diminnie和 White[1]引进局部凸空间的严格凸. 1989年国起和吴从炘[2]给出与文献[1]等价的严格凸,并且定义其对偶,即局部凸空间光滑,还建立了它们之间的对偶关系. 随后他们又给出一致凸的局部凸空间[3]. 1995年白国仲[4]对 Banach 空间引进平均一致凸和平均局部(平均弱局部)一致凸,并且证明平均一致凸性和空间的自反性与所讨论的最佳逼近问题都有着密切的联系. 本文将平均一致凸性推广到局部凸空间,给出平均一致光滑性的概念,并建立它们之间的对偶关系.

1 相关概念

设 X 是实线性空间,P 是 X 上的一族半范数,且满足$\bigcap_{p\in P} p^{-1}(0)=0$,其中 $p^{-1}(0)=\{x\in X: p(x)=0\}$(这样的半范数族 P 常称为分离的). 令 T_P 是半范数族 P 生成的 X 上的局部凸拓扑,则 (X, T_P)是局部凸 Hausdorff空间,简称局部凸空间. 此时称(T, P)为一个 Hausdorff偶对,简称偶对. 文后凡是提到局部凸空间(X, T_P)时,总意味着 T_P 是由 X 上的某一分离的半范数族 P 生成的.

对每个 $p\in P$,考虑半范空间(X,p). 用$(X,p)'$表示(X,p)上连续线性泛函全体作成的对偶空间,其中范数定义为$\|f\|'_p=\sup_{p(x)\leq 1}|f(x)|$, $\forall f\in (X,p)'$, $(X,p)'$按范数$\|\cdot\|'_p$是一个 Banach空间[2].

收稿日期: 2008-10-21
作者简介: 林尤武(1984-),男,硕士研究生,主要从事泛函分析研究.
* 广西自然科学基金项目[桂科自 0728050]资助.

用 $X'=(X,T_P)'$ 表示 (X,T_P) 的拓扑对偶空间，并对每个 $p\in P$，考虑 X' 的线性子空间 $X'(p)=\{f\in X':\sup_{p(x)\leqslant 1}|f(x)|<+\infty\}$.

引入几个常用的记号：对任意 $p\in P$，令 $U_p(X)=\{x\in X:p(x)\leqslant 1\}$，$S_p(X)=\{x\in X:p(x)=1\}$，即 $U_p(X)$ 和 $S_p(X)$ 分别表示半范空间 (X,p) 中的单位球和单位球面，$S(X'(p))=\{f\in X'(p):\|f\|'_p=\sup_{p(x)\leqslant 1}|f(x)|=1\}$，$U(X'(p))=\{f\in X'(p):\|f\|'_p=\sup_{p(x)\leqslant 1}|f(x)|\leqslant 1\}$.

对任意 $p\in P$，$x\in S_p(X)$，令 $\sum_p(x)=\{f\in X'(p):\|f\|'_p=1$ 且 $f(x)=1\}$，由 Hahn-Banach 定理知道 $\sum_p(x)$ 是非空的.

对任意正数族 $\{C_P>0:p\in P\}$，记 $B\{C_P\}=\{x\in X:p(x)\leqslant C_p,p\in P\}$，易知 $B\{C_p\}$ 是 (X,T_P) 中的绝对凸有界闭集. 对每个 $B\{C_p\}$，定义 X' 上的半范数[2]：$p'_{B\{C_p\}}(f)=\sup_{x\in B\{C_p\}}|f(x)|$（任意的 $f\in X'$），并且称 $p'_{B\{C_p\}}$ 是由 $B\{C_p\}$ 决定的半范数. 记 P' 是形如 $p'_{B\{C_p\}}$ 的半范数的全体，容易验证 P' 生成的 X' 上的局部凸拓扑恰好就是 X' 上的强拓扑 $(X',T_{P'})$. 对以上得到的 X' 的半范数 p'，考虑任意正数族 $\{C_{p'}>0:p'\in P'\}$. 记 $B\{C_{p'}\}=\{f\in X':p'(f)\leqslant C_{p',p'\in P'}\}$，对每个 $B\{C_{p'}\}$，在 $X''=(X',T_{P'})'$ 上定义半范数 $p''_{B\{C_{p'}\}}(F)=\sup_{f\in B\{C_{p'}\}}|F(f)|$（任意的 $F\in X''$），则形如 $P''_{B\{C_{p'}\}}$ 的半范数的全体 p'' 生成 X'' 上的强拓扑 $(X'',T_{P''})$. 还可以知道 $X''=(X'',T_{P'})'$[4]. 记 $J:X\to X''$，其中 $Jx=\hat{x}$，对任意的 $x\in X$，显然 $J(X)=\hat{X}$，其中 $\hat{X}=\{x\in X'':x\in X\}$，因而 $J(X)\subset X''$.

定义 1.1[5]　设 P 是实线性空间 X 上的一族半范数，B 是 (X,T_P) 中形如 $B\{C_p\}$ 的绝对凸有界闭集，若存在 $p\in P$，有 $C_p=1$，则称相应的 $B\{C_p\}$ 为一个 p-正规集.

