DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.01.008
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(1): 27~ 31

介值定理和它的两个应用

Intermediate Value Theorem and Its Two Applications

吴树宏
WU Shu-hong

(武汉理工大学理学院数学系,湖北武汉 430070)
(Department of Mathematics, School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan, Hubei, 430070, China)

摘要: 在映射观点理解介值定理的基础上,推广介值定理.运用所推广的介值定理将 Li-York定理推广到多变量情形,并给出单位 C^n 球 Bloch空间上复合算子的下有界性特征.
关键词: 介值定理 Darboux定理 Li-York定理 复合算子 下有界
中图法分类号: O177, O189.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)01-0027-05

Abstract The intermediate value theorem has been generalized by the point of view of mapping and then use it to generalize Li-York theorem to several variables case and give bounded below character of composition operator on Bloch space in C^n unit ball.
Key words intermediate value theorem, Darboux theorem, Li-York theorem, composition operator, boundness below

介值定理是数学分析中最基本的原理之一,但是它只对一维情形成立.从映射的观点可以这样理解介值定理: 连续映射 f 将一区间 X 的边界映成另一区间 Y 的边界,则 $f(X)\supseteq Y$.本文按照这一思路推广介值定理并应用它解决两个数学问题: 将 Li-York定理[1]推广到多变量情形,并给出单位 C^n 球 Bloch空间上复合算子的下有界性特征.

1 介值定理的推广

定义 **1.1** 设 X, Y 是拓扑空间, $C(X,Y)$ 是 X 到 Y 的所有连续映射的集合, $f,g\in C(X,Y)$, $I=[0,1]$.如果有连续映射 $H: X\times I\to Y$,使得 $\forall x\in X$, $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$,则称 f 与 g 同伦,记作 $f\simeq g: X\to Y$,或简记为 $f\simeq g$. $\forall w\in X$, $f(x)=w$, $g(x)=x$,若 $f\simeq g$,则称 X 为可缩拓扑空间.设 $A\subseteq X$,若将 A 视为拓扑空间时, A 为可缩拓扑空间,则称 A 为可缩集.

定理 **1.1** 设 X, Y 是拓扑空间, f 为从 X 到 Y 中的映射, $f(X)\cup \bar{Z}\subset Y$, $f(X)\cup \bar{Z}\neq Y$ 且 $Y/f(X)$ 为连通集, ∂Z 为 Z 相对于 Y 的边界, $\partial Z\subset f(X)$,则 $Z\subseteq f(X)$.

证明 若 $\mathrm{int}Z\neq\varnothing$, $z\in \mathrm{int}Z$, $z\notin f(X)$,则 $z\in Y/f(X)$.设 $u\in Y/(f(X)\cup \bar{Z})$.因为 $Y/\partial Z$ 为不连通集, z 与 u 分别属于 $Y/\partial Z$ 的两个不同的连通分支内,从而 z 与 u 分别属于 $Y/f(X)$ 的两个不同的连通分支内.这与 $Y/f(X)$ 为连通集矛盾,故 $\mathrm{int}Z\subseteq f(X)$.再由 $\partial Z\subset f(X)$ 知 $\bar{Z}=\mathrm{int}Z\cup \partial Z\subseteq f(X)$.

将介值定理用于梯度 ∇f,可得:

定理 **1.2**(Darboux定理) 设 $X\subseteq R^n$, Y, $Z\subseteq R^n$, f 为从 X 到 R 中的可微映射,梯度 ∇f 为从 X 到 Y 中的映射, ∂Z 为 Z 相对于 Y 的边界, $\nabla f(X)\cup \bar{Z}\subset Y$, $\nabla f(X)\cup \bar{Z}\neq Y$ 且 $Y/\nabla f(X)$ 为连通集, $\partial Z\subset \nabla f(X)$,则 $Z\subseteq \nabla f(X)$.

注 定理 1.1中的 $Y/f(X)$ 表示集合 Y 与集合 $f(X)$ 的差.设 $a<b$, $X=[a,b]$, $Y=R\cup\{\infty\}$, $Z=[\min\{f(a),f(b)\},\max\{f(a),f(b)\}]$,则单变量连续函数情形的介值定理为定理 1.1的一个特例.从形式看,定理 1.1对诸集合 X, Y, Z 无有限维及紧的要求,这决定了它的应用范围较广.当 f 为微分、积分混合算子时,若能利用介值定理找到 $f(X)$ 的子集,就可以讨论微分、积分混合方程解的存在性.

