

修正 Berk-Jones 检验统计量在零假设下的极限分布*

On the Limit Null Distributions of Reversed Berk-Jones-Type Test Statistics

张军舰, 李玲玲

ZHANG Jun-jian, LI Ling-ling

(广西师范大学数学科学学院, 广西桂林 541004)

(College of Mathematical Sciences, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 讨论上界型修正 Berk-Jones (RBJ) 拟合优度检验统计量在简单零假设下的极限分布后, 给出一种新的积分型 RBJ 检验统计量, 并研究这种统计量在简单零假设下的极限分布, 然后对这两种 RBJ 型检验与其他常用检验的功效进行模拟比较。模拟结果显示, 两种 RBJ 型检验在我们所作的大多数模拟情况下不比常用的拟合优度检验差。

关键词: 拟合优度检验 修正 Berk-Jones 检验 极限分布

中图分类号: O212.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1005-9164(2009)02-0113-04

Abstract The limit null distribution of the reversed Berk-Jones (RBJ) test statistic is investigated. In addition, a new integral-type RBJ (IRBJ) test statistic and its limit null distribution are also given. Finally, the two (RBJ, IRBJ) test statistics are compared with some existing goodness-of-fit tests by simulations. Simulation results show that the two tests are not less powerful in most cases we conducted.

Key words goodness of fit, reversed Berk-Jones test, limit distribution

设 X_1, \dots, X_n 为来自 X 的独立同分布样本, X 的分布函数为 F . 考虑检验问题

$$H_0: F \equiv F_0 \leftrightarrow H_1: F \neq F_0, \quad (1)$$

其中 F_0 为一完全已知的连续分布函数. 检验问题 (1) 实际上就是简单零假设. 对于简单零假设, 检验较多, 例如卡方检验、加权 Kolmogorov-Smirnov (KS) 检验、加权 Crané r-von Mises (CV) (包括 Anderson-Darling (AD)) 检验、Berk-Jones (BJ) 检验^[1]、修正 Berk-Jones (RBJ) 检验^[2]、Einmahl and McKeague (EM) 检验^[3] 以及文献 [4, 5] 中所讨论的广义非参似然比检验. 其中 RBJ 检验有点类似于 BJ (一种非参似然比) 检验, 它为上界型检验, 其检验统计量为

$$R_n = \sup_{X_{(1)} \leq x \leq X_{(n)}} \left\{ F_0(x) \log \frac{F_0(x)}{F_n(x)} + [1 - F_0(x)] \log \frac{1 - F_0(x)}{1 - F_n(x)} \right\}, \quad (2)$$

其中 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ 为 X_1, \dots, X_n 的次序统计量, F_n 为相应的经验分布函数. 有关检验统计量 (2), 文献 [2] 给出其精确分布, 但是其计算比较复杂, 不太实用; 文献 [6] 将其极限分布作为一个需要研究的问题提出; 除此之外很少有文章涉及. 事实上, 检验统计量 (2) 与 BJ 检验很类似, 而 BJ 检验与其他检验相比具有较多的优势. 例如, 文献 [1] 指出 BJ 检验在 Bahadur 渐近效率意义下优于任何加权的 KS 检验, 文献 [4] 通过大量模拟给出 BJ 检验在大多数情况下功效均优于同类型的拟合优度检验等等. 因此, 导出 RBJ 检验统计量 (2) 的极限分布是一项很有意义的理论工作.

不管是 BJ 检验统计量, 还是 RBJ 检验统计量, 它们都是上界型形式. 众所周知, 上界型拟合优度检验对异常数据比较敏感, 而积分型可以克服这一缺陷. 对 BJ 检验, 文献 [3] 给出了相应的积分形式; 对 RBJ 检验, 类似地可以给出相应的积分形式. 由于积分型 RBJ 检验统计量在零假设 (1) 下的精确分布求解比较困难, 本文主要讨论它的渐近性质. 本文首先讨论 RBJ 检验统计量 (2) 在简单零假设下的渐近分

收稿日期: 2008-11-17

作者简介: 张军舰 (1973-), 男, 博士, 主要从事非参数统计研究.