为方便起见，以下用一个字母 B 来表示 p-正规集 $B\{C_p\}$.

定义 1.2[5]　设 X,P,P'',J 均如上述定义，局部凸空间 (X,T_P) 是半自反的，即 $J(X)=X''$，若对任意 $p''\in P''$，存在 $p\in P$，$\lambda>0$，使得对任意 $x\in X$，有 $p''(Jx)=\lambda p(x)$，则称局部凸空间 (X,T_P) 是 P-自反的. 换句话说 (X,T_P) 是 P-自反的当且仅当 (X,T_P) 是半自反的且对任意 $p''\in P''$，存在 $p\in P$ 和 $\lambda>0$，使得 $p''\circ J=\lambda p$ 成立.

注 1.1　文献 [5] 已经证明 P-自反的空间 (X,T_P) 是自反的，但反之不成立，且说明对赋范空间而言，P-自反和自反等价，因此 P-自反概念是赋范空间中自反概念的自然推广.

定义 1.3[5]　设 p_1,p_2 是 X 上的两个半范数，若存在 $\lambda>0$，使得 $p_1=\lambda p_2$，则称半范数 p_1,p_2 是绝对等价的.

定义 1.4[5]　设 P 是 X 上的半范数族，若 P 中的任意两个半范数都不绝对等价，则称 P 是良好的半范数族.

定义 1.5[5]　设 P 是 X 上的半范数族，P_1 是 X 上一个良好化的半范数族，$P_1\subset P$ 且 P 中任意元素都和 P_1 中某个元素是绝对等价的，则称 P_1 是 P 的良好化.

引理 1.1[5]　对任意的 $p\in P$ 和 $x\in(X,T_P)$，有 $p(x)=\sup_{f\in U(X'(p))}|f(x)|$，其中 $U(X'(p))=\{f\in X'(p):\|f\|'_p\leqslant 1\}$ 是 X' 中的绝对凸 w^* 紧集.

引理 1.2[5]　对任意的 $p\in P$，$X'(p)=(X,P)'$ 成立，并且当 $f\in X'(p)$ 时，有 $\|f\|'_p=\sup_{x\in U_p(X)}f(x)=\sup_{x\in S_p(X)}f(x)$，$|f(x)|\leqslant\|f\|'_p\cdot p(x)$（任意的 $x\in X$）.

引理 1.3[5]　若 (X,T_P) 是 P-自反的，则自然嵌入映射 $J:X\to X''$ 是到上同胚，因此 $J(T_P)=T_{P''}$，即 $J(\{G\subset X:G\in T_P\})=\{G''\subset X'':G''\in T_{P''}\}$；若 (X,T_P) 是 P-自反的，且 P 是良好的，记 $B\{C_{p''}\}=\{F\in X'':p''(F)\leqslant C_{p''},\forall p''\in P''\}$，则存在 $B\{C_p\}=\{x\in X:p(x)\leqslant C_p,\forall p\in P\}$，使得 $B\{C_{p''}\}=J(B\{C_p\})$.

引理 1.4[5]　若 (X,T_P) 是 P-自反的，则 $(X',T_{P'})$ 和 $(X'',T_{P''})$ 分别是 P'-自反和 P''-自反的.

引理 1.5[5]　设 P 是实线性空间 X 上的一半范数族，P_1 是 P 的良好化且 $P_1\subset P$，则 $T_P=T_{P_1}$.

2　平均一致凸的局部凸空间

定义 2.1　称偶对 (X,P) 为平均一致凸的，若对任意 $p\in P$，$\{x_n\},\{y_n\}\subset U_p(X)$，且 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是 T_P 有界的，当 $\lim_n p(x_n+y_n)=2$ 时，有 $\lim_n p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i)=0$.

注 2.1　当生成 X 上局部凸拓扑 T_P 的这一族半范数 P 是由一个元素 p 构成的，并且 p 还是一个范数时，局部凸 Hausdorff 空间 (X,T_P) 就是一个 Banach 空间，这时定义 2.1 正好是 Banach 空间相应

的定义[3].

定理 2.1　偶对 (X, P) 是平均一致凸的,当且仅当任意的 $p \in P$, $\mathrm{X} > 0$, X 中任意 p-正规集 B 存在 $\mathrm{W} > 0$,使得当 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset B$ 且 $P(\frac{x_n + y_n}{2}) > 1 - \mathrm{W}$ 时,有 $p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i) < \mathrm{X}$.

