DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.01.007

一类时滞微分方程周期解的存在性

Existence of Periodic Solutions for a Class of Differential Equations with Continuous and Discrete Delays

邓春红[1],冯春华[2]

DENG Chun-hong[1], FENG Chun-hua[2]

(1.湖南科技学院数学与计算科学系,湖南永州 425006; 2.广西师范大学数学科学学院,广西桂林 541004)

(1. Department of Mathematics and Computer Science, Hunan University of Sciences and Engineering, Yongzhou, Hunan, 425006, China; 2. College of Mathematics and Computer Science, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要:运用重合度理论中的延拓定理得到一类具有连续时滞和离散时滞的微分方程周期解存在的判别准则,并用 1个实例来验证其应用性.该准则推广了已知的结果,具有较好的应用性.

关键词:微分方程 周期解 延拓定理

中图法分类号: O175.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)01-0023-04

Abstract By using the continuity theorem in coincidence degree theory, we obtain the criteria of the existence of the periodic solution for a class of differential equations with continuous and discrete delays, and verify its application by an example. The criteria generals some results obtained and has better application.

Key words differential equation, periodic solution, continuity theorem

时滞微分方程作为模拟现实世界中相关模型的有效工具而引起人们的注意.方程

$$x'(t) = A(t,x(t))x(t) + f(t,x(t-\mathrm{F})) \quad (1)$$

在 $\mathrm{F} = 0$的情形下,已经由王联、王慕秋,李黎明,王全义,陈凤德,史金麟等学者加以研究,而当 $\mathrm{F} \neq 0$时,王克[1]、曹进德[2]、黄先开等[3]分别获得了系统(1)有周期解的充分条件.

近年来,利用重合度理论研究时滞微分方程周期解的成果已有很多[4~9].文献[10]利用上、下解法研究具有无限时滞泛函微分方程周期解的存在性问题.陈凤德等[11]利用重合度理论中的延拓定理讨论系统

$$x'(t) = A(t,x(t))x(t) + \int_{-r}^{0} f(t,s,x(t+s))\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{p} f_i(t,x(t-\mathrm{F}_i(t))) \quad (2)$$

周期解的存在性,得到了应用较好的结果.

本文考虑更一般的具有连续时滞和离散时滞的微分系统,即

$$x'(t) = A(t,x(t-\mathrm{F}(t)))x(t) + \sum_{i=1}^{l}\int_{-r}^{0} f_i(t,s,x(t+s))\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{p} g_j(t,x(t-\mathrm{F}_j(t))) + b(t) \quad (3)$$

周期解的存在性.这里 $x(t) = (x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}}$是 n维连续向量函数,$A(t,x) \in C(R\times R^n, R^n)$, $A(t+\mathrm{k},x) = A(t,x)$, $r > 0$, $f \in C(R\times[-r,0]\times R^n, R^n)$,$f_i(t+\mathrm{k},s,x) \equiv f_i(t,s,x)$,$\mathrm{F}(t+\mathrm{k}) = \mathrm{F}(t)$,$\mathrm{F}_j(t+\mathrm{k}) = \mathrm{F}_j(t)$,$j = 1,2,\cdots,p$.记 $r_1 = \max_{0\leqslant t\leqslant \mathrm{k}}\{\mathrm{F}(t),\mathrm{F}_j(t)\}$,$C_1 = C([-r_1,0],R^n)$, $g_j(t,x) \in C(R\times C_1,R^n)$, $g_j(t+\mathrm{k},\mathrm{h}) = g_j(t,\mathrm{h})$, $\forall (t,\mathrm{h}) \in R\times C_1$,$b(t) \in C(R,R^n)$, $b(t+\mathrm{k}) =$

收稿日期: 2008-04-11

作者简介:邓春红(1979-),女,讲师,硕士,主要从事微分方程的稳定性、周期解、概周期解的研究.

$b(t)$.我们利用重合度理论中的延拓定理讨论系统(3)周期解的存在性,得到了较实用的判别准则,并给出它的一个应用实例.

