DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.01.015
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(1): 52~ 54

求解非线性方程的一个新的预测-校正方法

A New Forecast-Correction for Solving Nonlinear Equations

张创业,何登旭
ZHANG Chuang-ye, HE Deng-xu

(广西民族大学数学与计算机科学学院,广西南宁 530006)
(College of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要: 将一种基于数值积分公式的隐式迭代格式与一种改进的牛顿迭代法结合,得到一种新的求解非线性方程的预测-校正方法,并用数值实例来验证该方法.新方法比一些已知的方法收敛阶、收敛精度更高,适合函数类的范围更宽,是一种较优的方法.

关键词: 非线性方程 牛顿迭代 收敛阶
中图法分类号: O241.7 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)01-0052-03

Abstract An implicit iteration formula for solving nonlinear equations is presented, then by the implicit iteration scheme and the improved Newton iterative method, a new forecast correction method is given, and use numerical examples to verify the method. The new method is better than the known methods on the high covergence order and convergence precision. The method is superior in range of function class to the other methods.

Key words nonlinear equaton, Newton's iteration, convergence order

经典的牛顿迭代法(CN法)是非线性方程(组)求根的一个基本方法,它二次收敛到单根,线性收敛到重根.牛顿法因收敛速度快而得到广泛应用.最近,一些学者提出一些新的迭代算法[1~6].文献[1]提出具有二阶收敛速度的指数迭代法.文献[2]对牛顿法做了一个重要的改进,改进后的牛顿法保持牛顿迭代法的收敛速率和计算效率,克服了强加于$f(x)$的单调性要求$f'(x)\neq 0$,但是改进后的牛顿法仍然只有二阶收敛.文献[4]提出调和平均牛顿方法(HN法)和中点牛顿方法(MN法),它们至少三阶收敛到单根.文献[6]提出两个牛顿迭代方法(SN法和GN法),它们也至少三阶收敛到单根.

本文基于一个数值积分公式,给出一个求解非线性方程的隐式迭代格式,然后将得到的隐格式与文献[2]中改进的牛顿法结合,得到了一个新的预测-校正方法.该方法摒弃了强加于$f(x)$的单调性要求$f'(x)\neq 0$,比文献[2]中改进的牛顿迭代法的收敛性提高了一阶.

1 预备知识

定义 1[6] 设序列$\{x_k\}_0^\infty$收敛于τ,若存在$p\geqslant 1$及常数$C\geqslant 0$,使得$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\tau}{(x_k-\tau)^p}=C$,则称序列$\{x_k\}_0^\infty$是$p$阶收敛的,$C$称为收敛因子.$p=1$时称$x_k$收敛于$\tau$是线性收敛,$p>1$是超线性收敛,$p=2$是二阶收敛.

在定义1中,令$e_n=x_n-\tau$,则称关系式

$$e_{n+1}=Ce_n^p+O(e_n^{p+1}) \qquad (1)$$

为误差方程.p称为收敛阶,$p=1$时称x_k收敛于τ是线性收敛,$p>1$是超线性收敛,$p=2$是二阶收敛.

引理 1 函数$f(x)$在$[x_0,x_1]$上的定积分满足数值积分公式

$$\int_{x_0}^{x_1}f(x)dx\approx\frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]+\frac{h^2}{12}[f'(x_0)+f'(x_1)], \qquad (2)$$

其中$h=x_1-x_0$.

收稿日期: 2008-05-20
作者简介: 张创业(1980-),男,硕士研究生,主要从事智能计算与算法优化研究.