* 国家自然科学基金项目 (10661003), 广西自然科学基金项目 (桂科自 0832102), 广西师范大学博士基金项目资助.

布,然后给出积分型 RBJ检验统计量,并研究这种统计量在简单零假设下的渐近分布.最后对这两种 RBJ型检验与其它常用检验的功效进行模拟比较.

1 上界型 RBJ检验统计量在零假设下的极限分布

对 RBJ检验统计量 (2)在零假设下的极限分布,有如下结论.

定理 1 在 (1)式中零假设成立时,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(nR_n - e_n \leq x) = \exp(-4\exp(-x)), \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(nR_n - \frac{1}{2} \frac{G_n^2}{b_n^2} \leq x) = \exp(-4\exp(-x)), \quad (4)$$

其中 $b_n = \sqrt{2 \log 2n}$, $G_n = 2 \log 2n + \frac{1}{2} \log 3n - \frac{1}{2} \log 4^C$,

$\log 3n = \log \log n$, $\log 3n = \log \log \log n, \dots$, $e_n = \log 2n + \frac{1}{2} \log 3n - \frac{1}{2} \log 4^C$.

证明 令

$$K(x, y) = x \log \frac{x}{y} + (1-x) \log \frac{1-x}{1-y},$$

对 $K(x, y)$ 在 $x = y$ 点进行 Taylor 展开容易得到

$$K(x, y) = (y-x)^2 / [2y^*(1-y^*)],$$

其中 y^* 落在 x 与 y 之间.因此

$$K(F_0(x), F_n(x)) = F_0(x) \log \frac{F_0(x)}{F_n(x)} + [1 - F_0(x)] \log \frac{1 - F_0(x)}{1 - F_n(x)} = \frac{1}{2} \frac{[F_n(x) - F_0(x)]^2}{F_n^*(x) [1 - F_n^*(x)]} \quad (5)$$

其中 $F_n^*(x)$ 落在 $F_n(x)$ 与 $F_0(x)$ 之间,即满足条件

$$|F_n^*(x) - F_0(x)| \leq |F_n(x) - F_0(x)|.$$

由于 F_0 为一完全已知的连续分布函数,为方便起见,可以假定 F_0 为 $[0, 1]$ 上的均匀分布.这样上述过程的证明完全类似于文献 [6] 中定理 1. 的证明过程.因此定理 1 证明完毕.

定理 1 说明, nR_n 的极限分布为极值分布,但是其收敛到其极限分布与另一个量 e_n 或 $\frac{G_n^2}{2b_n^2}$ 有关.如果没有这个量, nR_n 是不收敛的.这一点与 BJ 检验统计量的极限分布是一致的.另一方面,对于定理 1 中的两个量 $nR_n - e_n$ 和 $nR_n - \frac{G_n^2}{2b_n^2}$,我们通过模拟与其极限分布进行比较.分 $n = 100$ 和 $n = 300$ 两种情况,图 1 给出 $nR_n - e_n$ 的经验分布函数(模拟次数为 10 万次)与其极限分布 $\exp(-4\exp(-x))$,图 2 给出 $nR_n - \frac{G_n^2}{2b_n^2}$ 的经验分布函数(模拟次数为 10 万次)与其极限分布 $\exp(-4\exp(-x))$.模拟结果发现,在同样的样本容量下, $nR_n - \frac{G_n^2}{2b_n^2}$ 比 $nR_n - e_n$ 更

接近其极限分布,但是两个收敛速度都比较慢.