1 预备知识

定义 1[12] 设 X,Z 是赋范线性空间, $L:\mathrm{Dom}L\subset X\to Z$ 为线性映射, $N:X\to Z$ 为连续映射.如果 L 是指标为零的 Fredholm映射且存在连续投影 $P:X\to X$ 以及 $Q:Z\to Z$ 使得 $\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}L$, $\mathrm{Im}L=\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}(I-Q)$, 则 $L|_{\mathrm{Dom}L\cap\mathrm{Ker}P}:(I-P)X\to\mathrm{Im}L$ 可逆. 设其逆映射为 K_p, 设 Ω 为 X 中的有界开集. 如果 $QN(\bar\Omega)$ 有界且 $K_p(I-Q)N:\bar\Omega\to X$ 是紧的,则称 N 在 $\bar\Omega$ 上是 L-紧的.

引理 1[12] (延拓定理)设 L 是指标为零的 Fredholm映射, N 在 $\bar\Omega$ 上是 L-紧的, 并假设 (a) 对任意的 $\lambda\in(0,1)$, 方程 $Lx=\lambda Nx$ 的解满足 $x\notin\partial\Omega$; (b)对任意的 $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$, $QNx\neq0$ 而且 $\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq0$,则方程 $Lx=Nx$ 在 $\mathrm{Dom}L\cap\bar\Omega$ 中至少存在一个解.

引理 2[13] (Arzela-Ascoli定理)集合 $A\subset C[a,b]$ 列紧充分必要条件是下列两个条件成立:

(i) 集合 A 是有界的, 即存在常数 M, 使得对于任意的 $x\in A$, 恒有 $|x(t)|\leqslant M$;

(ii) 集合 A 是等度连续的, 即对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 始终存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对于任意的 $t_1,t_2\in[a,b]$, 只要 $|t_1-t_2|<\delta$, 就有 $|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$, $\forall x\in A$.

对方程(3)给出初始条件:

$$x(s)=\varphi(s),\varphi(s)=(\varphi_1(s),\varphi_2(s),\cdots,\varphi_n(s))^{\mathrm T},\varphi_i\in C([-r_2,0],R),s\in[-r_2,0],i=1,2,\cdots,n, \tag{4}$$

其中 $r_2=\max\{r,r_1\}$. 对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$ 定义其模 $|x|=(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac12}$. 对任 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 定义其模 $\|A\|=(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2)^{\frac12}$. 本文以下部分总取 $X=Z=\{x\in C(R,R^n)|x(t+\omega)=x(t)\}$. 对 $x\in X$ 定义其模 $\|x\|=\max_{0\leqslant t\leqslant\omega}|x(t)|$, 则 X 在 $\|\cdot\|$ 下成为 Banach空间. 对 $x\in X$, 令 $Lx=\dot x(t)$, $Nx=A(t,x(t-\tau(t)))x(t)+\sum_{i=1}^l\int_{-r}^0 f(t,s,x(t+s))\mathrm ds+\sum_{j=1}^p g_j(t,x(t-\tau_j(t)))+b(t)$.

定义投影映射为 $Px=\frac1\omega\int_0^\omega x(t)\mathrm dt, x\in X$, $Qz=\frac1\omega\int_0^\omega z(t)\mathrm dt, z\in Z$, 则 $\mathrm{Ker}L=R^n$, $\mathrm{Im}L=\{z\in Z|\int_0^\omega z(t)\mathrm dt=0\}$ 为 Z 中的闭子集, 从而 L 是指标为零的 Fredholm映射. 易见 P,Q 是连续的投影, 而且 $\mathrm{Im}P=R^n=\mathrm{Ker}L$, 因此 L 的逆映射 $K_p:\mathrm{Im}L\to\mathrm{Dom}L\cap\mathrm{Ker}P$ 存在, 且 $K_p(z)=\int_0^t z(s)\mathrm ds-\frac1\omega\int_0^\omega\int_0^t z(s)\mathrm ds\mathrm dt$. 对 $x\in X$, 有

$$QNx=\frac1\omega\int_0^\omega[A(t,x(t-\tau(t)))x(t)+\sum_{i=1}^l\int_{-r}^0 f_i(t,s,x(t+s))\mathrm ds+\sum_{j=1}^p g_j(t,x(t-\tau_j(t)))+b(t)]\mathrm dt.$$

