DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.01.010
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(1): 35~37

不同分布 $\tilde{\rho}$ 混合序列部分和的完全收敛性*

Complete Convergence Properties of the Sums for $\tilde{\rho}$ Mixing Random Sequences with Different Distributions

伍艳春
WU Yan-chun

(桂林工学院数理系,广西桂林 541004)
(Department of Mathematics and Physics, Guilin Institute of Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 讨论不同分布 $\tilde{\rho}$ 混合序列部分和的完全收敛性,利用矩不等式和截尾手法,获得了几乎与独立情形完全一样的 Baum 和 Katz 完全收敛定理.

关键词: $\tilde{\rho}$ 混合序列 完全收敛 矩条件
中图法分类号: O211.4 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)01-0035-03

Abstract The complete convergence properties of the sums of $\tilde{\rho}$ mixing random sequences with different distributions are discussed. As a result Baum and Katz complete convergence is extended to the case of $\tilde{\rho}$ mixing random sequences by moment inequality and truncating.

Key words $\tilde{\rho}$ mixing random sequences, complete convergence, moment condition

设 $\{X_i: i\in N\}$ 是概率空间 (Ω, B, P) 中的随机变量序列,$F_S = \sigma(X_i: i\in S\subset N)$ 为 σ-域,在 B 中给定 σ-域 F, R,令 $\rho(F,R) = \sup\{\mathrm{corr}(X,Y): X\in L_2(F), Y\in L_2(R)\}$,其中 $\mathrm{corr}(X,Y) = \dfrac{EXY - EXEY}{\sqrt{\mathrm{Var}X\,\mathrm{Var}Y}}$ 为相关系数. Bradley[1] 引入相依系数: 对 $k\geqslant 0$,令

$$\tilde{\rho}(k) = \sup\{\rho(F_S, F_T): 有限子集\ S, T\subset N\ 且\ \mathrm{dist}(S,T)\geqslant k\}. \tag{1}$$

显然,$0\leqslant \tilde{\rho}(k+1)\leqslant \tilde{\rho}(k)\leqslant 1$ 且 $\tilde{\rho}(0) = 1$.

$\tilde{\rho}$ 混合与通常的 ρ 混合有一定的类似,但并不相同,它们互不包含,事实上,在通常的 ρ 混合系数 $\rho(k)$ 中,(1)式中的 S, T 分别是 $[1,n]$ 和 $[n+k,\infty]$ 中的子集;另外,$\tilde{\rho}$ 混合只要求存在某个 $k_0\in N$,使 $\tilde{\rho}(k_0) < 1$,在这一点上要比 ρ 混合的要求 $\rho(k)\to 0$, $k\to\infty$ 弱很多.文献[2]在 $\tilde{\rho}$ 相依序列中得到了与独立情形一致的矩不等式.本文利用矩不等式和截尾等手法把文献[3]中定理 2 推广到不同分布的情况,获得了几乎与独立情形下完全一样的 Baum 和 Katz 完全收敛定理.全文用 c 来记与 n 无关的正常数,不同之处可取不同的值;以"<<"表示通常的大"O";I_A 表示集合 A 上的示性函数;$S_j \hat{=} \sum_{i=1}^{j} X_i$.

收稿日期: 2007-07-09
作者简介: 伍艳春(1964-),女,副教授,主要从事数理统计研究。
* 广西自然科学基金项目(编号: 桂科基 0447096),广西教育厅科研基金项目([2004]20)资助。

1 定义及引理

定义 1[3] 对随机序列 $\{X_i: i\in N\}$,如果存在 $k\in N$,使 $\tilde{\rho}(k) < 1$,则称 $\{X_i: i\in N\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合序列.

注 在极限性质的讨论中,对 $\tilde{\rho}$ 混合序列 $\{X_i: i\in N\}$,即存在 $k_0\in N$,使 $\tilde{\rho}(k_0) < 1$,如果 $k_0 > 1$,可以考虑 $\{X_i\}$ 的 k_0 个子列 $\{X_{k_0 i+j}; i\in N\}$, $j = 0, 1, 2, \cdots, k_0 - 1$,而每一个子列的 $\tilde{\rho}(1)$ 即为原序列的 $\tilde{\rho}(k_0)$,因此,对 $\tilde{\rho}$ 混合序列,可不失一般性假设 $\tilde{\rho}(1) < 1$.