收稿日期: 2008-06-24
作者简介: 吴树宏(1963-),男,副教授,主要从事泛函分析方面的研究工作。

2 多变量 Li-York定理

恒设 $I\subset R^n$ 是给定的可缩闭集,$f: I\to R^n$ 是连续映射,$J,K,L\subset I$ 亦为可缩闭集,$R^n/I, R^n/J, R^n/K, R^n/L$ 均为非空连通集.

定义 2.1 设 f 是 R^n 中可缩闭集 I 上的连续自映射,$f^0=\mathrm{id}, f^k=f\circ f^{k-1}(k\in N)$.对可缩闭集 $J\subseteq I$,若存在 $n\in N$,使得 $f^n(J)=J$,则称 J 为 f 的周期点集,并把使得 $f^n(J)=J$ 成立的最小的自然数 n 称为 J 的周期.特别地,周期为 1的可缩闭集 J 称为是 f 的不动点集.f 的周期点集族和不动点集族分别记为 $\mathrm{Per}(f)$ 和 $\mathrm{Fix}(f)$.f 的周期点集的周期集记为 $\mathrm{PP}(f)$.

定义 2.2 若 $f(K)\supseteq L$,称 K 能够 f 覆盖 L,记为 $K\to L$.

定义 2.3 设 $J_1,J_2,\cdots,J_k$ 为 R^n 中的可缩闭集,f 为 R^n 到 R^n 的连续映射.若 $f(J_1)\subseteq J_2$, $f(J_2)\subseteq J_3,\cdots$, $f(J_{k-1})\subseteq J_k$,$f(J_k)\subseteq J_1$,则称 f 关于点集族 $\{J_1,J_2,\cdots,J_k\}$ 有 k 覆盖性质.

引理 2.1 $K\to L\Leftrightarrow\exists J\subseteq K$,使得 $f(J)=L$.并且可以要求上述可缩闭集 J 是极小的,即 J 的任何可缩闭真子集 J_1 都不能使 $f(J_1)=L$.

证明 $\Leftarrow$.显然成立.

$\Rightarrow$.设 $f(K)\supset L, f(K)\neq L$.$\forall x\in\partial K$,若 $f(x)\in f(K)/L$,则存在 x 的邻域 $O(x)$ 满足 $K/O(x)$ 为可缩集且 $f[O(x)\cap K]\subset f(K)/L$.令 $K'=K/O(x)$,则 $L\subseteq f(K')$.

若 $f(x)\in L/\partial L$,存在 x 的邻域 $O(x)$ 满足 $K/O(x)$ 为可缩集且 $f[O(x)\cap K]\subset L/\partial L$.令 $K'=K/O(x)$,此时 $f(K')\supset f(K)/f[O(x)\cap K]\supset\partial L$.由定理 1.1知 $L\subseteq f(K')$.

若 $f(\partial K)=\partial L$.设 $y\in K/\partial K$,$f(y)\in\partial f(K)/L$,则存在 $w\in\partial L$ 及连接 w 和 $f(y)$ 的闭曲线 l,使 $l\cap L=\{w\}$.从 $f^{-1}(l)$ 中,可选出以 y,z 为端点的闭曲线 $l'\subset K$,使得 K/l' 为可缩集 (其中 $z\in\partial K$).存在包含 $l'/\{z\}$ 的开集 $O(l')$,使得 $K/O(l')$ 为可缩闭集,$f(O(l'))\subset f(K)/L$.令 $K'=K/O(l')$,则 $f(K')\supseteq f(K)/f(O(l'))\supseteq L$.

对 K' 再进行上述操作,如此迭代下去.由 Zorn引理知,存在可缩集 K'' 满足 $f(K'')=L$.对所有满足 $f(K'')=L$ 的可缩集 K''.再由 Zorn引理知,存在可缩集 K^* 满足 $f(K^*)=L$ 且无 K^* 的可缩子集 K_* 满足 $f(K_*)=L$.

引理 2.2 $K\to K\Rightarrow f$ 在 K 中有极小不动点集.