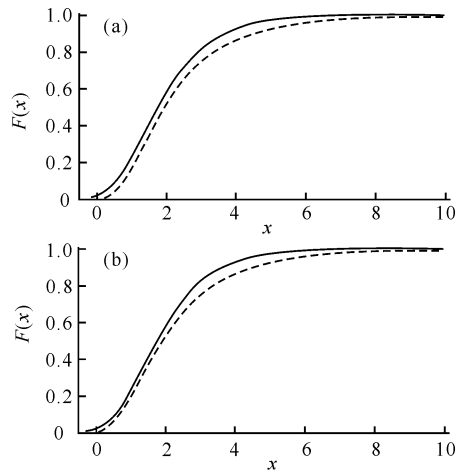


图 1 $nR_n - e_n$ 的经验分布函数与其极限分布

Fig. 1 The EDF of $nR_n - e_n$ and its limit distribution

(a) $n = 100$ (b) $n = 300$.

--- : 极限分布; — : 经验分布函数.

--- : Limit distribution; — : EDF.

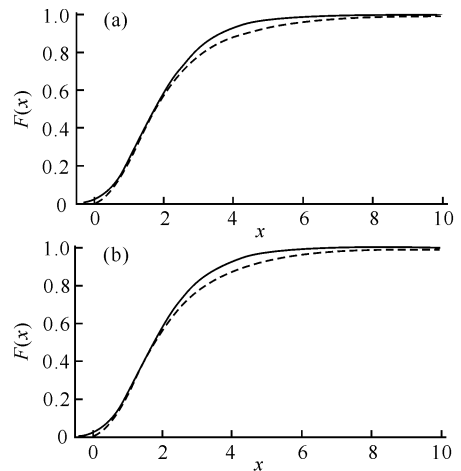


图 2 $nR_n - \frac{G_n^2}{2b_n^2}$ 的经验分布函数与其极限分布

Fig. 2 The EDF of $nR_n - \frac{G_n^2}{2b_n^2}$ and its limit distribution

(a) $n = 100$ (b) $n = 300$.

--- : 极限分布; — : 经验分布函数.

--- : Limit distribution; — : EDF.

2 积分型 RBJ检验统计量在零假设下的极限分布

对于 RBJ 检验的积分型式,其检验统计量为

$$T_n = \int_{X_{(1)} \leq x < X_{(n)}} \{F_0(x) \log \frac{F_0(x)}{F_n(x)} + [1 - F_0(x)] \log \frac{1 - F_0(x)}{1 - F_n(x)}\} dF_0(x). \quad (6)$$

对于检验统计量 (6) 在零假设下的极限分布,有如下的结论.

定理 2 在零假设 (1) 成立时,有

$$2nT_n \xrightarrow{D} \int_0^1 \frac{B^2(t)}{t(1-t)} dt,$$

其中 $\{B(t): 0 \leq t \leq 1\}$ 表示 $[0, 1]$ 上的一个标准 Brownian 桥过程, “ \xrightarrow{D} ” 表示依分布收敛。

证明 由于 F_0 为一完全已知的连续分布函数, 为方便起见, 可以假定 F_0 为 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 即 $F_0(x) \equiv x$.

$$2n T_n = 2n \int_{X_{(1)} \leq x < X_{(n)}} K(x, F_n(x)) dx = I + II + III,$$

其中 I, II, III 分别对应被积函数 $K(x, F_n(x))$ 在区域 $X_{(1)} \leq x < X_{(n)}$ 上的积分, $X_{(1)} \leq x < X_{(n)}$ 表示 $[0, 1]$ 上的一个标准 Brownian 桥过程, “ \xrightarrow{D} ” 表示依分布收敛。

$$I = o_p(1), II \xrightarrow{D} \int_0^1 \frac{B^2(t)}{t(1-t)} dt, III = o_p(1).$$

首先看 (I) 的情况. 由文献 [4] 中引理 2.6 和 Taylor 展开易得

$$I = 2n \int_{X_{(1)} \leq x < X_{(n)}} K(x, F_n(x)) dx = 2n \int_{X_{(1)}}^{-n} x \log \frac{x}{F_n(x)} dx + 2n \int_{X_{(1)}}^{-n} (1-x) \log \frac{1-x}{1-F_n(x)} dx = 2n \int_{X_{(1)}}^{-n} x \log \frac{x}{F_n(x)} dx + o_p(1) = 2n \int_{X_{(1)}}^{-n} O_p(1) x dx + o_p(1) = O_p(n^{-2}) + o_p(1) = o_p(1).$$

类似地, 可得 $III = o_p(1)$.