证明　必要性.假设存在 $p \in P$ 和 X 中某一正规集 B,并且 $\mathrm{X}_0 > 0$.对任意的 $\mathrm{W} > 0$,都存在 $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset B$,满足 $P(\frac{x_n + y_n}{2}) > 1 - \mathrm{W}$,但是 $p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i) \geqslant \mathrm{X}_0$.取 $\mathrm{W} = \frac{1}{2}$,则存在 $\{x_{1(n)}\}, \{y_{1(n)}\} \subset B$,满足 $P(\frac{x_{1(n)} + y_{1(n)}}{2}) > 1 - \frac{1}{2}$,但是 $p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i) \geqslant \mathrm{X}_0$.取 $\mathrm{W} = \frac{1}{3}$,则存在 $\{x_{2(n)}\}, \{y_{2(n)}\} \subset B$,满足 $P(\frac{x_{2(n)} + y_{2(n)}}{2}) > 1 - \frac{1}{3}$,但是 $p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i) \geqslant \mathrm{X}_0$.一般地取 $\mathrm{W} = \frac{1}{n+1}$,则存在 $\{x_{n(n)}\}$, $\{y_{n(n)}\} \subset B$,满足 $P(\frac{x_{n(n)} + y_{n(n)}}{2}) > 1 - \frac{1}{n+1}$,但是 $p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i) \geqslant \mathrm{X}_0$.

因为 B 是一个 p-正规集,所以我们得到 B 中两个序列 $\{x_{n(n)}\}$, $\{y_{n(n)}\}$,且 $1 - \frac{1}{n+1} < P(\frac{x_{n(n)} + y_{n(n)}}{2}) \leqslant \frac{1}{2}[p(x_{n(n)}) + p(y_{n(n)})] \leqslant 1$,得到 $\lim_n p(x_{n(n)} + y_{n(n)}) = 2$,但是 $p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i) \geqslant \mathrm{X}_0$.这与 (X, P) 是平均一致凸的矛盾.

充分性.假设 (X, P) 不是平均一致凸的,由定义 2.1知,存在 $p \in P$, $\{x_n\}, \{y_n\} \subset U_p(X)$,且 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 是 T_P 有界的,满足 $\lim_n p(\frac{x_n + y_n}{2}) = 1$,但是 $\lim_n p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i) \neq 0$,因此,存在 $\mathrm{X}_0 > 0$ 和自然数子列 $\{n_k\}$,使得 $p(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{ni} - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_{ni}) \geqslant \mathrm{X}_0$(任意的 $k \in \mathrm{N}$).不妨设

$$p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_n) \geqslant \mathrm{X}_0, n \in \mathrm{N}. \quad (1)$$

令 $B \overset{\triangle}{=} \{z \in X : p(z) \leqslant 1, q(z) \leqslant \sup_n q(x_n) + \sup_n q(y_n)\}$,对任意的 $q \in P/\{p\}$,则 B 是 X 中的 p-正规集,且显然有 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset B$.

由已知条件,对上述 p, X_0 存在 $\mathrm{W} > 0$,使得当 $\{x'_n\}, \{y'_n\} \subset B$,满足 $p(\frac{x'_n + y'_n}{2}) > 1 - \mathrm{W}$ 时,有

$$p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y'_n) < \mathrm{X}_0. \quad (2)$$

由于 $\lim_n p(\frac{x_n + y_n}{2}) = 1$,故对如上所述的 W,存在 $N \in \mathrm{N}$,当 $n > N$ 时,有 $p(\frac{x_n + y_n}{2}) > 1 - \mathrm{W}$,由(2)式有 $p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_n) < \mathrm{X}_0$.这与(1)式矛盾.

3 平均一致光滑的局部凸空间

定义 3.1　称偶对 (X, P) 为平均一致光滑的,若对任意 $p \in P$, X 中任意 p-正规集 B 决定的 X' 的半范数 p'_B,当 $\{f_n\}$, $\{g_n\} \subset U(X'(p))$,满足 $\lim_n p'_B(f_n + g_n) = 2$ 时,有 $\lim_n p'_B(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i) = 0$.

定理 3.1　偶对 (X, P) 为平均一致光滑的,当且仅当对任意 $p \in P$,任取 $\lambda \in (0, 1)$, X 中任意 p-正规集 B 决定的 X' 半范数 p'_B,当 $\{f_n\}$, $\{g_n\} \subset U(X'(p))$,满足 $\lim_n p'_B(\lambda f_n + (1-\lambda)g_n) = 1$ 时,有 $\lim_n p'_B(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i) = 0$.

证明　必要性.设 p'_B 是由任意 p-正规集 B 决定的 X' 的半范数,任取 $\lambda \in (0, 1)$,存在 $\{f_n\}$, $\{g_n\} \subset U(X'(p))$,当 $\lim_n p'_B(\lambda f_n + (1-\lambda)g_n) = 1$,但是 $\lim_n p'_B(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i) \neq 0$ 时,不妨设 $p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i) \geqslant \mathrm{X}_0$,其中 $\mathrm{X}_0 > 0$.

若 $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$,记 $h_n = 2(1-\lambda)(g_n - f_n) + f_n$,则 $p'_B(h_n) = p'_B[2(1-\lambda)(g_n - f_n) + f_n] = p'_B[(2\lambda - 1)f_n + 2(1-\lambda)g_n] \leqslant (2\lambda - 1)p'_B(f_n) + 2(1-\lambda)p'_B(g_n) \leqslant 2\lambda - 1 + 2(1-\lambda) = 1$,所以 $\{h_n\} \subset U(X'(p))$,并且 $p'_B(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i) = p'_B(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f_i - h_i)) = \frac{1}{n}p'_B(\sum_{i=1}^{n} 2(1-\lambda)(g_i - f_i)) = \frac{2(1-\lambda)}{n}p'_B(\sum_{i=1}^{n}(g_i - f_i)) \geqslant 2(1-\lambda)\mathrm{X}_0 > 0$.