证明 由引理 2.1知,$\exists K_1\subseteq K$ 且 $f(K_1)=K$.故 $K_1\to K_1$.若 $f(K_1)\neq K_1$,用 K_1 取代 K 并进行上述操作,如此下去,由 Zorn引理知,存在可缩集 K^* 满足 $f(K^*)=K^*$.再对所有满足 $f(K)=K$ 的可缩集类 K 用 Zorn引理,即得引理 2.2.

引理 2.3 如果 $I_1\to I_2\to\cdots\to I_{n-1}\to I_n\to I_1$,则 $\exists A\in\mathrm{Fix}(f^n)$,使得 $f^{j-1}(A)\in I_j, j=1,2,\cdots,n$.

证明 由引理 2.1知,存在 $J_j\subseteq I_j(j=1,2,\cdots,n)$,使得 $f(J_n)=I_1$, $f(J_{i-1})=J_j(j=2,\cdots,n)$.因为 $J_1=f^n(J_1)=I_1$, 由引理 2.2知,存在 $A\in\mathrm{Fix}(f^n)$, $A\subseteq J_1$,使得 $f^{j-1}(A)\in J_j, j=1,2,\cdots,n$.

定理 2.1 若存在可缩闭集 J,K,$J\cap K$ 不含 f 的周期点集,$J\to J\to K\to J$,则 $\mathrm{PP}(f)=N$.

证明 由 $J\to J$ 及引理 2.2知,$1\in\mathrm{PP}(f)$.若 $m\geqslant 2$,考虑 f 覆盖关系: $\underbrace{J\to J\to\cdots\to J}_{m-1}\to K\to J$.由引理 2.3可知,存在可缩闭集 $B\in\mathrm{Fix}(f^m)$,$B\subseteq J$,使得 $f^{j-1}(B)\in J(j=1,\cdots,m-1,m+1)$,$f^{m-1}(B)\in K$.因为 $J\cap K$ 不含 f 的周期点集,B,$f(B),\cdots,f^{m-1}(B)$ 两两不同,B 为 f 的 m 周期点集,故 $\mathrm{PP}(f)=N$.

注 定理 2.1为 Li-York定理多变量情形的部分推广.

3 单位 C^n 球 Bloch空间上复合算子下有界性特征

若 E 为 $n\times n$ 矩阵,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为其特征值.记 $|\lambda_{\min}|E=\min\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$,$|\lambda_{\max}|E=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$.由 $d(z,w)=|h_z(w)|$ $(z,w\in B^n)$ 定义 B^n 内的伪双曲距离.本节其它记号均参考文献 [2].由文献 [3]定理 2.3.9知,当 $w\to\partial B^n$ 时,$d(z,w)\to 1$,对 B^n 到自身里的解析映射 h 定义

$$f_h(z)=\left(\frac{1-|z|^2}{1-|h(z)|^2}\right)^{(n+1)/2}|\det J_h(z)|,$$

$z\in B^n$.

引理 3.1 $\forall a\in B^n, f\in B(B^n)$,则

$$Q_f(a)=\sqrt{\frac{2}{n+1}}|\nabla f(a)J_{h_a}(0)|=\sqrt{\frac{2(1-|a|^2)}{n+1}}\left|\nabla f(a)\left(I_n-\frac{a'\bar{a}}{1+\sqrt{1-|a|^2}}\right)\right|.$$

证明 由文献 [2]的引理 5及文献 [3]的定理 2.3.9,有

$$Q_f(z,u)=Q_{f\circ h_a\circ h_a}(z,u)=Q_{f\circ h_a}(h_a(z),J_{h_a}(z)u)$$

$=(\sqrt{2}|\nabla f\circ h_a\circ h_a(z)J_{h_a}(h_a(z))J_{h_a}(z)u|(1-$

$|h_a(z)|^2))/((n+1)[(1-|h_a(z)|^2)|J_{h_a}(z)u|^2+|\langle h_a(z),J_{h_a}(z)u\rangle|^2])^{\frac{1}{2}}$,

故

$$Q_f(a,u)=\sqrt{\frac{2}{n+1}}\cdot\frac{|\nabla f(a)J_{h_a}(0)J_{h_a}(a)u|}{|J_{h_a}(a)u|},$$

$$Q_f(a)=\sqrt{\frac{2}{n+1}}|\nabla f(a)J_{h_a}(0)|=\sqrt{\frac{2(1-|a|^2)}{n+1}}\cdot\left|\nabla f(a)\left(I_n-\frac{a'\bar{a}}{1+\sqrt{1-|a|^2}}\right)\right|.$$

引理 3.2 设 h是 B^n 到自身里的解析映射,复合算子 C_h 在 Bloch空间 $\mathcal{B}(B^n)$ 上是下有界的,则 $\overline{h(B^n)}=\overline{B^n}$.