对于 II 的情况, 首先说明

$$\sup_{-n \leq x \leq 1-n} \frac{x(1-x)}{F_n^*(x)[1-F_n^*(x)]} = 1 + o_p(1). \quad (7)$$

其中 $F_n^*(x)$ 落在 $F_n(x)$ 与 x 之间, 即满足条件 $|F_n^*(x) - x| \leq |F_n(x) - x|$. 事实上, 利用 Taylor 展开易得

$$\frac{x}{F_n^*(x)} = [1 + \frac{F_n^*(x) - x}{x}]^{-1} = 1 - \frac{1}{(1 + Y(x))^2} \frac{F_n^*(x) - x}{x},$$

其中 $Y(x)$ 位于 0 与 $(F_n^*(x) - x)/x$ 之间. 由于 $|F_n^*(x) - x| \leq |F_n(x) - x|/x$, 由文献 [7] 第 424 页 (4.5.10) 式和 (4.5.11) 式可得

$$\sup_{-n \leq x \leq 1-n} \frac{|F_n(x) - x|}{x} = O\left(\frac{\log \log n}{(\log n)^k}\right) = o(1),$$

a. s. 所以

$$\sup_{-n \leq x \leq 1-n} \frac{x}{F_n^*(x)} = 1 + o_p(1).$$

类似可以得到 $\sup_{-n \leq x \leq 1-n} \frac{1-x}{1-F_n^*(x)} = 1 + o_p(1)$.

从而得到 (7) 式. 利用 (5) 式和 (7) 式可以得到

$$II = 2n \int_{-n \leq x \leq 1-n} K(x, F_n(x)) dx = \int_{-n \leq x \leq 1-n} \frac{n[F_n(x) - x]^2}{x(1-x)} \frac{x(1-x)}{F_n^*(x)[1-F_n^*(x)]} dx =$$

$$\int_{-n \leq x \leq 1-n} \frac{n[F_n(x) - x]^2}{x(1-x)} dx + o_p(1),$$

再利用文献 [7] 中第 225 页的命题 1 可知 $II \xrightarrow{D} \int_0^1 B^2(t)/(t(1-t)) dt$. 定理 2 证明完毕.

定理 2 说明, $2n T_n$ 的极限分布与 AD 统计量的极限分布是一致的, 而关于 AD 统计量的极限分布的具体形式已有文献讨论 [8]. 另一方面, 我们也通过模拟把统计量 $2n T_n$ 与其极限分布进行了比较. 图 3 分 $n=10$ 和 $n=100$ 两种情况, 分别给出 $2n T_n$ 的经验分布函数 (模拟次数为 10 万次) 与其极限分布 (参见文献 [8]). 模拟结果发现, 与上界型统计量相比, 在同样的样本容量下, 积分型统计量更接近其极限分布, 且积分型统计量的收敛速度要快的多.

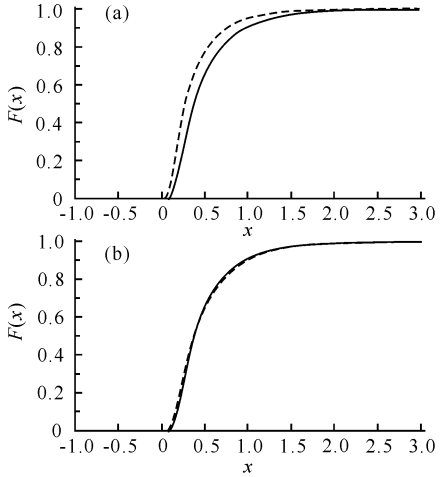


图 3 $2n T_n$ 的经验分布函数与其极限分布
Fig. 3 The EDF of $2n T_n$ and its limit distribution
(a) $n = 10$; (b) $n = 100$.
— 极限分布; - - - 检验分布函数.
— : Limit distribution; - - - : EDF.