2 一个新的预测校正格式

设 T是方程 $f(x)=0$的根, $f'(T)\neq 0$, $f(x)$在开区间 I内有二阶连续导数, 显然由牛顿 –莱布尼茨公式可得

$$f(x)=f(x_n)+\int_{x_n}^{x} f'(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

将 (3) 式中右端积分用数值积分 (2) 式近似代替, 并令 $x=T$, 则

$$0\approx f(x_n)+\frac{T-x_n}{2}[f'(x_n)+f'(T)]+\frac{(T-x_n)^2}{12}[f''(x_n)-f''(T)]. \qquad (4)$$

用 x_{n+1}近似代替 (4) 式中的 T, 整理得迭代格式

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/\left(\frac{f'(x_n)+f'(x_{n+1})}{2}+\frac{(x_{n+1}-x_n)(f''(x_n)-f''(x_{n+1}))}{12}\right). \qquad (5)$$

显然, (5)式关于 x_{n+1}是隐式的, 这给求解带来很大的麻烦. 为了避免隐式求解,可先用文献 [3]中改进的牛顿法进行预测, 再用 (5)式进行校正, 即得到预测-校正格式

$$\begin{cases} Z_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)+f(x_n)}, n=0,1,2,\cdots, \\ x_{n+1}=x_n-f(x_n)/ \\ \quad \left(\dfrac{f'(x_n)+f'(Z_{n+1})}{2}+\dfrac{(Z_{n+1}-x_n)(f''(x_n)-f''(Z_{n+1}))}{12}\right), \\ \quad n=0,1,2,\cdots. \end{cases} \qquad (6)$$

3 收敛性分析

定理 1 设 T是充分光滑函数 $f(x): I\subseteq R\to R$的零点, I是一个开区间, $f'(T)\neq 0$,则当 x_0充分接近 T时,由迭代公式 (6)所得的序列 $\{x_n\}$至少三阶收敛.

证明 因为 $f(x)$充分光滑, 且 $f(T)=0, f'(T)\neq 0$, 所以将 $f(x_n)$在 T处展开得到

$$f(x_n)=f'(T)(x_n-T)+\frac{f''(T)}{2}(x_n-T)^2+\cdots \qquad (7)$$

令 $e_n=x_n-T$, $c_k=\dfrac{1}{k!}\dfrac{f^{(k)}(T)}{f'(T)}$, $(k=2,3,\cdots)$, 则 (7)式可化为

$$f(x_n)=f'(T)[e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+\cdots], \qquad (8)$$

同理, 将 $f'(x_n)$, $f'(Z_{n+1})$, $f''(x_n)$, $f''(Z_{n+1})$,分别在 T处展开并代入 (6)式, 整理可得

$$e_{n+1}=(c_2+c_2^2)e_n^3+O(e_n^4). \qquad (9)$$

所以,由 (9)式可知, 由迭代公式 (6)所得的序列 $\{x_n\}$至少三阶收敛.

4 数值实验

例 1 给定误差$|f(x^*)|<X=10^{-8}$,测试函数 $f(x)$取自文献 [1],分别为 1. $f(x)=x^3-2x-5$, $x\in[1,5]$, $x_0=5$; 2. $f(x)=\arctan x+\sin x+x-2$, $x\in[1,4]$, $x_0=4$; 3. $f(x)=xe^x-5x^3+6$, $x\in[4,6]$, $x_0=6$; 4. $f(x)=x^{10}-2x^3-x+1$, $x\in[1,2]$, $x_0=2$; 5. $f(x)=(x^3+x-11)/(3x^4-2x^2+5)$, $x\in[1,2.8]$, $x_0=2.8$.

从表 1结果可以看出,在相同迭代次数下, 新方法的精度明显比文献 [1]方法高,所得到的预测校正格式的收敛阶也比文献 [2]提高了一阶.