引理 1[2] 设 $\{X_i: i\in N\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合序列,满足 $EX_i = 0, EX_i^2 < \infty$,则存在仅依赖于 $\tilde{\rho}$ 的常数 c,使得对 $\forall n\geqslant 1$,有

$$ES_n^2\leqslant c\sum_{i=1}^{n} EX_i^2, E\max_{1\leqslant j\leqslant n} S_j^2\leqslant c\log^2 n\sum_{i=1}^{n} EX_i^2.$$

2 主要结果

定理 1 设 $\{X_i: i\in N\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合序列,满足

$$\sup_i E|X_i|^p < \infty,\ 0 < p < 2,\ \alpha p \geq 1. \qquad (2)$$

当 $\alpha \leq 1$时,进一步假设

$$EX_i = 0, \qquad (3)$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(|S_n| \geq \varepsilon n^{\alpha}) < \infty, \qquad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} \log^{-2} n P(\max_{1\leq j\leq n}|S_j| \geq \varepsilon n^{\alpha}) < \infty. \qquad (5)$$

证明 记 $Y_i \overset{\wedge}{=} X_i I_{(|X_i|<n^{\alpha})}$,先证明

$$n^{-\alpha}\max_{1\leq j\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{j} EY_i\Big| \to 0, n\to\infty. \qquad (6)$$

(i) 当 $\alpha \leq 1$时,由(2)式和(3)式得

$$n^{-\alpha}\max_{1\leq j\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{j} EY_i\Big| = n^{-\alpha}\max_{1\leq j\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{j} E(Y_i - X_i + X_i)\Big| \leq n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}|E(X_i - Y_i)| = n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}|EX_i I_{(|X_i|>n^{\alpha})}| \leq n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}E|X_i| I_{(|X_i|>n^{\alpha})} \leq n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|\cdot\frac{|X_i|^{p-1}}{n^{\alpha(p-1)}}I_{(|X_i|>n^{\alpha})} = n^{-\alpha p}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|^p I_{(|X_i|>n^{\alpha})} \leq n^{-\alpha p}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sup_i E|X_i|^p I_{(|X_i|>n^{\alpha})} = n^{1-\alpha p}\sup_i E|X_i|^p I_{(|X_i|>n^{\alpha})} \to 0, n\to\infty.$$

(ii) 当 $\alpha > 1, p \geq 1$时,

$$n^{-\alpha}\max_{1\leq j\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{j} EY_i\Big| \leq n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}E|X_i| I_{(|X_i|\leq n^{\alpha})} \leq n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}\sup_i E|X_i| I_{(|X_i|\leq n^{\alpha})} = n^{1-\alpha}\sup_i E|X_i| I_{(|X_i|\leq n^{\alpha})} << n^{1-\alpha} \to 0, n\to\infty.$$

(iii) 当 $\alpha > 1, p < 1$时,

$$n^{-\alpha}\max_{1\leq j\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{j} EY_i\Big| << n^{1-\alpha}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sup_i E|X_i| I_{(|X_i|\leq n^{\alpha})} = n^{1-\alpha}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sup_i E|X_i| I_{((i-1)^{\alpha}<|X_i|\leq i^{\alpha})}.$$

因为 $\alpha p \geq 1$,所以

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{1-\alpha}\sup_i E|X_i| I_{((i-1)^{\alpha}<|X_i|\leq i^{\alpha})} \leq \sum_{i=1}^{\infty} i^{1-\alpha}\sup_i E\frac{|X_i||X_i|^{p-1}}{i^{\alpha(p-1)}}I_{((i-1)^{\alpha}<|X_i|\leq i^{\alpha})} = \sum_{i=1}^{\infty} i^{1-\alpha p}\sup_i E|X_i|^p I_{((i-1)^{\alpha}<|X_i|\leq i^{\alpha})} \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sup_i E|X_i|^p I_{((i-1)^{\alpha}<|X_i|\leq i^{\alpha})} = \sup_i E|X_i|^p < \infty.$$

又由 Kronecker引理[4],得

$$n^{1-\alpha}\sum_{i=1}^{n}\sup_i E|X_i| I_{((i-1)^{\alpha}<|X_i|\leq i^{\alpha})} \to 0, n\to\infty,$$

故 $n^{-\alpha}\max_{1\leq j\leq n}|\sum_{i=1}^{j} EY_i| \to 0, n\to\infty$.

