

荷花图 $D_{n,4}^{2,*} p_m^* S_t$ 的优美性和奇强协调性Graceful and Odd Strongly Harmonious of $D_{n,4}^{2,*} p_m^* S_t$

蒙正中

MENG Zheng-zhong

(广西国际商务职业技术学院,广西南宁 530007)

(Department of Guangxi International Business Vocational College, Nanning, Guangxi, 530007, China)

摘要: 给出荷花图 $D_{n,4}^{2,*} p_m^* S$ 的概念,并证明当 $m \equiv 0, 1 \pmod{4}$ 且 $m \geq 4$ 时,荷花图是优美且奇强协调的.

关键词: 优美图 奇强协调图 标号

中图分类号: O175 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)02-0131-03

Abstract We first introduce the notion of $D_{n,4}^{2,*} p_m^* S$. Then, proof that when $m \equiv 0, 1 \pmod{4}$ and $m \geq 4$, $D_{n,4}^{2,*} p_m^* S$ is a graceful graph and an odd strongly harmonious graph.**Key words** graceful graph, odd strongly harmonious graph, labeling

1967年, Rosa 提出图的优美标号的概念,而后 Graham 和 Sloane 又提出图的协调标号. 如今图的优美标号及协调标号理论已经比较成熟,主要成果可以参考文献 [1-3]. 王卫军等 [4] 提出图的奇优美标号和奇强协调标号的概念,并讨论图 $D_{n,4}$ 的奇优美性和奇强协调性. 本文在此基础上提出荷花图 $D_{n,4}^{2,*} p_m^* S$ 的概念并探讨路 p_m 的长度与共用 2 个公共顶点的四回路 $D_{n,4}^{2,*}$ 个数的关系与 $D_{n,4}^{2,*} p_m^* S$ 的优美性和奇强协调性是否相关,并证明当 $m \equiv 0, 1 \pmod{4}$ 且 $m \geq 4$ 时,荷花图的优美性和奇强协调性. 文中图论方面的术语除特别说明外,均来自文献 [5].

1 相关定义

定义 1^[3] 一个 q 条边的简单图 $G(V, E)$, 如果存在一个单射 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q\}$ 使得对所有的边 $e = uv \in E(G)$, 由 $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ 导出 $E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, q\}$ 是一个一一对应, 则称 G 是优美图, f 是 G 的优美标号 (或优美值).

定义 2^[4] 一个 q 条边的简单图 $G = (V, E)$ 称为奇强协调的, 如果存在一个单射 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2|E| - 1\}$ 使得对所有的边 $e = uv \in E(G)$, 由 $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ 导出的映射 $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2|E| - 1\}$ 是一个一一对应, f 称为 G 的奇强

协调标号.

定义 3 由 n 个四回路并且恰有 2 个公共点所构成的图记作 $D_{n,4}$.

定义 4 在图 $D_{n,4}$ 中, 取 2 个公共点中的其中一个与路 p_m 一端的顶点粘接, 而路 p_m 中顶点为 $v_0 (m \equiv 1 \pmod{4})$ 且 $m \geq 5$ 或 $v_1 (m \equiv 0 \pmod{4})$ 且 $m \geq 4$ 与星图 S_t 中度数为 t 的顶点粘接得到的图称之为荷花图, 记为 $D_{n,4}^{2,*} p_m^* S_t$.

2 主要结果

定理 1 如果 $m \equiv 0 \pmod{4}$ 且 $m \geq 4$, $m = k + 1$, $m = 4n - 4 (n \geq 2)$ 则图 $D_{n,4}^{2,*} p_m^* S_t$ 既是优美又是奇强协调的.

证明 因为在图 $D_{n,4}^{2,*} p_m^* S$ 中, 总共有 $8n - 5 + t$ 条边, 其中顶点度数为 $2n$ 的且不与路 p_m 粘接的点记为 z_1 , t 为任意自然数. 为方便叙述, 规定图 $D_{n,4}^{2,*} p_m^* S$ 的顶点如图 1 所示.