例 2 测试函数 $f(x)$取自文献 [6], 除新方法的数据外,其余的数据也取自文献 [6], 给定误差

表 1 数值结果

Table 1 Numerical results

问题 Problem	新方法 New algorithm			指数迭代法 Index iteration[1]			迭代公式 (1) Iteration(1)[2]		
	N	x^*	$f(x^*)$	N	x^*	$f(x^*)$	N	x^*	$f(x^*)$
1	6	2.09455148154233	8.31e-014	7	2.09455148154307	8.31e-012	11	2.0945514815701	3.10e-010
2	13	0.71858676906358	4.44e-015	4	0.718586769074032	-2.52e-011	9	0.718586769064	6.79e-014
3	6	4.68753083769978	7.38e-013	5	4.687530837699779	2.17e-013	9	4.687530837699	7.39e-013
4	8	1.11033918535812	2.88e-015	11	1.11033918535812	1.98e-015	12	1.110339185358	2.89e-015
5	4	2.074344075860467	-2.05e-016	4	2.074340758537658	-1.79e-011	5	2.07434075860467	2.05e-016

问题 Problem	迭代公式 (2) Iteration(2)[2]			SN[6]			GN[6]		
	N	x^*	$f(x^*)$	N	x^*	$f(x^*)$	N	x^*	$f(x^*)$
1	12	2.094551481542	3.81e-014	126	2.09455148201	5.17e-09	5	2.09455148154	3.89e-014
2	10	0.718586769066	5.74e-012	118	0.071858676964	1.41e-09	144	0.71858676964	2.89e-012
3	9	4.6875308381	7.39e-013	122	4.68753083823	1.54e-07	5	4.68753083769	3.41e-012
4	12	1.110339185358	2.89e-015	129	1.110339185909	9.52e-09	7	1.110339185444	1.4925e-09
5	5	2.07434075860467	2.05e-016	134	2.07434075917295	1.52e-010	5	2.07434075860467	2.05e-016

$|f(x^*)| < \varepsilon = 10^{-14}$.计算结果见表 2.

测试函数 $f(x)$分别取为 (a) $x^3 + x^2 - 10$, $\alpha = 1.8674600246063$, (b) $(x-1)^6 - 1$, $\alpha = 2$, (c) $(x-1)^3(x+2)^4$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$, (d) $\sin(x-1) + x - 1$, $\alpha = 1$.

从表 2结果可以看出,新方法适合函数类的范围比文献 [4]和文献 [6]都要宽 .

表 2 数值实验结果

Table 2 Numerical results

$f(x)$	x_0	迭代次数 N Iteration times N				
		HN[4]	MN[4]	SN[6]	GN[6]	新方法 New algorithm
(a)	-0.5	42	10	10	4	8
	1	3	3	3	3	8
	2	3	3	3	3	4
(b)	1.5	7	58	195	12	13
	2.5	4	5	5	5	6
	3	5	6	6	5	7
(c)	1.4	41	49	49	46	49
	-3	60	70	72	67	70
(d)	1.5	3	3	2	3	4
	3	14643	4	3	7	63
	-1	18592	4	3	7	13

5 结束语

新方法在较广的函数类中至少是三阶收敛,比文献 [1]的指数迭代法高一阶.同时,新方法也保持了文献 [2]的一个重要的优点:去掉了强加给 $f(x)$ 的单调性即要求 $f'(x) \neq 0$.

总之,不同的方法有不同的特点,从以上的理论分析和数值实验可知,新方法是一种较优的求解非线性方程的方法,在理论上和实用上都有一定的价值 .

参考文献:

[1] 吴新元. 解非线性方程的二阶敛速指数迭代法 [J]. 计算数学, 1998, 20(4): 367-370.

[2] 吴新元.对牛顿迭代法的一个重要修改 [J]. 应用数学与力学, 1999, 20(8): 863-866.

[3] 吴忠麟, 吴新元.解非线性方程的一个非线性迭代法 [J]. 高等学校计算数学学报, 1995, 17(4): 318-322.

[4] ZBAN A Y O. Some variants of Newton's methods [J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17: 677-682.

[5] 郑权,黄松奇. 解非线性方程的 Newton类方法及其变形 [J]. 清华大学学报:自然科学版, 2004, 44(3): 372-375.