另一方面,由 $\lambda f_n + (1-\lambda)g_n = \frac{1}{2}(f_n + h_n)$ 知,

$\lim\limits_n p'_B(f_n + h_n) = 2\lim\limits_n p'_B(\lambda f_n + (1-\lambda)g_n) = 2$. 这与 (X,P) 是平均一致光滑的矛盾. 若 $\lambda < \frac{1}{2}$, 记 $h_n = 2(1-\lambda)(f_n - g_n) + g_n$, 可用上面类似的方法得出矛盾.

综上所述, $\lim\limits_n p'_B(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n f_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n g_i) = 0$.

充分性. 取 $\lambda = \frac{1}{2}$, 由定义 3.1 可知偶对 (X,P) 是平均一致光滑的.

4 对偶关系

定理 4.1 (1) 若偶对 (X',P') 是平均一致凸的, 则 (X,P) 是平均一致光滑的. (2) 若偶对 (X',P') 是平均一致光滑的, 则 (X,P) 是平均一致凸的.

证明 (1) 设任意的 $p\in P$, X 中任意 p-正规集 B 决定的 X' 上的半范数 p'_B, $\{f_n\},\{g_n\}\subset U(X'(p))$ 满足 $\lim\limits_n p'_B(f_n+g_n)=2$. 因为对任意的 $n\in N$, 有 $p'_B(f_n) = \sup\limits_{x\in B}|f_n(x)| \leqslant \sup\limits_{x\in U_p(X)}|f_n(x)| = \|f_n\|'_p \leqslant 1$. 同理 $p'_B(g_n)\leqslant 1$ (对任意的 $n\in N$), 因此 $\{f_n\},\{g_n\}\subset U_{p'_B}(X')$. 又对任意的 $p'_{B'}\in P'\setminus\{p'_B\}$, 其中 B' 是形如 $B(C_P)$ 的集合, 对任意的 $n\in N$, 有 $p'_{B'}(f_n) = \sup\limits_{y\in B'}|f_n(y)| \leqslant \sup\limits_{p(y)\leqslant C_p}|f_n(y)| = C_p\sup\limits_{y\in U_p(X)}|f_n(y)| = C_p\|f_n\|'_p = C_p$. 同理 $p'_{B'}(g_n)\leqslant C_p$ (对任意的 $n\in N$). 这表明 $\{f_n\},\{g_n\}$ 在 $(X',T_{P'})$ 中有界. 注意到 $\lim\limits_n p'_B(f_n+g_n)=2$, 于是由 (X',P') 是平均一致凸的定义, 有 $\lim\limits_n p'_B(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n f_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n g_i) = 0$. 这表明 (X,P) 是平均一致光滑的.

(2) 设对任意的 $p\in P$, $\{x_n\},\{y_n\}\subset U_p(X)$, 其中 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是 T_P 有界的, 满足 $\lim\limits_n p(x_n+y_n)=2$. 令 $B \overset{\Delta}{=} \{z\in X: p(z)\leqslant 1, q(z)\leqslant \sup\limits_n q(x_n)+\sup\limits_n q(y_n), \forall q\in p\setminus\{p\}\}$, 则 B 是形如 $B\{C_P\}$ 的集合, 且 $C_P = 1$, 故 B 是 X 中的 p-正规集, 用 p'_B 表示由 p-正规集 B 决定的 X' 上的半范数. 易知 $x_n, y_n\in B\subset U_p(X)$ (对任意的 $n\in N$). 由引理 1.1 知 $U(X'(p)) = \{g\in X'(p): \|g\|'_p\leqslant 1\}$ 是 X' 中的绝对凸 w^* 紧集, 因而它是 $\mathrm{U}(X',X)$ 有界的[6], 即是 $T_{P'}$ 有界集. 故对任意的 $p'_{B\{C_p\}}\in P'$, 有 $\sup\limits_{h\in U(X'(p))} p'_{B\{C_p\}}(h) < +\infty$.

令 $B' \overset{\Delta}{=} \{g\in X': p'_B(g)\leqslant 1, p'_{B\{C_p\}}(g)\leqslant \sup\limits_{h\in U(X'(p))} p'_{B\{C_p\}}(h), \forall p'_{B\{C_p\}}\in P'\setminus\{p'_B\}\}$, 则 B' 是 X' 中的 p'_B-正规集, 易知 $U(X'(p))\subset B'\subset U_{p'_B}(X')$.