证明 若 $\exists z_0\in\partial B^n$ 及 z_0 的一个邻域 A_{z_0} 满足 $A_{z_0}\cap h(B^n)=\varnothing$. 令 $f(z)=\frac{1}{\langle z,z_0\rangle-a}(a>1)$, 则 $\nabla f(z)=-\frac{\bar{z_0}}{(\langle z,z_0\rangle-a)^2}$. 由引理 3.1,当 $z\in B^n$ 时,有

$$Q_f(z)=\sqrt{\frac{2(1-|z|^2)}{n+1}}\cdot\frac{\left|\bar{z_0}-\frac{\bar{z}\langle z,z_0\rangle}{1+\sqrt{1-|z|^2}}\right|}{|\langle z,z_0\rangle-a|^2}\leqslant\sqrt{\frac{2(1-|z|^2)}{n+1}}\cdot\frac{2}{|\langle z,z_0\rangle-a|^2}.$$

由文献 [2]的引理 3和引理 5知 $Q_{f\circ h}(z,u)\leqslant Q_f(h(z),J_h(z)u)$, 故 $Q_{f\circ h}(z)\leqslant Q_f(h(z))$.

$$\|f\circ h\|_{\mathcal{B}}\leqslant 2\sqrt{\frac{2}{n+1}}\max_{z\in h(B^n)}\frac{1}{|\langle z,z_0\rangle-a|^2}\leqslant 2\sqrt{\frac{2}{n+1}}\max_{z\in h(B^n)}\frac{1}{|\langle z,z_0\rangle-1|^2}=k<\infty.$$

$$\|f\|_{\mathcal{B}}\geqslant Q_f\left(\frac{z_0}{a}\right)=\sqrt{\frac{2\left(1-\frac{1}{a^2}\right)}{n+1}}\circ\left[1-\frac{1}{a\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\right)}\right]\frac{1}{a\left(\frac{1}{a}-a\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{n+1}}\circ\frac{2}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1})(a-1)(a+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

因复合算子 C_h 在 Bloch空间 $\mathcal{B}(B^n)$ 上是下有界的, 由文献 [2]的引理 8知,存在 $W>0$ 满足 $\sqrt{\frac{2}{n+1}}\cdot\frac{2W}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1})(a-1)(a+1)^{\frac{3}{2}}}\leqslant W\|f\|_{\mathcal{B}}\leqslant\|f\circ h\|_{\mathcal{B}}\leqslant k<+\infty$. 此式当 $a\to 1^+$ 时矛盾,故 $\partial B^n\subset\overline{h(B^n)}$. 因 h为连续映射, B^n 为可缩集, $h(B^n)$ 亦为可缩集,故存在 n 维可缩集序列 $\{K_t,t\in\mathbb{N}\}$ 满足 $\varnothing\neq K_1\subset K_2\subset\cdots\subset K_t\subset\cdots\subset B^n$ 且 $\partial K_t\subset h(B^n)$, $\overline{\bigcup_{t=1}^{\infty}K_t}=\overline{B^n}$. 在定理 1.1中令 $X=B^n$, $Y=\mathbb{R}^n$, $Z=K_t$, $f=h$, 可知 $K_t\subseteq h(B^n)$, 从而 $\bigcup_{t=1}^{\infty}K_t\subseteq h(B^n)$. 故 $\overline{B^n}=\overline{\bigcup_{t=1}^{\infty}K_t}\subseteq\overline{h(B^n)}\subseteq\overline{B^n}$, 即 $\overline{h(B^n)}=\overline{B^n}$.

引理 3.3 若 h是 B^n 到自身里的解析映射,则 $\max_{a\in B^n}|\lambda_{\max}|[J_{h_{h(a)}}(h(a))J_h(a)J_{h_a}(0)]\leqslant 1$.