$$K_p(I-Q)Nx=\int_0^t[A(u,x(u-\tau(u)))x(u)+\sum_{i=1}^l\int_{-r}^0 f_i(u,s,x(u+s))\mathrm ds+\sum_{j=1}^p g_j(u,x(u-\tau_j(u)))+b(u)]\mathrm du-\frac1\omega\int_0^\omega\int_0^t[A(u,x(u-\tau(u)))x(u)+\sum_{i=1}^l\int_{-r}^0 f_i(u,s,x(u+s))\mathrm ds+\sum_{j=1}^p g_j(u,x(u-\tau_j(u)))+b(u)]\mathrm du\mathrm dt.$$

显然, QN 及 $K_p(I-Q)$ 连续. 设 Ω 是 X 中的有界开集, 显然 $QN(\bar\Omega)$ 有界. 利用 Arzela-Ascoli定理容易证明 $K_p(I-Q)N(\bar\Omega)$ 是紧致集, 因此 N 在 $\bar\Omega$ 上是紧的. 记 $\lambda_m(t,x),\lambda_M(t,x)$ 分别为 $\frac{A(t,x)+A(t,x)^{\mathrm T}}{2}$ 最小、最大特征根.

2 主要结果

定理 1 假设存在正常数 $c_j,d_j(j=1,2,\cdots,p)$, δ,e,f, 连续函数 $h_i(s),s\in[-r,0],h_i(s)\geqslant0$, $\tau_j'(t)<1$, $\tau'(t)<1$, 且 $a>\sum_{i=1}^l\sqrt{r\beta_i}+\sum_{j=1}^p c_jk_j$, 对任意 $(t,x)\in[0,\omega]\times R^n$ 满足:

(Ⅰ) $|g_j(t,x)|\leqslant c_j|x|+d_j, j=1,2,\cdots,p$;

(Ⅱ) $|f_i(t,s,x)|\leqslant h_i(s)|x|+\delta$;

(Ⅲ) $\lambda_m(t,x)\geqslant a$ 或 $\lambda_M(t,x)\leqslant -a$;

(Ⅳ) $|A(t,x)|\leqslant e|x|+f$.

则方程(3)至少存在一个 ω-周期解, 其中 $\beta_i=\int_{-r}^0 h_i^2(s)\mathrm ds$, $k_j=(\max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\frac{1}{1-\tau_j'(t)})^{\frac12}$, $b=\|b(t)\|=\max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\{\|b(t)\|\}$.

证明 令 $Lx=\dot x(t)$, $Nx=A(t,x(t-\tau(t)))x(t)+\sum_{i=1}^l\int_{-r}^0 f_i(t,s,x(t+s))\mathrm ds+\sum_{j=1}^p g_j(t,x(t-\tau_j(t)))+b(t)$.

考虑算子方程 $Lx=\lambda Nx,\lambda\in(0,1)$，即

$$x'(t)=\lambda[A(t,x(t-F(t)))x(t)+\sum_{i=1}^{l}\int_{-r}^{0}f_i(t,s,x(t+s))ds+\sum_{j=1}^{p}g_j(t,x(t-F_j(t)))+b(t)].\qquad(5)$$

设 $x(t)$ 为(5)式的任意 k-周期解. 下面证明 $x(t)$ 关于 λ 一致有界.

(5)式的两边同时乘以 $x^{T}(t)$ 并从 0 到 k 积分可以得到

$$\frac{1}{2}\int_0^k x^{T}(t)\cdot[A(t,x(t-F(t)))+A^{T}(t,x(t-F(t)))]x(t)dt+\int_0^k x^{T}(t)[\int_{-r}^{0}\sum_{i=1}^{l}f_i(t,s,x(t+s))ds+\sum_{j=1}^{p}g_j(t,x(t-F_j(t)))+b(t)]dt=0.$$