令 $\hat{x}_n, \hat{y}_n$ 分别表示 x_n 和 y_n 在 X'' 中的自然嵌入像, 有 $\|\hat{x}_n\|'_{p'_B} = \sup\limits_{p'_B(g)\leqslant 1}|\hat{x}_n(g)| = \sup\limits_{\substack{\sup|\hat{x}_n(g)| \\ g\in B'}}|\hat{x}_n(g)| \leqslant 1$ (对任意的 $n\in N$), 即 $\{\hat{x}_n\}\subset U(X''(p'_B))$. 同理 $\{\hat{y}_n\}\subset U(X''(p'_B))$. 现在令 $p''_{B'}(F) \overset{\Delta}{=} \sup\limits_{g\in B'}|F(g)|$, 任意的 $F\in X''$, 则 $p''_{B'}$ 是由 p'_B-正规集 $B'\subset X'$ 决定的 X'' 上的半范数, 由 $U(X'(p))\subset B'\subset U_{p'_B}(X')$ 和引理 1.2, 我们得到 $p''_{B'}(\hat{x}_n+\hat{y}_n) = \sup\limits_{g\in B'}|(\hat{x}_n+\hat{y}_n)(g)| \leqslant \sup\limits_{p'_B(g)\leqslant 1}|(\hat{x}_n+\hat{y}_n)(g)| = \|\hat{x}_n+\hat{y}_n\|'_{p'_B} \leqslant \|\hat{x}_n\|'_{p'_B} + \|\hat{y}_n\|'_{p'_B} = 2$, 以及 $p''_{B'}(\hat{x}_n+\hat{y}_n) = \sup\limits_{g\in B'}|(\hat{x}_n+\hat{y}_n)(g)| \geqslant \sup\limits_{\|g\|'_p\leqslant 1}|(\hat{x}_n+\hat{y}_n)(g)| = \sup\limits_{\|g\|'_p\leqslant 1}|g(x_n+y_n)| = p(x_n+y_n)$. 注意到 $\lim\limits_n p(x_n+y_n) = 2$, 所以有 $\lim\limits_n p''_{B'}|(\hat{x}_n+\hat{y}_n) = 2$. 又已知 (X',P') 是平均一致光滑的, 因此 $\lim\limits_n p''_{B'}(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n \hat{x}_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n \hat{y}_i) = 0$. 又因为 $0\leqslant p(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n y_i) = \sup\limits_{\|g\|'_p\leqslant 1}|g(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n y_i)| \leqslant \sup\limits_{g\in B'}|g(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n y_i)| = \sup\limits_{g\in B'}|(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n \hat{x}_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n \hat{y}_i)(g)| = p''_{B'}(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n \hat{x}_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n \hat{y}_i)$, 从而 $\lim\limits_n p(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n y_i) = 0$. 这就证明了 (X,P) 是平均一致凸的.

引理 4.1 设 (X,P) 是偶对, p_0, p_1 是 P 中两个绝对等价的半范数, 即存在 $\lambda>0$ 使得 $p_0 = \lambda p_1$, 则 B_0 是 (X,P) 中的 p_0-正规集, p'_{B_0} 是 B_0 决定的 X' 上的半范数, $\{f_n\}\{g_n\}\in U(X'(p_0))$ 满足 $\lim\limits_n p'_{B_0}(f_n+g_n) = 2$ 且 $\lim\limits_n p'_{B_0}(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n f_n - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n g_n) = 0$ 当且仅当 $B_1 = \lambda B_0$ 是 (X,P) 中的 p_1-正规集, $p'_{B_1} = \lambda p'_{B_0}$ 是 B_1 决定的 X' 上的半范数, $\{\tilde{f}_n\} = \{\lambda^{-1}f_n\}$, $\{\tilde{g}_n\} = \{\lambda^{-1}g_n\}\subset U(X'(p_1))$ 满足 $\lim\limits_n p'_{B_1}(\tilde{f}_n+\tilde{g}_n) = 2$ 且 $\lim\limits_n p'_{B_1}(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n \tilde{f}_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n \tilde{g}_i) = 0$.

证明 必要性. 设 $B_0 = B\{C_p\}$ 是 (X,P) 中的 p_0-正规集, 其中 $C_{p_0} = 1$. 先证明在已知条件下不可能有 $\lambda C_{p_1} < 1$. 令 $\tilde{B}_0 = \{x\in X: p(x)\leqslant C_{p_0}, \forall p\in$

$P\setminus\{p_1\}, p_0(x)\leqslant \lambda C_{p_1}\}$, 显然有 $B_0=\tilde{B}_0$. 于是,当 $\{f_n\}$, $\{g_n\}\subset U(X'(p_0))$ 时, $p'_{B_0}(f_n+g_n)\leqslant \sup_{x\in B_0}|(f_n+g_n)(x)| = \sup_{x\in \tilde{B}_0}|(f_n+g_n)(x)|\leqslant \sup_{p_0(x)\leqslant \lambda C_{p_1}}|f_n(x)| + \sup_{p_0(x)\leqslant \lambda C_{p_1}}|g_n(x)| = \lambda C_{p_1}\sup_{p_0(x)\leqslant 1}|f_n(x)| + \lambda C_{p_1}\sup_{p_0(x)\leqslant 1}|g_n(x)| = \lambda C_{p_1}(\| f_n\|'_{p_0} + \| g_n\|'_{p_0}) = 2\lambda C_{p_1} < 2$(任意的 $n\in N$), 得出 $\lim_n p'_{B_0}(f_n+g_n) < 2$,与已知条件矛盾.