证明 设 $z\in B^1$, $a\in B^n$, $b,c\in\partial B^n$. 令 $f(z)=\langle h_{h(a)}\circ h\circ h_a(cz),b\rangle$, 则 f 在 B^1 中解析, $f(0)=0$. 因 $f'(z)=\bar{b}J_{h_{h(a)}}(h(h_a(cz)))J_h(h_a(cz))J_{h(a)}J_{h_a}(cz)c'$, 由 Schwarz引理知 $|f'(0)|=|\bar{b}J_{h_{h(a)}}(h(a))J_h(a)\circ J_{h_a}(0)c'|\leqslant 1$. 故 $|\lambda_{\max}|[J_{h_{h(a)}}(h(a))J_h(a)J_{h_a}(0)]\leqslant 1$. 从而 $\max_{a\in B^n}|\lambda_{\max}|[J_{h_{h(a)}}(h(a))J_h(a)J_{h_a}(0)]\leqslant 1$.

引理 3.4 设 h是 B^n 到自身里的解析映射,则下述两个条件等价.

(1) 存在正数 $X,r(0<X,r<1)$, 使得 $d(h(K_X),k)\leqslant r$ 对任意的 $k\in B^n$ 成立,其中 $K_X=\{z\in B^n:f_h(z)\geqslant X\}$.

(2) 存在正数 $X,r(0<X,r<1)$, 使得 $d(h(A_X),k)\leqslant r$ 对任意的 $k\in B^n$ 成立,其中 $A_X=\{a\in B^n:|\lambda_{\min}|[J_{h_{h(a)}}(h(a))J_h(a)J_{h_a}(0)]\geqslant X\}$.

证明 $\forall a\in B^n$, 有

$$|\det[J_{h_{h(a)}}(h(a))J_h(a)J_{h_a}(0)]|=|\det J_{h_{h(a)}}(h(a))|\cdot|\det J_h(a)|\cdot|\det J_{h_a}(0)|=\left[\frac{1-|a|^2}{1-|h(a)|^2}\right]^{(n+1)/2}|\det J_h(a)|.$$

再由引理 3.3知, $K_X\subseteq A_X\subseteq K_{X^n}$. 故 (1) $\Leftrightarrow$ (2).

引理 3.5 设 h为 B^n 到自身的解析映射, K为 B^n 的一开子集, $\forall z\in K$, 有 $\det J_h(z)=0$, 则 $h(B^n)$ 为 B^n 中的低维子流形.

证明 当 $z\in B^n$ 时, $\det J_h(z)$ 为解析函数, $z\in K$ 时, $\det J_h(z)=0$. 因为 K为 B^n 的一开子集,故 $z\in B^n$ 时, $\det J_h(z)=0$. 记 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)+i(y_1,y_2,\cdots,y_n)=x+iy$. 将 B^n, $h(B^n)$ 视作 $\mathbb{R}^{2n}$ 空间中的点集. 由文献 [3]命题 2.1.5知 $0\leqslant\int_{h(B^n)}dx\,dy\leqslant\int_{B^n}|\det J_h(z)|^2dx\,dy=0$. 故 $h(B^n)$ 为 B^n 中的低维子流形.

定理 3.1 设 h为 B^n 到自身的解析映射,若 $|\lambda_{\min}|[J_{h_{h(a)}}(h(a))J_h(a)J_{h_a}(0)]$ 在 B^n 上一致连续,

则复合算子 C_h 在 Bloch 空间 $B(B^n)$ 上是下有界的，当且仅当存在 $X, r(0 < X, r < 1)$ 对任意 $w \in B^n$，满足 $d(h(A_X), w) \leqslant r$，此处 $A_X = \{a \in B^n: |\lambda_{\min}|[J_{h_{h(a)}}(h(a))J_h(a)J_{h_a}(0)] \geqslant X\}$.

证明 $\Leftarrow$. 由引理 3.4及文献 [2]的定理 2知，复合算子 C_h 在 Bloch 空间 $B(B^n)$ 上是下有界的.

