DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.02.003
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(2): 134- 135

用 Jackson q-差分算子证明两个 q-级数公式*

Proof of Two Formulas in q-Series by Jackson q-Difference Operator

黄均振
HUANG Jun-zhen

(广西师范大学数学科学学院,广西桂林 541004)
(School of Mathematics, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 利用 Jackson q-差分算子证明 q-二项式定理和 q-Chu-Vandermonde求和公式.

关键词: q-级数, Jackson q-差分算子,二项式定理
中图法类分号: O174 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)02-0134-02

Abstract q-binornial theorem and q-Chu-Vandermonde summation formulas are proved by using Jackson q-difference operator.

Key words q-series, Jackson q-difference operator, binomial theorem

在 q级数领域,有大量的求和公式和变换公式,其证明方法也多种多样,例如 Cauchy方法,生成函数法,反演技巧,级数展开等等.算子方法也是当前研究 q级数的一个重要方法. Mourad E. H.[1]用 Askey-Wilson 算子[2]证明 q-Pfaff-Saalschutz 求和公式及 Sears变换公式,并且应用这个方法也可以得到 q级数的很多结果.本文利用 Jackson差分算子证明 q-二项式定理和 q-Chu-Vandermonde求和.以下定义及记号均参考文献[3].

1 相关定义

定义 1 给定复数 q,若 $|q|<1$,则定义 $(a;q)_\infty:=\prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k), a\in C$.

定义 2 对 $a\in C, n\in Z$, q-阶乘定义为

$$(a;q)_n:=\frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}=\prod_{k=n}^{\infty}(1-aq^k), \quad (1)$$

$$(a_1,a_2,\cdots,a_m;q)_n=\prod_{k=1}^{m}(a_k;q)_n. \quad (2)$$

定义 3 设 $\{a_i\}_{i=1}^{r}$和 $\{b_j\}_{j=1}^{s}$都是复数序列,则以 z为变量的 q-级数定义为

$${}_r\phi_s\left(\begin{matrix}a_1,\cdots,a_r\\ b_1,\cdots,b_s\end{matrix};q,z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1,\cdots,a_r;q)_k z^k}{(q,b_1,\cdots,b_s;q)_k}(-q^{k(k-1)/2})^{s+1-r}.$$

定义 4 q-二项式系数或高斯系数定义为

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q=\begin{cases}\dfrac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}, & k=0,1,\cdots,n,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

2 主要结果

假设 q满足 $|q|<1$,作用于多项式 $f(z)$的 Jackson q-差分算子 D_q可以定义为

$$(D_qf)(z):=\frac{f(z)-f(qz)}{(1-q)z}.$$

对 $n=0,1,\cdots$,并且所有多项式的基底都由单项式 $m_n(x)=x^n$生成,显然

$$(D_q^k m_n)(x)=\frac{(q;q)_n m_{n-k}(x)}{(1-q)^k(q;q)_{n-k}}, k=1,\cdots,n.$$

定义 $\varphi_n(x;a)=(ax;q)_n, a\neq 0$.对 $n=0,1,\cdots$,显然 $\varphi_n(x;a)$是关于 x的 n阶多项式且

$$(D_q^k\varphi_n)(x)=\left(\frac{-a}{1-q}\right)^k\frac{(q;q)_n q^{k(k-1)/2}}{(q;q)_{n-k}}\varphi_{n-k}(x;aq^k), k=1,\cdots,n.$$

定理 1 q-二项式定理:

$$(x;q)_n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q(-x)^k q^{k(k-1)/2}.$$

证明 假设单项式 $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$构成所有多项式的基底,则

收稿日期: 2008-11-17
作者简介: 黄均振(1983-),男,硕士研究生,主要从事特殊函数论的研究.
* 国家自然科学基金项目(10761002),广西自然科学基金项目(0728090),广西教育厅项目(200607MS136),广西研究生教育创新计划项目(20081066020701M236)资助.

$$\varphi_n(x;a)=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}x^k. \qquad (3)$$