以下只需要考虑 $\lambda C_{p_1}\geqslant 1$ 的情形. 令 $B_1\stackrel{\Delta}{=}\lambda B_0$, $\tilde{B}_1=\{x\in X: p(x)\leqslant \lambda C_p\}, \forall p\in P\setminus\{p_1\}, p_1(x)\leqslant 1\}$,则有 $B_1=\tilde{B}_1$(因为对任意的 $x\in B_0$,即有 $p_1(\lambda x)=\lambda p(x)\leqslant \lambda C_{p_1}$,又有 $p_1(\lambda x)=\lambda p_1(x)=p_0(x)\leqslant 1$,而 $\lambda C_{p_0}\geqslant 1$,于是有 $B_1\subset \tilde{B}_1$,并且相反包含关系 $B_1\supset\tilde{B}_1$ 是显然的). 因此 B_1 是 (X,P) 中 p_1-正规集. 令 p'_{B_1} 是由 B_1 决定的 X' 上的半范数,则有 $p'_{B_1}(f)=\sup_{x\in B_1}|f(x)| = \lambda\sup_{x\in\lambda B_0}|f(\lambda^{-1}x)| = \lambda\sup_{x\in B_0}|f(x)| = \lambda p'_{B_0}(f)$,任意 $f\in X'$,即 $p'_{B_1}=\lambda p'_{B_0}$. 现在设 $\{f_n\},\{g_n\}\subset U(X'(p_0))$,满足 $\lim_n p'_{B_0}(f_n+g_n)=2$ 且 $\lim_n p'_{B_0}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g_i)=0$,令 $\tilde{f}_n=\lambda^{-1}f_n$, $\tilde{g}_n=\lambda^{-1}g_n$, 则 $\|\tilde{f}_n\|_{p_1}=\sup_{p_1(x)\leqslant 1}|\tilde{f}_n(x)| = \sup_{\lambda^{-1}p_0(x)\leqslant 1}|\lambda^{-1}f_n(x)| = \sup_{p_0(x)\leqslant 1}|f_n(x)| = \| f_n\|'_{p_0}\leqslant$ 0. 同理有 $\|\tilde{g}_n\|'_{p_1}\leqslant 1$(对任意的 $n\in N$). 因此 $\{f_n\},\{g_n\}\subset U(X'(p_1))$,且满足 $\lim_n p'_{B_1}(\tilde{f}_n+\tilde{g}_n) = \lambda\lim_n p'_{B_0}(\lambda^{-1}(f_n+g_n)) = \lim_n p'_{B_0}(f_n+g_n)=2$, $\lim_n p'_{B_1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\tilde{f}_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\tilde{g}_i) = \lambda\lim_n p'_{B_0}(\lambda^{-1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g_i)) = \lim_n p'_{B_0}((\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g_i)) = 0$.

充分性. 由于 $p_1=\lambda^{-1}p_0$,根据已知条件,由上述证明过程同理可知充分性成立.

定理 4.2 设 P 是实线性空间 X 上的一个分离半范数族,且 P_1 是 P 的良好化,则 (1) 偶对 (X,P) 是平均一致凸的当且仅当 (X,P_1) 是平均一致凸的. (2) 偶对 (X,P) 是平均一致光滑的当且仅当 (X,P_1) 是平均一致光滑的.

证明 (1) 必要性. 设 (X,P) 是平均一致凸空间,则由 $P_1\subset P$ 和平均一致凸的定义,可知 (X,P_1) 是平均一致凸的.

充分性. 设 (X,P_1) 是平均一致凸的,任取 $p\in P$, $\{x_n\},\{y_n\}\subset U_p(X)$ 且 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是 T_P 有界的,满足 $\lim_n p(x_n+y_n)=2$. 由 P_1 的定义,存在 $q\in P_1$ 和 $\lambda>0$,使得 $p=\lambda q$. 由 $q(\lambda x_n)=\lambda q(x_n)=p(x_n)\leqslant 1$ 和 $q(\lambda y_n)=\lambda q(y_n)=p(y_n)\leqslant 1$,知 $\{\lambda x_n\},\{\lambda y_n\}\subset U_q(X)$. 再根据引理 1.5 和 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是 T_P 有界的知, $\{\lambda x_n\},\{\lambda y_n\}$ 是 T_{P_1} 有界的,且 $\lim_n q(\lambda x_n+\lambda y_n) = \lim_n\lambda q(x_n+y_n) = \lim_n p(x_n+y_n)=2$. 由于 (X,P_1) 是平均一致凸的,所以 $\lim_n q(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\lambda x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\lambda y_i)=0$,即 $\lim_n p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i) = \lim_n\lambda q(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i) = \lim_n q(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\lambda x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\lambda y_i) = 0$,所以 (X,P) 是平均一致凸的.

(2) 必要性. 设 (X,P) 是平均一致光滑的,由 $P_1\subset P$ 和平均一致光滑的定义,知 (X,P) 是平均一致光滑的.