3 模拟比较

要求出新统计量 (6) 的精确分布是相当困难的, 对极限分布的探讨也只能作为一个理论成果, 从实用的角度来说, 意义不大. 本节就从模拟的角度, 给出 RB 检验统计量 nR_n 和 $2n T_n$ 与其他常用检验统计量的功效比较.

3.1 模拟条件

(1) 检验的零假设 $H_0: F_0 \sim U(0, 1)$, 即 $[0, 1]$ 上的均匀分布.

(2) 对立假设考虑 6 种分布 (如图 4 所示). 这 6 种分布分别是 $F_1(x) = 1/(1 + \log(1/x))$; $F_2(x) = \exp(1 - 1/x)$; $F_3(x)$ 为 beta(1, 1.5); $F_4(x)$ 为 beta(1.5, 0.5); $F_5(x)$ 为 beta(0.5, 0.5); $F_6(x)$ 为 beta(1.5, 1.5). 这些对立假设的选择是考虑它们与均匀分布

之间的不同关系. F_1 和 F_3 随机地小于均匀分布, F_1 在 0附近具有较高的密度,而 F_3 则相对不太极端; F_2 和 F_4 随机地大于均匀分布, F_2 在 0附近具有较低的密度,而 F_4 则相对不太极端; F_5 和 F_6 与均匀分布 $U(0, 1)$ 在 $x = 1/2$ 有交叉,且它们与 $U(0, 1)$ 整体比较接近. 这些模拟分布基本体现了与均匀分布偏离的各种情况.

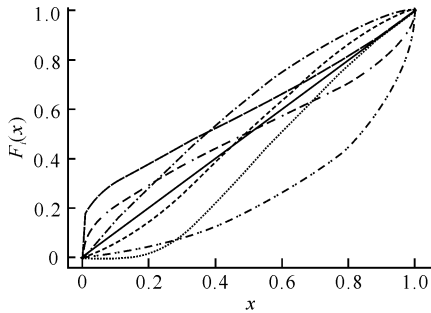


图4 分布函数曲线

Fig. 4 The curves of distribution function

—: $y = x$; - - -: $y = F_1(x)$; ····: $y = F_2(x)$; - · - ·: $y = F_3(x)$; - · - · - ·: $y = F_4(x)$; — · —: $y = F_5(x)$; — · — ·: $y = F_6(x)$.

(3) 检验统计量: 主要考虑 KS 标准化 KS ($SKS^{[9]}$), BJ CV AD EM 和本文所考虑的 RBJ 检验统计量: nR_n 和 $2nT_n$.

(4) 检验水平均为 $T = 0.05$.

(5) 样本量分别取 $n = 10, 50, 100, 200, 300$.

3.2 模拟结果

对不同样本容量 n 的各种搭配所组成的检验, 检验水平为 $T = 0.05$ 时的临界值通过模拟给出, 模拟重复次数为 10 万. 这样可以尽量减少采用极限分布的临界值所引起的真实显著水平的偏差. 对立假设下的模拟次数为 1 万, 利用前一步模拟所得的临界值可以分别给出当对立假设为 $F_i, 1 \leq i \leq 6$ 时诸检验的功效 (见表 1~ 表 6).

表 1 $F = F_1$ 时各种检验的功效

Table 1 The powers of tests for $F = F_1$

检验 Tests	功效 Powers				
	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$
KS	0.2372	0.8147	0.9882	1.0000	1.0000
SKS	0.8023	0.9993	1.0000	1.0000	1.0000
BJ	0.7698	0.9990	1.0000	1.0000	1.0000
CV	0.2780	0.7682	0.9755	1.0000	1.0000
AD	0.6963	0.9917	1.0000	1.0000	1.0000
EM	0.3664	0.9116	0.9989	1.0000	1.0000
nR_n	0.2220	0.8962	0.9992	1.0000	1.0000
$2nT_n$	0.2613	0.7983	0.9899	1.0000	1.0000