图 1 的顶点标号如下.

$$f(v_{2n+1}) = i, f(v_{2n}) = 4n + k - i, \text{ 其中 } i = 0, 1, 2, \dots, \frac{k-1}{2}.$$

$$f(z_1) = \frac{k-1}{2} + 2, f(u_i) = \frac{k-1}{2} + 4i - 1.$$

$$f(y_i) = \frac{k-1}{2} + 4i, \text{ 其中 } i = 1, 2, 3, \dots, n, m =$$

$$k + 1, m = 4n - 4 (n \geq 2).$$

$$f(w_i) = f(v_0) + i, \text{ 其中 } i = 1, 2, \dots, t.$$

收稿日期: 2008-11-17

作者简介: 蒙正中 (1954-), 男, 副教授, 主要从事应用数学的研究.

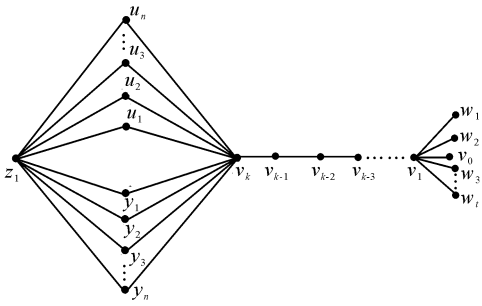


图 1 $D_{n,4}^2, p_m^*, S_t$ 的顶点
Fig. 1 Vertex of $D_{n,4}^2, p_m^*, S_t$

验证 f 是图 1 的一个优美标号.

因为 $f(v_{2i+1}) = i$, 而 $i = 0, 1, 2, \dots, \frac{k-1}{2}, m = k+1, m = 4n-4(n \geq 2)$, 所以当 i 取遍 $(0, 1, 2, \dots, \frac{k-1}{2})$ 时, $f(v_{2i+1})$ 取遍 $(0, 1, 2, \dots, 2n-3)$. 因为

$f(u_i) = \frac{k-1}{2} + 4i - 1 = 2n - 3 + 4i - 1 = 2n + 4i - 4$, 所以当 i 取遍 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 时, $f(u_i)$ 取遍 $(2n, 2n+4, 2n+8, \dots, 6n-4)$. 因为 $f(y_i) = \frac{k-1}{2} + 4i = 2n - 3 + 4i = 2n + 4i - 3$, 所以当 i 取遍 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 时, $f(y_i)$ 取遍 $(2n+1, 2n+5, \dots, 6n-3)$. 因为 $f(v_{2i}) = 4n+k-i$, 而 $m = k+1, m = 4n-4(n \geq 2)$, 所以当 i 取遍 $(0, 1, 2, \dots, \frac{k-1}{2})$ 时, $f(v_{2i})$ 取遍 $(8n-5, 8n-6, \dots, 6n-2)$, 即顶点的标号有 $(0, 1, 2, \dots, 2n-3, 2n, 2n+1, 2n+4, 2n+5, \dots, 6n-3, 6n-2, \dots, 8n-5)$. 又因为 $f(z_1) = \frac{k-1}{2} + 2 = 2n - 3 + 2 = 2n - 1$, 所以顶点的标号为 $(0, 1, 2, \dots, 2n-3, 2n-1, 2n, 2n+1, 2n+1, 2n+4, 2n+5, \dots, 6n-3, 6n-2, \dots, 8n-5)$. 又因为 $f(w_i) = f(v_0) + i = 8n-5+i$ 其中 $i = 1, 2, \dots, t$ 显然 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q\}$ 是一个单射.