充分性. 已知 (X,P_1) 是平均一致光滑的,任取 $p_0\in P$,设 B_0 是 (X,P) 中任意 p_0-正规集, p'_{B_0} 是 B_0 决定的 $(X,T_P)'=X'$ 上的半范数,且 $\{f_n\},\{g_n\}\subset U(X'(p_0))$,满足 $\lim_n p'_{B_0}(f_n+g_n)=2$. 由于 P_1 是 P 的良好化,故存在 $p_1\in P_1$ 和 $\lambda>0$ 使得 $p_0=\lambda p_1$,根据引理 4.1,可知 $B_1=\lambda B_0$ 是 $(X,T_P)=(X,T_{P_1})$ 中的 p_1-正规集, $p'_{B_1}=\lambda p'_{B_0}$ 是 B_1 决定的 $(X,T_{P_1})'=X'$ 上的半范数,且 $\{\tilde{f}_n\}=\{\lambda^{-1}f_n\}$, $\{\tilde{g}_n\}=\{\lambda^{-1}g_n\}\subset U(X'(p_1))$ 满足 $\lim_n p'_{B_1}=(\tilde{f}_n+\tilde{g}_n)=2$. 注意到 $\{\tilde{f}_n\},\{\tilde{g}_n\}\subset U(X'(p_1))$ 相应于偶对 (X,P_1) 依然是成立的,于是由 (X,P_1) 是平均一致光滑的,可知 $\lim_n p'_{B_1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\tilde{f}_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\tilde{g}_i)=0$. 由于同时有 $\lim_n p'_{B_1}(\tilde{f}_n+\tilde{g}_n)=2$ 且 $\lim_n p'_{B_1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\tilde{f}_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\tilde{g}_i)=0$, 再次由引理 4.1 的充分性可以得出 $\lim_n p'_{B_0}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g_i)=0$. 由定义 3.1 可知, (X,P) 是平均一致光滑的.

定理 4.3 若 (X,T_P) 是 P-自反的,则 (1) 偶对 (X,P) 是平均一致凸的当且仅当偶对 (X'',P'') 是平均一致凸的. (2) 偶对 (X,P) 是平均一致光滑的当且仅当偶对 (X'',P'') 是平均一致光滑的.

证明 由定理 4.2 设 P 是良好的半范数族.

(1) 充分性. 由定理 4.1 知,若 (X'',P'') 是平均一致凸的,则 (X',P') 是平均一致光滑的,再次应用

定理 4.1就可以得出 (X,P) 是平均一致凸的.

必要性.若 (X,P) 是平均一致凸的,即对任意的 $p\in P$, $\{x_n\},\{y_n\}\subset U_p(X)$ 且 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是 T_P 有界的.当 $\lim_n p(x_n+y_n)=2$ 时,有 $\lim_n p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i)=0$.任取 $p''\in P''$,由于 (X,T_P) 是 P-自反的,知 $J(X)=X''$,且存在 $p\in P$ 和 $\lambda>0$ 使得 $p''\circ J=\lambda p$. 任取 $\{x''_n\},\{y''_n\}\subset U_{p''}(x'')$ 且 $\{x''_n\},\{y''_n\}$ 是 $T_{P''}$ 有界的,对任意的 $n\in N$,设 $Jx_n=x''_n$, $Jy_n=y''_n$,其中 $x_n,y_n\in X$,则有 $\{Jx_n\},\{Jy_n\}\subset U_{p''}(X'')$ 是 $T_{P''}=J(T_P)$ 有界的,因而 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是 T_P 有界的.

此外,对任意 $n\in N$,由 $p''\circ J(x_n)\leqslant 1$, $p''\circ J(y_n)\leqslant 1$ 知 $\lambda p(x_n)\leqslant 1$, $\lambda p(y_n)\leqslant 1$,因此 $\{\lambda x_n\},\{\lambda y_n\}\subset U_p(X)$,且 $\{\lambda x_n\},\{\lambda y_n\}$ 是 T_P 有界的,所以当 $\lim_n p''(x''_n+y''_n)=2$ 时,即当 $\lim_n\lambda p(x_n+y_n)=\lim_n p(\lambda x_n+\lambda y_n)=2$ 时,由于 (X,P) 是平均一致凸的,可知 $\lim_n\lambda p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i)=\lim_n p(\lambda\cdot(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i))=\lim_n p(\lambda\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i-\lambda\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i)=0$,因而 $\lim_n p''(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x''_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y''_i)=\lim_n(p''\circ J)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i)=\lim_n\lambda p(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i)=0$,所以 (X'',P'') 是平均一致凸的.

(2) 充分性.由定理 4.1可以证明.

必要性.设 (X,P) 是平均一致光滑的,即对任意的 $p\in P$, X 中任意 p-正规集 B 决定的 X' 上的半范数 p'_B,当 $\{f_n\},\{g_n\}\subset U(X'(p))$ 满足 $\lim_n p'_B(f_n+g_n)=2$ 时,有 $\lim_n p'_B(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g_i)=0$.