$\Rightarrow$. 若不存在 $X, r(0 < X, r < 1)$，对任何 $w \in B^n$，有 $d(h(A_X), w) \leqslant r$. 则存在 $\{X_k\}, \{r_k\}, \{w_k\} \subset B^n$，此处 $0 < X_k < 1, 0 < r_k < 1, k \in N$ 满足 $\lim_{k\to\infty} w_k = z_0 \in \overline{B^n}$，$\lim_{k\to\infty} X_k = 0$，$\lim_{k\to\infty} r_k = 1$，$d(h(A_{X_k}), w_k) > r_k$. 若 $z_0 \in B^n$，由文献 [3]的定理 2.3.9知，对任意 $a \in B^n$，有 $|\lambda_{\min}|[J_{h_{h(a)}}(h(a))J_h(a)J_{h_a}(0)] = |\lambda_{\min}|[J_{h_{h\circ h_a}}(0)] = 0$. 因而

$$0 = |\det[J_{h_{h(a)}}(h(a))J_h(a)J_{h_a}(0)]| = |\det J_{h_{h(a)}}(h(a))| \cdot |\det J_h(a)| \cdot |\det J_{h_a}(0)| = \left[\frac{1 - |a|^2}{1 - |h(a)|^2}\right]^{(n+1)/2} |\det J_h(a)|.$$

从而 $\det J_h(a) = 0$. 由引理 3.5知，h 将 B^n 映入 B^n 中的低维流形. 设 $0 < Z < 1$，$B_Z^n = \{z \in B^n \| z| \leqslant Z\}$，$h = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$，则 h 在 B_Z^n 中一致连续，$h(B_Z^n)$ 为 B^n 中的低维紧子流形. $\forall z_0 \in \partial B^n, t \in B, 1 \leqslant k \leqslant n$，$h_k(z_0 t)$ 为 B 上的解析函数. 当 $t \in \partial B_Z, 0 < Z_1 < Z_2 < 1$ 时，$h_k(z_0 t) \in \partial h_k(z_0 B_Z)$，$h_k(z_0 B_{Z_1}) \subseteq h_k(z_0 B_{Z_2})$. 故必有 B^n 中包含 $h(0)$ 的邻域 $K(h(0))$，满足 $\overline{K(h(0))} \not\subseteq \overline{h(B^n)}$，从而 $\overline{h(B^n)} = \overline{B^n}$. 这与引理 3.2结论矛盾，故 $z_0 \in \partial B^n$. 因为 $|\lambda_{\min}|[J_{h_{h(a)}}(h(a))J_h(a)J_{h_a}(0)]$ 在 B^n 上一致连续，那么 $\forall X > 0$，存在固定的 $v \in \partial B^n$ 及包含 z_0 点的邻域 U_X，对任意 $z \in B^n \cap U_X$ 有 $|\lambda_{\min}|[J_{h_{h(z)}}(h(z))J_h(z)J_{h_z}(0)] < X$，$|vJ_{h_{h(z)}}(h(z)) \cdot J_h(z)J_{h_z}(0)| < X$. 记 $d = \sup_{z \in B^n / U_X} |\langle z, z_0\rangle|$. 若 $\bar{z}_0, v$ 线性无关，$u, u^{\perp} \in \partial B^n \cap \operatorname{span}\{\bar{z}_0, v\}$，$\langle u, u^{\perp}\rangle = 0$，则 $\langle(-1 + |\langle z_0, \bar{u}\rangle|^2)u + \langle z_0, \bar{u}\rangle \overline{\langle z_0, \bar{u}^{\perp}\rangle} u^{\perp}, \bar{z}_0\rangle = -|\langle z_0, \bar{u}^{\perp}\rangle|^2 \langle u, \bar{z}_0\rangle + \langle z_0, \bar{u}\rangle \overline{\langle z_0, \bar{u}^{\perp}\rangle}\langle z_0, \bar{u}^{\perp}\rangle = 0$，故 $(-1 + |\langle z_0, \bar{u}\rangle|^2)u + \langle z_0, \bar{u}\rangle \overline{\langle z_0, \bar{u}^{\perp}\rangle} u^{\perp} \perp \bar{z}_0$. 又 $|(-1 + |\langle z_0, \bar{u}\rangle|^2)u + \langle z_0, \bar{u}\rangle \overline{\langle z_0, \bar{u}^{\perp}\rangle} u^{\perp}| = |\langle z_0, \bar{u}^{\perp}\rangle|$. 此时必有 $b, c \in B^1, \lambda \neq 0, u, u^{\perp} \in \partial B^n \cap \operatorname{span}\{\bar{z}_0, v\}$，$\langle u, u^{\perp}\rangle = 0$，满足 $c(-1 + |\langle z_0, \bar{u}\rangle|^2)u + c\langle z_0, \bar{u}\rangle \overline{\langle z_0, \bar{u}^{\perp}\rangle} u^{\perp} - \frac{b}{2}\bar{z}_0 = \lambda v$. 若 $\bar{z}_0, v$ 线性相关，令 $c = 0, b = 1$. 设 $a > 1$，$f(z) = \frac{b}{a - \langle z, z_0\rangle} + \frac{c\langle z - z_0, \bar{u}\rangle}{a - \langle z, z_0\rangle}$. 若 $z \neq 0, z \in B^n \cap \operatorname{span}\{\bar{z}_0, v\}$，$z = \langle z, \bar{u}\rangle \bar{u} + \langle z, \bar{u}^{\perp}\rangle \bar{u}^{\perp}$，则