因为 u_i 与 v_k 相邻, 而 $f^*(u_i v_k) = |f(u_i) - f(v_k)| = |\frac{k-1}{2} + 4i - 1 - \frac{k-1}{2}| = |4i - 1|$, 当 i 取遍 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 时, $f^*(u_i v_k)$ 取遍 $(3, 7, 11, \dots, 4n-1)$. 因为 u_i 与 z_1 相邻, 而 $f^*(u_i z_1) = |f(u_i) - f(z_1)| = |\frac{k-1}{2} + 4i - 1 - \frac{k-1}{2} - 2| = |4i - 3|$, 当 i 取遍 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 时, $f^*(u_i z_1)$ 取遍 $(1, 5, 9, \dots, 4n-3)$. 而 y_i 与 v_k 相邻, 所以 $f^*(y_i v_k) = |f(y_i) - f(v_k)| = |\frac{k-1}{2} + 4i - \frac{k-1}{2}| = |4i|$, 当 i 取遍 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 时, $f^*(y_i v_k)$ 取遍 $(4, 8, 12, \dots, 4n)$. 因为 y_i 与 z_1 相邻, 所以 $f^*(y_i z_1) = |f(y_i) - f(z_1)| = |$

$\frac{k-1}{2} + 4i - \frac{k-1}{2} - 2| = |4i - 2|$, 当 i 取遍 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 时, $f^*(y_i z_1)$ 取遍 $(2, 6, 10, \dots, 4n-2)$, 即现在在有边标号 $(1, 2, 3, 4, 5, \dots, 4n-2, 4n-1, 4n)$. 因为 v_{2i} 与 v_{2i+1} 相邻, 所以 $f^*(v_{2i} v_{2i+1}) = |f(v_{2i}) - f(v_{2i+1})| = |i - 4n - k + i| = 4n + k - 2i$. 又因为 $m = k+1, m = 4n-4(n \geq 2)$, 所以 $f^*(v_{2i} v_{2i+1}) = 8n - 5 - 2i$, 当 i 取遍 $(0, 1, 2, \dots, 2n-3)$ 时, $f^*(v_{2i} v_{2i+1})$ 取遍 $(8n-5, 8n-6, 8n-7, \dots, 4n+1)$. 又因为 v_1 与 w_i 相邻, 所以 $f^*(v_1 w_i) = |f(v_1) - f(w_i)| = 4n + k + i = 8n - 5 + i$, 当 i 取遍 $1, 2, \dots, t$ 时, $f^*(v_1 w_i)$ 取遍 $8n-4, 8n-3, 8n-5+t$, 所以由 f^* 导出了 $E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, \dots, 8n-5+t\}$ 的一个一一对应. 所以 f 是荷花图的一个优美标号, 从而荷花图是优美图.

同样为叙述方便将图 1 中 y_1 到 y_n 的顶点记号改为 u_{n+1} 到 u_{2n} , 其余的顶点记号保持不变. 图的顶点标号如下.

$f(v_i) = i$, 其中 $i = 0, 1, 2, \dots, k, f(z_1) = k+2, f(u_i) = k+4i-3$, 其中 $i = 1, 2, 3, \dots, 2n, m = k+1, m = 4n-4(n \geq 2), f(w_i) = f(u_{2n}) + f(z_1) + 2i = 2k+8n-1+2i = 16n-11+2i$, 其中 $i = 1, 2, 3, \dots, t$.

因为 $f(v_i) = i$, 其中 $i = 0, 1, 2, \dots, k$, 而 $m = k+1, m = 4n-4(n \geq 2)$, 所以当 i 取遍 $(0, 1, 2, \dots, k)$ 时, $f(v_i)$ 取遍 $(0, 1, 2, \dots, 4n-5)$. 因为 $f(u_i) = k+4i-3 = 4n-8+4i$, 当 i 取遍 $(1, 2, 3, \dots, 2n)$ 时, $f(u_i)$ 取遍 $(4n-4, 4n, \dots, 12n-8)$. 又因为 $f(z_1) = k+2 = 4n-5+2 = 4n-3, f(w_i) = f(u_{2n}) + f(z_1) + 2i = 2k+8n-1+2i = 16n-11+2i$, 当 i 取遍 $1, 2, \dots, t$ 时, 显然 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E|-1\}$ 是一个单射.