现在对任意的 $p''\in P''$,由于 (X,T_P) 是 p-自反的,所以 $J(X)=X''$ 且存在 $p\in P$ 和 $\lambda>0$,使得 $p''\circ J=\lambda p$.对 X'' 中任意 p''-正规集 $\tilde{B}=B\{C''_q\}$,由引理 1.3可知,存在 $B\{C_q\}\subset X$,使得 $B\{C''_q\}=J(B\{C_q\})$. 令 $B=B\{C_q\}$,则 B 是 X 中的 p-正规集.设 $\tilde{B}$ 决定的 X''' 上的半范数为 $p'''_{\tilde{B}}$,且设 B 决定的 X' 上的半范数为 p'_B,令 $J_1: X\to X'''$ 为自然嵌入映射,则对任意 $f\in X'$,有 $p'''_{\tilde{B}}(J_1f)=\sup_{\hat{x}\in\tilde{B}}|J_1f(\hat{x})|=\sup_{Jx\in\tilde{B}}|J_1f(Jx)|\quad\sup_{x\in\lambda^{-1}B}|f(x)|=\lambda^{-1}\sup_{\hat{x}\in\tilde{B}}|f(x)|=\lambda^{-1}p'_B(f)$ (注意 $J^{-1}(\tilde{B})=B\{C_q\}=\lambda^{-1}B\{\lambda C_q\}=\lambda^{-1}B$),所以 $p'''_{\tilde{B}}\circ J_1=\lambda^{-1}p'_B$. 任取 $\{\tilde{f}_n\},\{\tilde{g}_n\}\subset U(X'''(p''))$ 满足 $\lim_n p'''_{\tilde{B}}(\tilde{f}_n+\tilde{g}_n)=2$,注意到 $(X',T_{P'})$ 是 P'-自反的,有 $J_1(X')=X'''$. 设 $\tilde{f}_n=J_1f_n$, $\tilde{g}_n=J_1g_n$(对任意的 $n\in N$),从而 $1\geqslant\|\tilde{f}_n\|''_{p'''}=\sup_{p''(F)\leqslant 1}|\tilde{f}_n(F)|=\sup_{p''\circ J(x)\leqslant 1}|(J_1f_n)(Jx)|=\sup_{\lambda p(x)\leqslant 1}|(J_1f_n)(Jx)|=\sup_{p(x)\leqslant\lambda^{-1}}|f_n(x)|=\|\lambda^{-1}f_n\|'_p$,所以 $\{\lambda^{-1}f_n\}\subset U(X'(p))$. 同理有 $\{\lambda^{-1}g_n\}U(X'(p))$,因此, $2=\lim_n p'''_{\tilde{B}}(\tilde{f}_n+\tilde{g}_n)=\lim_n p'''_{\tilde{B}}\circ J(f_n+g_n)=\lambda^{-1}\lim_n p'_B(f_n+g_n)=\lim_n p'_B(\lambda^{-1}f_n+\lambda^{-1}g_n)$.由于 (X,P) 是平均一致光滑的,所以 $\lim_n p'''_{\tilde{B}}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\tilde{f}_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\tilde{g}_i)=\lim_n p'''_{\tilde{B}}\circ J(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g_i)=\lim_n\lambda^{-1}p'_B(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g_i)\ \lim_n p'_B(\lambda^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i-\lambda^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g_i)=0$.这说明 (X'',P'') 是平均一致光滑的.

定理 4.4 若 (X,T_P) 是 P-自反的,则 (1) (X,P) 是平均一致凸的当且仅当 (X',P') 是平均一致光滑的. (2) (X,P) 是平均一致光滑的当且仅当 (X',P') 是平均一致凸的.

证明 (1) 充分性.由定理 4.1直接可以证明.

必要性.因为 (X,P) 是平均一致凸的,由定理 3.1可知 (X'',P'') 是平均一致凸的,再由定理 4.1可得 (X',P') 是平均一致光滑的.

(2) 充分性.由定理 4.1直接可以证明.

必要性.因为 (X,P) 是平均一致光滑的,由定理 3.1可知 (X'',P'') 是平均一致光滑的,再由定理 4.1可得 (X',P') 是平均一致凸的.

参考文献:

[1] Diminnie C R, White A G. Strict convexity in topological vector spaces [J]. Math Japonica, 1977, 22 (1): 49-56.

[2] 国起,吴从炘.局部凸空间的严格凸性与光滑性 [J].东北数学, 1989, 5(4): 465-472.

[3] 吴从炘,国起.局部凸空间的一致凸性 [J].数学年刊, 1990, 11A(3): 351-354.

[4] 白国仲.关于平均一致凸空间 [J]. 华中师范大学学报:自然科学版, 1995, 13(2): 8-11.

[5] 齐淑彦,苏雅拉图.局部凸空间的强凸性与强光滑性 [J]. 应用泛函分析学报, 2007, 9(1): 70-76.

[6] Wilansky A. Modern methods in topological vector spaces [M]. New York: Mc GrnHill, 1978.

(责任编辑: 尹 闯)