不妨设 $\lambda_M(t,x)\leqslant -a$ 成立，则有

$$a\int_0^k|x(t)|^2dt\leqslant\sum_{i=1}^{l}\int_0^k\int_{-r}^{0}|x(t)|\cdot|f_i(t,s,x(t+s))|dsdt+\sum_{j=1}^{p}\int_0^k|x(t)|\cdot|g_j(t,x(t-F_j(t)))|dt+\int_0^k|x(t)|\cdot|b(t)|dt\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{l}W_ir\int_0^k|x(t)|dt+\sum_{i=1}^{l}(\int_0^k\int_{-r}^{0}h_i^2(s)|x(t)|^2dsdt)^{\frac{1}{2}}\cdot(\int_0^k\int_{-r}^{0}|x(t+s)|^2dsdt)^{\frac{1}{2}}+\sum_{j=1}^{p}c_j(\int_0^k|x(t)|^2dt)^{\frac{1}{2}}\cdot(\int_0^k|x(t-F_j(t))|^2dt)^{\frac{1}{2}}+\sum_{j=1}^{p}d_j\int_0^k|x(t)|dt+b\sqrt{k}(|x(t)|^2)^{\frac{1}{2}}.\qquad(6)$$

若 $\lambda_m(t,x)\geqslant a$ 亦类似可得(6)式成立. 由于 $x(t)$ 是周期为 k 函数，则

$$\int_0^k\int_{-r}^{0}|x(t+s)|^2dsdt=\int_{-r}^{0}\int_0^k|x(t+s)|^2dsdt=\int_{-r}^{0}\int_s^{s+k}|x(t')|^2dt'ds=\int_{-r}^{0}\int_0^k|x(t)|^2dtds=r\int_0^k|x(t)|^2dt.\qquad(7)$$

再设 $s_j=t-F_j(t)$，则由 $F'_j(t)<1$，有 $\frac{ds_j}{dt}=1-F'_j(t)>0$. 说明 s_j 是 t 的严格单调增加函数，因此存在反函数 $t=F_j^{-1}(s_j),s_j\in[-F_j(0),k-F_j(k)]$. 所以有

$$\int_0^k|x(t-F_j(t))|^2dt=\int_{-F_j(0)}^{k-F_j(k)}\frac{|x(s_j)|^2}{1-F'_j(F_j^{-1}(s_j))}ds_j\leqslant k_j^2\int_{-F_j(0)}^{k-F_j(k)}|x(s_j)|^2ds_j=k_j^2\int_0^k|x(t)|^2dt.\qquad(8)$$

类似地有 $\int_0^k|x(t-F(t))|^2dt\leqslant k^2\int_0^k|x(t)|^2dt$，这里 $k=(\max_{0\leqslant t\leqslant k}\frac{1}{1-F'(t)})^{\frac{1}{2}}$. 利用 Cauchy 不等式，由(6)~(8)式得

$$a\int_0^k|x(t)|^2dt\leqslant\sum_{i=1}^{l}W_ir\sqrt{k}(\int_0^k|x(t)|^2dt)^{\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{l}\sqrt{r}(\int_0^kU_i|x(t)|^2dt)^{\frac{1}{2}}(\int_0^k|x(t)|^2dt)^{\frac{1}{2}}+\sum_{j=1}^{p}c_jk_j\int_0^k|x(t)|^2dt+\sum_{j=1}^{p}d_j\sqrt{k}(\int_0^k|x(t)|^2dt)^{\frac{1}{2}}+b\sqrt{k}(\int_0^k|x(t)|^2dt)^{\frac{1}{2}}\leqslant r\sqrt{k}\sum_{i=1}^{l}W_i\cdot(\int_0^k|x(t)|^2dt)^{\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{l}\sqrt{rU_i}\int_0^k|x(t)|^2dt+\sum_{j=1}^{p}c_jk_j\int_0^k|x(t)|^2dt+\sum_{j=1}^{p}d_j\sqrt{k}(\int_0^k|x(t)|^2dt)^{\frac{1}{2}}+b\sqrt{k}(\int_0^k|x(t)|^2dt)^{\frac{1}{2}}.$$