$$uJ_{h_z}(0) = \langle z, \bar{u}\rangle \bar{z} - \sqrt{1 - |z|^2}\, u - \frac{(1 - \sqrt{1 - |z|^2})\langle z, \bar{u}\rangle \bar{z}}{|z|^2} = \Big[|\langle z, \bar{u}\rangle|^2 - \sqrt{1 - |z|^2} - \frac{(1 - \sqrt{1 - |z|^2})|\langle z, \bar{u}\rangle|^2}{|z|^2}\Big] u + \Big[\langle z, \bar{u}\rangle - \frac{(1 - \sqrt{1 - |z|^2})\langle z, \bar{u}\rangle}{|z|^2}\Big] \overline{\langle z, \bar{u}^{\perp}\rangle} u^{\perp} = \sqrt{1 - |z|^2}\Big[-1 + \frac{|\langle z, \bar{u}\rangle|^2}{1 + \sqrt{1 - |z|^2}}\Big] u + \frac{\sqrt{1 - |z|^2}\langle z, \bar{u}\rangle}{1 + \sqrt{1 - |z|^2}} \overline{\langle z, \bar{u}^{\perp}\rangle} u^{\perp}.$$

因为 C_h 在 $B(B^n)$ 上下有界，由文献 [2]引理 8，$\exists W > 0$ 满足 $W\|f\|_B \leqslant \|f \circ h\|_B$. 当 $a - 1$ 为充分小正数时，存在 $0 < p < q$ 使得

$$\|f\|_B = \sup_{z \in B^n} Q_f(z) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sup_{z \in B^n} \left|\left[\frac{b\bar{z}_0}{2\sqrt{(a - \langle z, z_0\rangle)^3}} + \frac{c\langle z - z_0, \bar{u}\rangle \bar{z}_0 + c(a - \langle z, z_0\rangle)u}{(a - \langle z, z_0\rangle)^2}\right] J_{h_z}(0)\right| \geqslant$$

$$\sqrt{\frac{2}{n+1}} \left|\left[\frac{b\bar{z}_0}{2\sqrt{(a - \langle \frac{z_0}{a}, z_0\rangle)^3}} + \frac{c\langle \frac{z_0}{a} - z_0, \bar{u}\rangle \bar{z}_0 + c(a - \langle \frac{z_0}{a}, z_0\rangle)u}{(a - \langle \frac{z_0}{a}, z_0\rangle)^2}\right] J_{h_{\frac{z_0}{a}}}(0)\right| \geqslant$$

$$p\sqrt{\frac{2}{(n+1)(a-1)}} \left| c(-1 + |\langle z_0, \bar{u}\rangle|^2)u + c\langle z_0, \bar{u}\rangle \overline{\langle z_0, \bar{u}^{\perp}\rangle} u^{\perp} - \frac{b}{2}\bar{z}_0\right| = p|\lambda| \sqrt{\frac{2}{(n+1)(a-1)}}.$$