因为 w 与 v_k 相邻, 而 $m = k+1, m = 4n-4(n \geq 2)$, 所以 $f^*(w v_k) = f(w) + f(v_k) = k+4i-3 + k = 2k+4i-3 = 8n+4i-13$, 当 i 取遍 $(1, 2, 3, \dots, 2n)$ 时, $f^*(w v_k)$ 取遍 $(8n-9, 8n-5, \dots, 16n-13)$. 因为 u_i 与 z_1 相邻, 所以 $f^*(u_i z_1) = f(u_i) + f(z_1) = 4n-8+4i+k+2 = 8n+4i-11$, 所以当 i 取遍 $(1, 2, 3, \dots, 2n)$ 时, $f^*(u_i z_1)$ 取遍 $(8n-7, 8n-3, 8n+1, \dots, 16n-11)$. 又因为 $f(v_i) = i$, 其中 $i = 0, 1, 2, \dots, 4n-5, m = k+1, m = 4n-4(n \geq 2)$, 所以 $f^*(v_i v_{i+1}) = f(v_i) + f(v_{i+1}) = 2i+1$, 当 i 取遍 $(0, 1, 2, \dots, 4n-6)$ 时, $f^*(v_i v_{i+1})$ 取遍 $(1, 3, 5, \dots, 8n-11)$. 又因为 w_i 与 v_0 相邻, 所以 $f^*(w_i v_0) = f(w_i) + f(v_0) = 2k+8n-1+2i = 16n-11+2i$, 当 i 取

遍 $1, 2, \dots, t$ 时, $f^*(w_i v_0)$ 取遍 $16n - 9, 16n - 7, \dots, 16n - 11 + 2t$. 综上所述 f^* 是 $E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 16n - 11 + 2t\}$ 的一个一一对应. 所以 f 是荷花图的奇强协调标号. 故荷花图是奇强协调图.

定理 2 如果 $m \equiv 1 \pmod{4}$ 且 $m \geq 5, m = k + 1, m = 4n - 3 (n \geq 2)$, 则图 $D_{n,4}^2 p_m^*$ 既是优美的又是奇强协调的.

证明 因为 $m \equiv 1 \pmod{4}$ 且 $m \geq 5$, 所以将星图粘接在图 1 的 v_0 顶点处, 在图 $D_{n,4}^2 p_m^*$ 中, 一共有 $8n - 4 + t$ 条边, 其中顶点度数为 $2n$ 的且不与路 p_m 粘接的点记为 z_1, t 为任意自然数. 为方便叙述规定图 $D_{n,4}^2 p_m^*$ 的顶点记号仍然如图 1 所示. 图的顶点标号如下.

$f(v_{2i}) = i, i = 0, 1, 2, \dots, \frac{k}{2}, f(z_1) = \frac{k}{2} + 2, f(y_i) = \frac{k}{2} + 4i$, 其中 $i = 1, 2, 3, \dots, n, f(u_i) = \frac{k}{2} + 4i - 1, (i = 1, 2, 3, \dots, n), f(v_{2i-1}) = 4n + k + 1 - i, (i = 1, 2, \dots, \frac{k}{2})$, 其中 $m = k + 1, m = 4n - 3 (n \geq 2), f(w_i) = f(v_i) + i = 4n + k + i = 8n - 4 + i$, 其中 $i = 1, 2, \dots, t$.

因为 $f(v_{2i}) = i, i = 0, 1, 2, \dots, \frac{k}{2}$, 所以当 i 取遍 $(0, 1, 2, \dots, \frac{k}{2})$ 时, $f(v_{2i})$ 取遍 $(0, 1, 2, \dots, \frac{k}{2})$ 时, 即取遍 $(0, 1, 2, 3, \dots, 2n - 2)$. 因为 $f(z_1) = \frac{k}{2} + 2 = 2n - 2 + 2 = 2n$, 而 $f(u_i) = \frac{k}{2} + 4i - 1 = 2n - 2 + 4i - 1 = 2n + 4i - 3$, 当 i 取遍 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 时, $f(u_i)$ 取遍 $(2n + 1, 2n + 5, \dots, 6n - 3)$. 因为 $f(v_{2i-1}) = 4n + k + 1 - i = 8n - 3 - i$, 当 i 取遍 $(1, 2, \dots, \frac{k}{2})$ 时, $f(v_{2i-1})$ 取遍 $(8n - 4, 8n - 5, \dots, 6n - 1)$. 又因为 $f(w_i) = f(v_i) + i = 4n + k + i = 8n - 4 + i$, 其中 $i = 1, 2, \dots, t$, 显然 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q\}$ 是一个单射.