故 $(\int_0^k|x(t)|^2dt)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{\sqrt{k}(\sum_{i=1}^{l}rW_i+\sum_{j=1}^{p}d_j+b)}{a-\sum_{i=1}^{l}\sqrt{rU_i}-\sum_{j=1}^{p}c_jk_j}:=R_1$. 由此可知存在 $t_0\in[0,k]$ 使得

$$|x(t_0)|\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{l}rW_i+\sum_{j=1}^{p}d_j+b}{a-\sum_{i=1}^{l}\sqrt{rU_i}-\sum_{j=1}^{p}c_jk_j}:=R_2=\frac{R_1}{\sqrt{k}}.\qquad(9)$$

于是由 $x(t)=x(t_0)+\int_0^t x'(s)ds,t\in[0,k]$ 和 $x(t)$ 的 k 周期性知

$$|x(t)|\leqslant R_2+\int_0^t|x'(t)|dt.\qquad(10)$$

同时由方程(5)得

$$\int_0^k|x'(t)|dt\leqslant e\int_0^k|x(t-F(t))|\cdot|x(t)|dt+f\int_0^k|x(t)|dt+\sum_{i=1}^{l}\int_0^k\int_{-r}^{0}h_i(s)\cdot|x(t+s)|dsdt+\sum_{i=1}^{l}\int_0^k\int_{-r}^{0}W_idsdt+\sum_{j=1}^{p}\int_0^kc_j|x(t-F_j(t))|dt+\sum_{j=1}^{p}\int_0^kd_jdt+bk\leqslant ek\int_0^k|x(t)|^2dt+(f+\sum_{i=1}^{l}\sqrt{rU_i}+\sum_{j=1}^{p}c_jk_j)R_1\sqrt{k}+(\sum_{i=1}^{l}W_ir+\sum_{j=1}^{p}d_j+b)k\leqslant ekR_1^2+(f+\sum_{i=1}^{l}\sqrt{rU_i}+\sum_{j=1}^{p}c_jk_j)R_1\sqrt{k}+(\sum_{i=1}^{l}W_ir+\sum_{j=1}^{p}d_j+b)k:=R_3.\qquad(11)$$

由(10)式和(11)式得 $|x(t)| \leqslant R_2 + R_3$. 由(11)式可选取常数 R_0(待定) $> R_2 + R_3$. 令 $K = \{x \in X: \|x\| \leqslant R_0\}$, 则当 $x \in \partial K$ 时, 显然有 $Lx \neq \lambda Nx, \lambda \in (0,1)$, 故引理 1的条件(a)成立.

当 $x \in \mathrm{Ker}L \cap \partial K$ 时, 则 x 为常值向量且 $|x| = R_0$. 若 $\lambda_M(t,x) \leqslant -a$, 则由 $R_0 > R_2$ 及 $Qz = \frac{1}{k}\int_0^k z(t)\,\mathrm{d}t$, 有

$$x^{T}(QNx) = \frac{1}{k}\int_0^k x^{T} A(t,x(t - F(t)))x(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{k}(\sum_{i=1}^{l}\int_0^k\int_{-r}^0 x^{T} f_i(t,s,x(t+s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{p}\int_0^k x^{T} g_j(t,x(t-F_j(t)))\,\mathrm{d}t + \frac{1}{k}\int_0^k x^{T} b(t)\,\mathrm{d}t \leqslant -aR_0^2 + \frac{1}{k}\int_0^k\int_{-r}^0 \sum_{i=1}^{l} |x(t)| \cdot [h_i(s)\cdot|x(t+s)| + (\sum_{i=1}^{l} W]\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t + bR_0 + \sum_{j=1}^{p} c_j R_0^2 + \sum_{j=1}^{p} d_j R_0 \leqslant -(a - (\sum_{i=1}^{l} \sqrt{rU} - \sum_{j=1}^{p} c_j)R_0^2 + (\sum_{i=1}^{l} rW + \sum_{j=1}^{p} d_j + b)R_0.$$

由于 $a > \sum_{i=1}^{l} \sqrt{rU_i} + \sum_{j=1}^{p} c_j$, 取充分大的 R_0, 则 $x^{T}(QNx) < 0$ 成立, 因而 $QNx \neq 0, x \in \partial K$.