表 2 $F = F_2$ 时各种检验的功效

Table 2 The powers of tests for $F = F_2$

检验 Tests	功效 Powers				
	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$
KS	0.0961	0.9420	0.9999	1.0000	1.0000
SKS	0.0286	0.0011	0.0018	0.8876	1.0000
BJ	0.1429	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
CV	0.0656	0.7933	0.9988	1.0000	1.0000
AD	0.0504	0.7353	0.9990	1.0000	1.0000
EM	0.0581	0.8693	0.9999	1.0000	1.0000
nR_n	0.1456	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$2nT_n$	0.0756	0.9521	1.0000	1.0000	1.0000

表 3 $F = F_3$ 时各种检验的功效

Table 3 The powers of tests for $F = F_3$

检验 Tests	功效 Powers				
	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$
KS	0.1522	0.6221	0.9156	0.9979	1.0000
SKS	0.0408	0.0111	0.0072	0.0484	0.2718
BJ	0.1236	0.5713	0.8899	0.9981	1.0000
CV	0.1499	0.6980	0.9472	1.0000	1.0000
AD	0.1271	0.6835	0.9503	0.9997	1.0000
EM	0.1422	0.7135	0.9600	0.9997	1.0000
nR_n	0.1591	0.6404	0.9193	0.9980	1.0000
$2nT_n$	0.1507	0.7404	0.9656	0.9998	1.0000

表 4 $F = F_4$ 时各种检验的功效

Table 4 The powers of tests for $F = F_4$

检验 Tests	功效 Powers				
	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$
KS	0.7227	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
SKS	0.5835	0.9723	0.9997	1.0000	1.0000
BJ	0.7626	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
CV	0.7328	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
AD	0.7652	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
EM	0.6678	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
nR_n	0.6917	0.9998	1.0000	1.0000	1.0000
$2nT_n$	0.6901	0.9998	1.0000	1.0000	1.0000

表 5 $F = F_5$ 时各种检验的功效

Table 5 The powers of tests for $F = F_5$

检验 Tests	功效 Powers				
	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$
KS	0.1479	0.4347	0.7748	0.9899	0.9996
SKS	0.5200	0.7639	0.9252	0.9962	0.9999
BJ	0.3479	0.9020	0.9956	1.0000	1.0000
CV	0.1709	0.4776	0.8499	0.9999	1.0000
AD	0.4023	0.8701	0.9922	1.0000	1.0000
EM	0.2438	0.7136	0.9766	0.9999	1.0000
nR_n	0.1065	0.3683	0.8519	0.9992	1.0000
$2nT_n$	0.1536	0.5066	0.9281	0.9997	1.0000

(下转第 123 页 Continue on page 123)

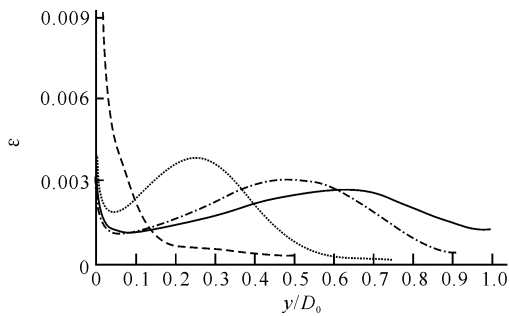


图 8 X分布的计算结果

Fig. 8 The computational results of X distribution

—: $x/D_0 = 0$;: $x/D_0 = 3.5$; - - -: $x/D_0 = 5.9$; - · -: $x/D_0 = 7.1$

3 结束语

用 DLR型 k - ϵ 紊流模型^o BFC法,对总扩散角为 8° ,扩散度为 4的锥形渐扩管内充分发展的不可压粘性紊流进行数值仿真和诊断分析.数值仿真结果表明:算例 A1和 A3与实验数据符合较好,数值入流边界的差异对紊流动能 k 的影响较时均速度 \bar{u} 显著.当均匀入流时,时均速度 \bar{u} 和紊流动能 k 沿径向离开壁面一定距离后都趋于均匀;当入流条件为充分发展的紊流时,时均速度在管轴心处均达到最大,且沿主流方向流速降低,时均压力逐渐增大,涡动粘性系数在管轴心附近比较稳定且沿主流方向逐渐增大,紊

流耗散率则很不稳定,呈波动现象.