[6] 王霞,赵玲玲,李飞敏. 牛顿方法的两个新格式 [J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(1): 72-76.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 47页 Continue from page 47)

再由 (11)式, (12)式, (14)式和 (17)式得到

$$\hat{l}_{n_2}(\theta) = \left[n_2^{-1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(\hat{Y}_{i2} - \theta\right)^2 \right]^{-1} \left[n_2^{-1/2}\sum_{i=1}^{n_2}\left(\hat{Y}_{i2} - \theta\right) \right]^2 + o_p(1). \quad (18)$$

最后由引理 1和 2知,定理 1成立.

由于非标准的 χ^2 分布不能对 θ 作区间估计,故需引入调整的对数经验似然比 $\hat{l}_{n_2,ad}(\theta)$,首先构造 $V(\theta)$ 的相合估计,令

$$\bar{X}_2 = n_2^{-1}\sum_{i=1}^{n_2} X_{i2},\ \hat{\sigma}^2 = n_1^{-1}\sum_{i=1}^{n_1}(Y_{i1} - X_{i1}^{\tau}\hat{\beta})^2,\ \overline{X_1X_1^{\tau}} = n_1^{-1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{i1}X_{i1}^{\tau},\ \overline{X_2X_2^{\tau}} = n_2^{-1}\sum_{i=1}^{n_2} X_{i2}X_{i2}^{\tau},$$

则 $\hat{V}(\theta) = \hat{\beta}^{\tau}\,\overline{X_2X_2^{\tau}}\,\hat{\beta} - 2(\bar{X}_2)^{\tau}\hat{\beta}\theta + \theta^2 + \frac{n_2}{n_1}(\bar{X}_2)^{\tau}(\overline{X_1X_1^{\tau}})^{-1}\bar{X}_2\hat{\sigma}^2$ 为 $V(\theta)$ 的相合估计.由引理 2知 $\hat{V}_1(\theta) = n_2^{-1}\sum_{i=1}^{n_2}(\hat{Y}_{i2} - \theta)^2$ 为 $V_1(\theta)$ 的相合估计,进一步令 $r(\theta) = \frac{\hat{V}_1(\theta)}{\hat{V}(\theta)}$, $\hat{l}_{n_2,ad}(\theta) = r(\theta)\hat{l}_{n_2}(\theta)$.

定理 2 在定理 1的假设下,如果 θ 为真参数,则 $\hat{l}_{n_2,ad}(\theta)$ 渐近 χ_1^2 分布,即 $P(\hat{l}_{n_2,ad}(\theta) \leq c_\alpha) = 1 - \alpha + o(1)$,其中 $P(\chi_1^2 \leq c_\alpha) = 1 - \alpha$.

证明 由 $\hat{l}_{n_2,ad}(\theta)$ 的定义和 (18) 式知

$$\hat{l}_{n_2,ad}(\theta) = \left(n_2^{-1/2}\sum_{i=1}^{n_2}\frac{\hat{Y}_{i2} - \theta}{\hat{V}^{1/2}(\theta)} \right)^2 + o_p(1). \quad (19)$$

由于 $\hat{V}(\theta)$ 为 $V(\theta)$ 的相合估计,由引理 1和 (19)式,定理 2得证.

注 由定理 2可以构造 θ 的置信区间,令 $I_{n_2,\alpha} = \{\theta' : \hat{l}_{n_2,ad}(\theta') \leq c_\alpha\}$,则 $P(\theta \in I_{n_2,\alpha}) = 1 - \alpha + o(1)$.

参考文献:

[1] Owen A. Empirical likelihood ratio confidence intervals [J]. Biometrika, 1988, 75(2): 237-249.

[2] 苏淳.概率论 [M].北京:科学出版社, 2004.

[3] Owen A. Empirical likelihood ratio confidence regions [J]. Annals of statistics, 1990, 18(1): 90-120.

(责任编辑: 尹 闯)