由于 $\mathrm{Im}Q = \mathrm{Ker}L$, 可选取同构 J 为恒等映射. 令 $F(\_,x) = -\_x + (1-\_)QNx, \_ \in [0,1]$, 则当 $x \in \partial K$ 时, 有 $x^{T}F(\_,x) = -\_x^{T}x + (1-\_)x^{T}QNx < 0$. 根据拓扑度的同伦不变性有 $\deg\{JQN, K\cap \mathrm{Ker}L, 0\} = \deg\{-x, K\cap \mathrm{Ker}L, 0\} \neq 0$. 对于 $\lambda_m(t,x) \geqslant a$ 的情形, 类似可以证明: 当 $x \in \mathrm{Ker}L \cap \partial K$ 时, 有 $x^{T}QNx > 0$ 和 $\deg\{JQN, K\cap \mathrm{Ker}L, 0\} \neq 0$. 于是引理 1的条件(b)成立. 由引理 1知方程 $Lx = Nx$, 即方程(3)至少有一个 k-周期解, 定理 1证明完毕.

例 1 考虑时滞微分方程

$$x'(t) = (40 + \sin t + |x(t - \frac{1}{2}\sin t)|)x(t) + \int_{-\pi}^0 (s^2 x(t+s) + \cos t)\,\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{2}(\sin 2t + \frac{1}{j}x(t - \frac{1}{3}\sin jt)) + \sin 2t. \qquad (12)$$

这里, $A(t,x) = 40 + \sin t + |x|$, $f(t,s,x) = s^2 x + \cos t$, $g_j(t,x) = \sin 2t + \frac{1}{j}x$, $j = 1,2$, $r = \pi$, $k = 2\pi i$, $F(t) = \frac{1}{2}\sin t$, $F_j(t) = \frac{1}{3}\sin jt$.

通过计算可以看出, 存在常数 $c_j = \frac{1}{j}$, $d_j = 1$, $j = 1,2$, $W = 1$, $e = 1$, $f = 41$, $a = 39$, 以及连续函数 $h(s) = s^2, s \in [-c, 0]$, $h(s) \geqslant 0$, 且 $F'(t) = \frac{1}{2}\cos t < 1$, $F_j'(t) = \frac{j}{3}\cos jt < 1$, $j = 1,2$. 对任意 $(t,x) \in [0,2\pi] \times R$ 满足:

(1) $|g_j(t,x)| = |\sin 2t + \frac{1}{j}x| \leqslant \frac{1}{j}|x| + 1$, $j = 1,2$;

(2) $|f(t,s,x)| = |s^2 x + \cos t| \leqslant s^2|x| + 1$;

(3) $\lambda_m(t,x) = 40 + \sin t + |x| \geqslant 39 = a$;

(4) $|A(t,x)| = |40 + \sin t + |x|| \leqslant |x| + 41$.

又 $U = \int_{-\pi}^0 h^2(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\pi}^0 s^4\,\mathrm{d}s = \frac{\pi^5}{5}$, $k_j = (\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} \frac{1}{1 - F_j'(t)})^{\frac{1}{2}} = (\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} \frac{1}{1 - \frac{j}{3}\cos jt})^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{1-\frac{j}{3}})^{\frac{1}{2}}$, $j = 1,2$, 即 $k_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $k_2 = \sqrt{3}$. 从而

$$\sqrt{\pi U} + \sum_{j=1}^{2}\sqrt{c_j k_j} = \sqrt{\frac{1}{5}\pi^3} + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}\pi^3 + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} < \pi^3 + 3 < 39 = a.$$

综上所述, 方程(12)满足定理 1的条件, 从而方程(12)至少存在一个 2π-周期解. 显然, 例 1中 2π-周期解的存在性无法用别的方法来判别.

参考文献:

[1] 王克. 一类具有偏差变元的微分方程的周期解[J]. 数学学报, 1994, 37(3): 409-413.

[2] 曹进德, 李永昆. 具时滞的高维周期系统周期解的存在性与唯一性[J]. 数学学报, 1997, 40(2): 280-286.