因为 u_i 与 v_k 相邻, 而 $f^*(u_i v_k) = |f(u_i) - f(v_k)| = 2n + 4i - 3 - 2n + 2 = 4i - 1$, 当 i 取遍 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 时, $f^*(u_i v_k)$ 取遍 $(3, 7, \dots, 4n - 1)$. 因为 y_i 与 v_k 相邻, 所以 $f^*(y_i v_k) = |f(y_i) - f(v_k)| = |\frac{k}{2} + 4i - \frac{k}{2}| = 4i$, 当 i 取遍 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 时, $f^*(y_i v_k)$ 取遍 $(4, 8, \dots, 4n)$. 因为 u_i 与 z_1 相邻, 所以 $f^*(u_i z_1) = |f(u_i) - f(z_1)| = |\frac{k}{2} + 4i - 1 - \frac{k}{2} - 2| = 4i - 3$, 当 i 取遍 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 时, $f^*(u_i z_1)$ 取遍 $(1, 5, 9, \dots, 4n - 3)$. 因为 y_i 与 z_1 相邻, 所以 $f^*(y_i z_1) = |f(y_i) - f(z_1)| = |\frac{k}{2} + 4i - \frac{k}{2} - 2|$

$= 4i - 2$, 当 i 取遍 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 时, $f^*(y_i z_1)$ 取遍 $(2, 6, 10, \dots, 4n - 2)$. 即有边标号 $(1, 2, 3, 4, \dots, 4n)$. 又因为 v_{2i} 与 v_{2i-1}, v_{2i+1} 相邻, 所以 $f^*(v_{2i} v_{2i-1}) = |i - 4n - k - 1 + i| = |4n + 4n - 3 - 2i| = 8n - 3 - 2i$, 当 i 取遍 $(1, 2, 3, \dots, \frac{k}{2})$ 时, $f^*(v_{2i} v_{2i-1})$ 取遍 $(8n - 5, 8n - 6, \dots, 4n + 1)$. 而当 i 取 0 时, $f^*(v_0 v_1) = |f(v_0) - f(v_1)| = 4n + k = 8n - 4$. 又因为 v_0 与 w_i 相邻, 所以 $f^*(v_0 w_i) = |f(v_0) - f(w_i)| = 4n + k + i = 8n - 4 + i$, 当 i 取遍 $1, 2, \dots, t$ 时, $f^*(v_0 w_i)$ 取遍 $8n - 3, 8n - 2, \dots, 8n - 4 + t$.

综上所述, f^* 导出了 $E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 8n - 4\}$ 的一个一一对应. 所以 f 是荷花图的一个优美标号, 从而荷花图是优美图.

同样为方便叙述, 将图 1 中 y_1 到 y_n 的顶点记号改为 u_{n+1} 到 u_{2n} , 其余的顶点记号保持不变. 图的顶点标号如下.

$f(v_i) = i, i = 0, 1, 2, \dots, k, f(z_1) = k + 2, f(u_i) = k + 4i - 3, i = 1, 2, 3, \dots, 2n$, 其中 $m = k + 1, m = 4n - 3 (n \geq 2), f(w_i) = f(u_{2i}) + f(z_1) + 2i = k + 8n - 3 + k + 2 + 2i = 16n - 9 + 2i$.