综合(i)、(ii)、(iii)得(6)式成立.因此,$\forall \varepsilon > 0$,当 n 充分大时有

$$\max_{1\leq j\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{j} EY_i\Big| < \frac{\varepsilon}{2}n^{\alpha},\ \Big|\sum_{i=1}^{n} EY_i\Big| < \frac{\varepsilon}{2}n^{\alpha}.$$

又 $\{|S_n| \geq \varepsilon n^{\alpha}\} \subset \bigcup_{i=1}^{n}\{|X_i| > n^{\alpha}\} \cup \{|\sum_{i=1}^{n} Y_i| \geq \varepsilon n^{\alpha}\} \subset \bigcup_{i=1}^{n}\{|X_i| > n^{\alpha}\} \cup \{|\sum_{i=1}^{n}(Y_i - EY_i)| \geq \frac{\varepsilon}{2}n^{\alpha}\} \overset{\wedge}{=} A_n + B_n$,

$\{\max_{1\leq j\leq n}|S_j| \geq \varepsilon n^{\alpha}\} \subset \bigcup_{i=1}^{n}\{|X_i| > n^{\alpha}\} \cup \{\max_{1\leq j\leq n}|\sum_{i=1}^{j} Y_i| \geq \varepsilon n^{\alpha}\} \subset \bigcup_{i=1}^{n}\{|X_i| > n^{\alpha}\} \cup \{|\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{j}(Y_i - EY_i)| \geq \frac{\varepsilon}{2}n^{\alpha}\} \overset{\wedge}{=} A_n \cup C_n$.

所以,$\forall \varepsilon > 0$,当 n 充分大时有

$$P\{|S_n| \geq \varepsilon n^{\alpha}\} \leq P(A_n) + P(B_n),\ P\{\max_{1\leq j\leq n}|S_j| \geq \varepsilon n^{\alpha}\} \leq P(A_n) + P(C_n).$$

要证(4)式和(5)式,只需证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}P(A_n) < \infty, \qquad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}P(B_n) < \infty, \qquad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}\log^{-2} nP(C_n) < \infty. \qquad (9)$$

先证明(7)式.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\{|X_i| > n^{\alpha}\}\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}\sum_{i=1}^{n}P(|X_i| > n^{\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n}^{\infty}P(j^{\alpha} < |X_i| \leq (j+1)^{\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}P(j^{\alpha} < |X_i| \leq (j+1)^{\alpha}) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{j} n^{\alpha p-2}\sum_{i=1}^{n}P(j^{\alpha} < |X_i| \leq (j+1)^{\alpha}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} j^{\alpha p-1}\sum_{i=1}^{j}P(j^{\alpha} < |X_i| \leq (j+1)^{\alpha}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} j^{\alpha p-1}\cdot j\max_{1\leq i\leq j}P(j^{\alpha} < |X_i| \leq (j+1)^{\alpha}) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{\alpha p}\max_{1\leq i\leq j}P(j^{\alpha} < |X_i| \leq (j+1)^{\alpha}) << E|X_i|^p \leq \sup_i E|X_i|^p < \infty. \qquad (10)$$

再证明(8)式.记 $\tilde{Y}_i \overset{\wedge}{=} Y_i - EY_i, \tilde{S}_j \overset{\wedge}{=} \sum_{i=1}^{j}\tilde{Y}_i$,由引理1、Markov不等式、$C_r$不等式[4]及(10)式的证