[3] 黄先开, 董勤喜. 具有时滞的高维周期系统的周期解的存在性[J]. 应用数学与力学, 1999, 20(8): 908-911.

[4] 彭世国, 谢湘生. 一类具有分布滞量的的微分系统的周期解和全局吸引性[J]. 数学物理学报, 2001, 21A(4): 466-471.

[5] Li Wantong, Huo Haifeng. Positive periodic solutions of delay difference equations and applications in population dynamics[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2005, 176: 357-369.

[6] 任景莉, 葛渭高. 一类二阶泛函分方程周期解存在性问题[J]. 数学学报, 2004, 47(3): 567-578.

(下转第 31页 Continue on page 31)

$$
\begin{aligned}
&|b\bar{z}_0 J_{h_{h(z)}}(0) J_{h_{h(z)}}(h(z)) J_h(z) J_{h_z}(0) / \\
&(2\sqrt{(a-\langle h(z),z_0\rangle)^3}) + c[\langle h(z)-z_0,\bar{u}\rangle \bar{z}_0 + \\
&(a-\langle h(z),z_0\rangle)u] J_{h_{h(z)}}(0) J_{h_{h(z)}}(h(z)) J_h(z) J_{h_z}(0) / \\
&(a-\langle h(z),z_0\rangle)^2| + \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sup_{h(z)\in B^n\setminus U_X} \\
&|b\bar{z}_0 J_{h_{h(z)}}(0) J_{h_{h(z)}}(h(z)) J_h(z) J_{h_z}(0) / \\
&(2\sqrt{(a-\langle h(z),z_0\rangle)^3}) + c[\langle h(z)-z_0,\bar{u}\rangle \bar{z}_0 + \\
&(a-\langle h(z),z_0\rangle)u] J_{h_{h(z)}}(0) J_{h_{h(z)}}(h(z)) J_h(z) J_{h_z}(0) / \\
&(a-\langle h(z),z_0\rangle)^2)| < q\sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[\frac{|\lambda| X}{\sqrt{a-1}} + \frac{|c|}{(a-d)^2}\right].
\end{aligned}
$$

故 $p|\lambda| W\sqrt{\frac{2}{(n+1)(a-1)}} \leqslant W\| f\|_B \leqslant$

$$\| f\circ h\|_B < q\sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[\frac{|\lambda| X}{\sqrt{a-1}} + \frac{|c|}{(a-d)^2}\right].$$

即 $pW < q\left(X + \frac{|c|\sqrt{a-1}}{|\lambda|(a-d)^2}\right)$. 若 $X < \frac{pW}{q}$, $a\to 1^+$, 导出矛盾. 故 $\exists X, r(0 < X, r < 1)$ 对任意 $w\in B^n$, 有 $d(h(A^X), w)\leqslant r$.

参考文献:

[1] 张筑生. 微分动力系统原理 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.

[2] Chen H H. Boundedness from below of composition operators on the Bloch spaces [J]. Science in China: Series A, 2003, 46(6): 838-846.

[3] 史济怀. 多复变函数论基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1996.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 26页 Continue from page 26)

[7] 王根强, 燕居让. 二阶非线性中立型泛函微分方程周期解的存在性 [J]. 数学学报, 2004, 47(4): 379-384.

[8] Chen Yuming. Multiple periodic solutions of delayed predator-prey systems with type Ⅳ functional responses [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2004 (5): 45-53.

[9] 刘炳文, 黄立宏. 一类 n阶非线性常微分方程周期解的存在性 [J]. 数学学报, 2004, 47(6): 1133-1140.

[10] Li Yongkun, Liu Ping, Zhu Lifei. Positive periodic solutions of a class of functional differential systems with feedback controls [J]. Nonlinear Anlaysis, 2004, 57: 655-666.

[11] 陈凤德, 陈晓星, 林发兴, 等. 一类时滞微分系统的周期解和全局吸引性 [J]. 应用数学学报, 2005, 28 (1): 55-64.

[12] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[13] 许天周. 应用泛函分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2002: 70.

(责任编辑: 尹 闯)