因为 $f(v_i) = i, i = 0, 1, 2, \dots, k$, 而 $m = k + 1, m = 4n - 3 (n \geq 2)$, 所以当 i 取遍 $(0, 1, 2, 3, \dots, k)$ 时, $f(v_i)$ 取遍 $(0, 1, 2, \dots, 4n - 4)$. 因为 $f(u_i) = k + 4i - 3 = 4n - 4 + 4i - 3 = 4n + 4i - 7$, 当 i 取遍 $(i = 1, 2, 3, \dots, 2n)$ 时, $f(u_i)$ 取遍 $(4n - 3, 4n + 1, \dots, 12n - 7)$. 又因为 $f(z_1) = k + 2 = 4n - 4 + 2 = 4n - 2, f(w_i) = f(u_{2i}) + f(z_1) + 2i = k + 8n - 3 + k + 2 + 2i = 16n - 9 + 2i$, 当 i 取遍 $1, 2, \dots, t$ 时, 显然 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2|E| - 1\}$ 是一个单射.

因为 u_i 与 v_k 相邻, 所以 $f^*(u_i v_k) = f(u_i) + f(v_k) = 4n + 4i - 7 + 4n - 4 = 8n + 4i - 11$, 所以当 i 取遍 $(i = 1, 2, 3, \dots, 2n)$ 时, $f^*(u_i v_k)$ 取遍 $(8n - 7, 8n - 3, \dots, 16n - 11)$. 因为 u_i 与 z_1 相邻, 所以 $f^*(u_i z_1) = f(u_i) + f(z_1) = k + 4i - 3 + k + 2 = 2k + 4i - 1 = 8n + 4i - 9$, 所以当 i 取遍 $(i = 1, 2, 3, \dots, 2n)$ 时, $f^*(u_i z_1)$ 取遍 $(8n - 5, 8n - 1, \dots, 16n - 9)$. 又因为 $f(v_i) = i, i = 0, 1, 2, \dots, k$, 而 $m = k + 1, m = 4n - 3$, 所以 $f^*(v_i v_{i+1}) = f(v_i) + f(v_{i+1}) = 2i + 1$, 所以当 i 取遍 $(0, 1, 2, 3, \dots, k - 1)$ 时, $f^*(v_i v_{i+1})$ 取遍 $(1, 3, 5, 7, \dots, 8n - 9)$. 又因为 w_i 与 v_0 相邻, 所以 $f^*(w_i v_0) = f(w_i) + f(v_0) = 2k + 8n - 1 + 2i = 16n - 9 + 2i$, 所以当 i 取遍 $1, 2, \dots, t$ 时, $f^*(w_i v_0)$ 取遍 $16n - 7, 16n - 5, \dots, 16n - 9 + 2t$.

(下转第 135 页 Continue on page 135)

$$\dot{j}_n(x; a) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k. \quad (3)$$

用 D_q^k 作用 (3) 式两边并令 $x = 0$ 得

$$a_{n,k} = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q (-a)^k q^{k(k-1)/2},$$

于是有

$$(ax; q)_n = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q (-ax)^k q^{k(k-1)/2},$$

或者

$$(x; q)_n = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q (-x)^k q^{k(k-1)/2}. \quad (4)$$

推论 1 二项式定理:

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q (-x)^k.$$

证明 令 $q \rightarrow 1$ 并注意到

$$\lim_{q \rightarrow 1} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q = \binom{n}{k},$$

则 (4) 式变为

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x)^k.$$

定理 2 q -Chu-Vandermonde 求和公式:

$$\frac{(\mathbb{T}; q)_n \mathbb{U}}{(\mathbb{T}\mathbb{U}; q)} = {}_2Q \left[\begin{matrix} \bar{q}^{-n}, \mathbb{U} \\ \mathbb{T}\mathbb{U} \end{matrix}; q; q \right].$$

证明 对 $b \neq 0$, 多项式序列 $\{\dot{j}_n(x; b)\}_{n=0}^{\infty}$ 是有多项式的另一个基底, 于是

$$\dot{j}_n(x; a) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \dot{j}_k(x; b). \quad (5)$$