本文使用 DLR型 k - ϵ 紊流模型^o BFC法对锥形渐扩管内充分发展的不可压粘性紊流进行仿真,提高了数值预测的精度,得到较为精确的仿真结果和主要流动参数的分布特性,为以后研究这种紊流提供了可靠的依据.

参考文献:

- [1] 何永森,刘邵英.机械管内流体数值预测[M].北京:国防工业出版社,1999.
- [2] Thompson J F, Thames F C, Mastin C W. Automatic numerical generation of bodyfitted curvilinear coordinate system for fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies[J]. J Comp Phys, 1974, 15: 299.
- [3] 孙勇,何永森.锥形渐扩管内紊流数值预测诊断系统的研究——网格数和差分方法的影响[J].湘潭大学自然科学学报, 2005(1): 47.
- [4] Okwuobi P A C, Azad R S. Turbulence in a conical diffuser with fully developed flow at entry [J]. J Fluid Mech, 1973, 57(3): 603.
- [5] Singh D, Azad R S. Turbulent kinetic energy balance in a conical diffuser [R]. Manitoba, Canada, Department of Mechanical Engineering University of Manitoba Winnipeg, 1981.

(责任编辑: 韦廷宗 邓大玉)

(上接第 116页 Continue from page 116)

表 6 $F = F_0$ 时各种检验的功效

Table 6 The powers of tests for $F = F_0$

检验 Tests	功效 Powers				
	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$
KS	0.0343	0.0823	0.1797	0.4212	0.6825
SKS	0.0036	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
BJ	0.0340	0.2096	0.4718	0.8404	0.9708
CV	0.0201	0.0623	0.1665	0.8007	1.0000
AD	0.0096	0.0580	0.2407	0.7324	0.9583
EM	0.0162	0.1136	0.3672	0.8323	0.9751
nR_n	0.0472	0.3541	0.6715	0.9252	0.9896
$2nT_n$	0.0251	0.1853	0.4873	0.8940	0.9886

表 1-表 6 的模拟结果显示, nR_n 和 $2nT_n$ 这两种检验在大多数情况不比其他常用的拟合优度检验差,在某些情况下甚至要优于常用的拟合优度检验,而且它们收敛到其极限分布的速度都较快.本文的结论可以进一步完善非参数拟合优度检验内容,为更好地使用这种检验提供理论基础.

参考文献:

- [1] Berk R H, Jones D H. Goodness-of-fit statistics that dominate the Kolmogorov statistics [J]. Z Wahrscheinlichkeitstheorie Verw Gebiete, 1979, 47: 47-59.

- [2] Jager L, Wellner J A. A new goodness of fit test the reversed Berk-Jones statistic. Technical report 443 [R]. Washington: Department of statistics, University of Washington, 2004.
- [3] Einmahl J H J, McKeague I W. Empirical likelihood based hypothesis testing [J]. Bernoulli, 2003, 9(2): 267-290.
- [4] 张军舰. 广义非参似然比拟合优度检验 [D]. 北京: 中国科学院数学与系统科学研究院, 2006.
- [5] 张军舰. 矩约束条件下的广义经验似然 [J]. 广西师范大学学报, 2006, 24(1): 56-59.
- [6] Wellner J A, Koltchinskii V. A note on the asymptotic distribution of Berk-Jones type statistics under the null hypothesis High dimensional probability III [C]. Basel: Birkhauser, 2003: 321-332.
- [7] Shorack G R, Wellner J A. Empirical processes with applications to statistics [M]. New York: Wiley, 1986.
- [8] Lewis P A. Distribution of the anderson-darling statistic [J]. Ann Math Stat, 1961, 32: 1118-1124.
- [9] Jaeschke D. The asymptotic distribution of the supremum of the standardized empirical distribution function on subintervals [J]. Ann Statist, 1979, 7(1): 108-115.

(责任编辑: 韦廷宗)