明过程,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-2}P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-2}P(|\sum_{i=1}^{n}(Y_i -$$

$$EY_i)| \geqslant \frac{X}{2}n^{T}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-2}P(|\sum_{i=1}^{n}\Upsilon_i| \geqslant$$

$$\frac{X}{2}n^{T}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-2}\frac{E|\sum_{i=1}^{n}\Upsilon_i|^2}{(\frac{X}{2}n^{T})^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-2}\cdot 2\cdot$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}E|\Upsilon_i|^2}{(\frac{X}{2}n^{T})^2} << \sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-2-2T}\sum_{i=1}^{n}E\Upsilon_i^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-2-2T}\cdot$$

$$\sum_{i=1}^{n}EX_i^2 I_{(|X_i|\leqslant n^T)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-2-2T}\cdot$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}EX_i^2 I_{((j-1)^T<|X_i|\leqslant j^T)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-2-2T}\cdot$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2 I_{((j-1)^T<|X_i|\leqslant j^T)} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty} n^{Tp-2-2T}\cdot$$

$$\sum_{i=1}^{j}EX_i^2 I_{((j-1)^T<|X_i|\leqslant j^T)} << \sum_{j=1}^{\infty} j^{Tp-1-2T}\cdot$$

$$\sum_{i=1}^{j}EX_i^2 I_{((j-1)^T<|X_i|\leqslant j^T)} << \sum_{j=1}^{\infty} j^{Tp-1-2T}\sum_{i=1}^{j}E|X_i|^2\cdot$$

$$\frac{E|X_i|^{p-2}}{j^{T(p-2)}} I_{((j-1)^T<|X_i|\leqslant j^T)} =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}\sum_{i=1}^{j}E|X_i|^p I_{((j-1)^T<|X_i|\leqslant j^T)} \leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}j\sup_i E|X_i|^p I_{((j-1)^T<|X_i|\leqslant j^T)} =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sup_i E|X_i|^p I_{((j-1)^T<|X_i|\leqslant j^T)} = \sup_i E|X_i|^p < \infty.$$

最后证明(9)式.由 Markov不等式、引理 1及(8)式的证明过程有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-2}\log^{-2}nP(C_n) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-2}\log^{-2}nP(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\sum_{i=1}^{j}\Upsilon_i| \geqslant \frac{X}{2}n^{T}) \leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-2}\log^{-2}n\frac{E(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\sum_{i=1}^{j}\Upsilon_i|)^2}{(\frac{X}{2}n^{T})^2} \leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-2}\log^{-2}n\cdot \frac{4}{X^2}n^{-2T}c\log^2 n\sum_{i=1}^{n}E\Upsilon_i^2 <<$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{Tp-2-2T}\sum_{i=1}^{n}E\Upsilon_i^2 << \sup_i E|X_i|^p < \infty.$$

定理 1证明完毕.

参考文献:

[1] Breadley R C. On the spectral density and asymptotic normality of weakly dependent random fields [J]. J Theoret Probab, 1992, 5: 355-374.

[2] 杨善朝.一类随机变量部分和的矩不等式及其应用[J].科学通报,1998,43(17): 1823-1827.

[3] 吴群英. ρ混合序列的若干收敛性质[J].工程数学学报,2001,18(3): 58-64.

[4] 林正炎,陆传荣,苏中根.概率极限理论基础[M].北京:高等教育出版社,1999.

(责任编辑:尹 闯)

使用复杂网络研究混沌系统的新方法

混沌系统对初始条件具有极为敏感的依赖性,初始条件的极小偏差,将会引起结果的极大差异。一个蝴蝶在中国的北京轻拍翅膀,就有可能导致大洋彼岸的纽约卷起一场龙卷风,这就是大家共知的"蝴蝶效应"。自从 1963年气象学家洛仑兹(Lorenz)提出混沌系统的蝴蝶效应以来,很多有效的方法被提出来研究具有"奇异吸引子 (strange attractor)"的混沌系统。最近我国科学家提出一种使用复杂网络来研究混沌系统的新方法。科学家们引入一种有效机制将不同类型系统变换成对应的复杂网络,并研究各种子图在复杂网络中出现的相对频率。复杂网络中的各种子图分布不仅刻画和区分了不同类型的连续动态系统,如周期信号、混沌信号和含噪周期信号等,而且将不同种类的动态系统归类为不同的超家族。不同子图在复杂网络中的分布有效度量了不同系统的动态特性。这种方法不仅可以应用于连续动态系统,也能应用于各种类型的离散系统,如混沌映射超混沌映射和随机噪声之间的区分。

(据科学网)