用 D_q^k 作用于 (5) 式两边, 并在所得的结果中令 $x = b^{-1}q^{-k}$ 得

$$a_{n,k} = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q \left(\frac{a}{b} \right)^k \dot{j}_{n-k}(b^{-1}q^{-k}; aq^k) =$$

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q \left(\frac{a}{b} \right)^k \frac{(a/b; q)_n}{(1-ab^{-1}q^{n-k}) \cdots (1-ab^{-1}q^{-1})} = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q \frac{(-q^{1-n})^k q^{k(k-1)/2} (a/b; q)_n}{(ba^{-1}q^{1-n}; q)_k}.$$

于是有

$$\frac{(ax; q)_n}{(a/b; q)_n} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q \frac{(-q^{1-n})^k q^{k(k-1)/2} (x/b; q)_k q^k}{(q; q)_k (ba^{-1}q^{1-n}; q)_k},$$

或者

$$\frac{(ax; q)_n}{(a/b; q)_n} = \sum_{k=0}^n \frac{(\bar{q}^{-n}, q)_k (x/b; q)_k q^k}{(q; q)_k (ba^{-1}q^{1-n}; q)_k}.$$

令 $x = 1, a = T^{-1}q^{1-n}, U = b$, 我们有

$$\frac{(\mathbb{T}^{-1}q^{1-n}; q)_n}{(\mathbb{T}^{-1}\mathbb{U}^{-1}q^{1-n}; q)_n} = \sum_{k=0}^n \frac{(\bar{q}^{-n}, \mathbb{U}; q)_k q^k}{(q, \mathbb{T}\mathbb{U}; q)_k}, \quad (6)$$

化简后 (6) 式变为

$$\frac{(\mathbb{T}; q)_n \mathbb{U}}{(\mathbb{T}\mathbb{U}; q)} = \sum_{k=0}^n \frac{(\bar{q}^{-n}, \mathbb{U}; q)_k q^k}{(q, \mathbb{T}\mathbb{U}; q)_k}, \quad (7)$$

或者

$$\frac{(\mathbb{T}; q)_n \mathbb{U}}{(\mathbb{T}\mathbb{U}; q)} = {}_2Q \left[\begin{matrix} \bar{q}^{-n}, \mathbb{U} \\ \mathbb{T}\mathbb{U} \end{matrix}; q; q \right].$$

推论 2 Chu-Vandermonde 求和公式:

$$\frac{(b-a)_n}{(a)_n} = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (b)_k}{(a)_k k!}.$$

证明 在 (7) 式中令 $T = q^{-b}, U = q^b$, 再令 $q \rightarrow 1$ 得

$$\frac{(b-a)_n}{(a)_n} = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (b)_k}{(a)_k k!}.$$

从以上定理和推论的证明过程可以看出, Jackson q -差分算子可以用来证明很多 q -级数公式或者组合恒等式. 事实上, 通过灵活的变换还可以得到新的恒等式.

参考文献:

- [1] Ismail M E H. Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [2] Andrews G E, Askey R, Roy R. Special functions [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [3] Gasper G, Rahman M. Basic hypergeometric series [M]. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 133 页 Continue from page 133)

由上可知 f^* 是 $E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \dots, 16n-9, 16n-7, 16n-5, \dots, 16n-9+2t\}$ 的一个一一对应. 所以 f 是图 $D_{n,4}^{2,*} p_m^* S$ 的奇强协调标号, 故图 $D_{n,4}^{2,*} p_m^* S$ 是奇强协调图.

参考文献:

- [1] Gallian A. A Guide to the graph labeling zoo [J]. Discrete Applied Mathematics, 1994, 49: 213-229.
- [2] Frank Hsu D. Harmonious labelings of windmill graphs

- and related graphs [J]. Journal of Graph Theory, 1982, 6(1): 85-87.
- [3] 马克杰. 优美图 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.
- [4] 王卫军, 严谦泰. 关于图的奇优美性和奇强协调性 [J]. 南阳师范学院学报, 2003, 9: 1-2.
- [5] J A 邦迪, U S R 墨蒂. 图论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1984.

(责任编辑: 尹 闯)