由引理 3.3，有

$$\|f \circ h\|_B = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sup_{z \in B^n} \Big| b\bar{z}_0 J_h(z) J_{h_z}(0) / (2\sqrt{(a - \langle h(z), z_0\rangle)^3}) + c[\langle h(z) - z_0, \bar{u}\rangle \bar{z}_0 + (a - \langle h(z), z_0\rangle)u] J_h(z) J_{h_z}(0) / (a - \langle h(z), z_0\rangle)^2\Big| = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sup_{z \in B^n}$$

$$\Big| b\bar{z}_0 J_{h_{h(z)}}(0) J_{h_{h(z)}}(h(z)) J_h(z) J_{h_z}(0) / (2\sqrt{(a - \langle h(z), z_0\rangle)^3}) + c[\langle h(z) - z_0, \bar{u}\rangle \bar{z}_0 + (a - \langle h(z), z_0\rangle)u] J_{h_{h(z)}}(0) J_{h_{h(z)}}(h(z)) J_h(z) J_{h_z}(0) / (a - \langle h(z), z_0\rangle)^2\Big| < \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sup_{h(z) \in U_X \cap B^n}$$

$$\Big| b\bar{z}_0 J_{h_{h(z)}}(0) J_{h_{h(z)}}(h(z)) J_h(z) J_{h_z}(0) \Big/ \Big(2\sqrt{(a-\langle h(z),z_0\rangle)^3}\Big) + c[\langle h(z)-z_0,\bar{u}\rangle \bar{z}_0 + (a-\langle h(z),z_0\rangle)u] J_{h_{h(z)}}(0) J_{h_{h(z)}}(h(z)) J_h(z) J_{h_z}(0) \Big/ (a-\langle h(z),z_0\rangle)^2\Big| + \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sup_{h(z)\in B^n\setminus U_X}$$

$$\Big| b\bar{z}_0 J_{h_{h(z)}}(0) J_{h_{h(z)}}(h(z)) J_h(z) J_{h_z}(0) \Big/ \Big(2\sqrt{(a-\langle h(z),z_0\rangle)^3}\Big) + c[\langle h(z)-z_0,\bar{u}\rangle \bar{z}_0 + (a-\langle h(z),z_0\rangle)u] J_{h_{h(z)}}(0) J_{h_{h(z)}}(h(z)) J_h(z) J_{h_z}(0) \Big/ (a-\langle h(z),z_0\rangle)^2\Big| < q\sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[\frac{|\lambda| X}{\sqrt{a-1}} + \frac{|c|}{(a-d)^2}\right].$$

故 $p|\lambda| W\sqrt{\frac{2}{(n+1)(a-1)}} \leqslant W\| f\|_B \leqslant \| f\circ h\|_B < q\sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[\frac{|\lambda| X}{\sqrt{a-1}} + \frac{|c|}{(a-d)^2}\right]$.

即 $pW < q\left(X + \frac{|c|\sqrt{a-1}}{|\lambda|(a-d)^2}\right)$. 若 $X < \frac{pW}{q}$, $a\to 1^+$, 导出矛盾. 故 $\exists X, r\,(0 < X, r < 1)$ 对任意 $w\in B^n$, 有 $d(h(A^X), w) \leqslant r$.

参考文献:

[1] 张筑生. 微分动力系统原理 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.

[2] Chen H H. Boundedness from below of composition operators on the Bloch spaces [J]. Science in China: Series A, 2003, 46(6): 838-846.

[3] 史济怀. 多复变函数论基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1996.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 26页 Continue from page 26)

[7] 王根强, 燕居让. 二阶非线性中立型泛函微分方程周期解的存在性 [J]. 数学学报, 2004, 47(4): 379-384.

[8] Chen Yuming. Multiple periodic solutions of delayed predator-prey systems with type Iv functional responses [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2004 (5): 45-53.

[9] 刘炳文, 黄立宏. 一类 n阶非线性常微分方程周期解的存在性 [J]. 数学学报, 2004, 47(6): 1133-1140.

[10] Li Yongkun, Liu Ping, Zhu Lifei. Positive periodic solutions of a class of functional differential systems with feedback controls [J]. Nonlinear Anlaysis, 2004, 57: 655-666.

[11] 陈凤德, 陈晓星, 林发兴, 等. 一类时滞微分系统的周期解和全局吸引性 [J]. 应用数学学报, 2005, 28 (1): 55-64.

[12] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[13] 许天周. 应用泛函分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2002: 70.

(责任编辑: 尹 闯)