用 D_q^k 作用(3)式两边并令 $x=0$ 得

$$a_{n,k}=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q(-a)^k q^{k(k-1)/2},$$

于是有

$$(ax;q)_n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q(-ax)^k q^{k(k-1)/2},$$

或者

$$(x;q)_n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q(-x)^k q^{k(k-1)/2}. \qquad (4)$$

推论 1 二项式定理:

$$(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)^k.$$

证明 令 $q\to1$ 并注意到

$$\lim_{q\to1}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q=\binom{n}{k},$$

则(4)式变为

$$(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)^k.$$

定理 2 q-Chu-Vandermonde求和公式:

$$\frac{(\alpha;q)_n\beta^n}{(\alpha\beta;q)}={}_2\phi_1\left(\begin{matrix}q^{-n},\beta\\ \alpha\beta\end{matrix};q;q\right).$$

证明 对 $b\neq0$,多项式序列 $\{\varphi_n(x;b)\}_{n=0}^{\infty}$ 是所有多项式的另一个基底,于是

$$\varphi_n(x;a)=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}\varphi_n(x;b). \qquad (5)$$

用 D_q^k 作用于(5)式两边,并在所得的结果中令 $x=b^{-1}q^{-k}$ 得

$$b_{n,k}=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\left(\frac{a}{b}\right)^k\varphi_{n-k}(b^{-1}q^{-k};aq^k)=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\left(\frac{a}{b}\right)^k\frac{(a/b;q)_n}{(1-ab^{-1}q^{n-k})\cdots(1-ab^{-1}q^{n-1})}=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\cdot\frac{(-q^{1-n})^kq^{k(k-1)/2}(a/b;q)_n}{(ba^{-1}q^{1-n};q)_k}.$$

于是有

$$\frac{(ax;q)_n}{(a/b;q)_n}=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\frac{(-q^{1-n})^kq^{k(k-1)/2}(xb;q)_kq^k}{(q;q)_k(ba^{-1}q^{1-n};q)_k},$$

或者

$$\frac{(ax;q)_n}{(a/b;q)_n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n},q)_k(xb;q)_kq^k}{(q;q)_k(ba^{-1}q^{1-n};q)_k}.$$

令 $x=1,a=\alpha^{-1}q^{1-n},\beta=b$,我们有

$$\frac{(\alpha^{-1}q^{1-n};q)_n}{(\alpha^{-1}\beta^{-1}q^{1-n};q)_n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n},\beta;q)_k}{(q,\alpha\beta;q)_k}q^k, \qquad (6)$$

化简后(6)式变为

$$\frac{(\alpha;q)_n\beta^n}{(\alpha\beta;q)_n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n},\beta;q)_kq^k}{(q,\alpha\beta;q)_k}, \qquad (7)$$

或者

$$\frac{(\alpha;q)_n\beta^n}{(\alpha\beta;q)}={}_2\phi_1\left(\begin{matrix}q^{-n},\beta\\ \alpha\beta\end{matrix};q;q\right).$$

推论 2 Chu-Vandermonde求和公式:

$$\frac{(b-a)_n}{(a)_n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(b)_k}{(a)_kk!}.$$

证明 在(7)式中令 $\alpha=q^{a-b},\beta=q^b$,再令 $q\to1$ 得

$$\frac{(b-a)_n}{(a)_n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(b)_k}{(a)_kk!}.$$

从以上定理和推论的证明过程可以看出,Jackson q-差分算子可以用来证明很多 q-级数公式或者组合恒等式.事实上,通过灵活的变换还可以得到新的恒等式.

参考文献:

[1] Ismail M E H. Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

[2] Andrews G E, Askey R, Roy R. Special functions[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[3] Gasper G, Rahman M. Basic hypergeometric series[M]. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

(责任编辑:尹 闯)

(上接第133页 Continue from page 133)

由上可知 f^* 是 $E(G)\to\{1,3,5,7,\cdots,16n-9,16n-7,16n-5,\cdots,16n-9+2t\}$ 的一个一一对应.所以 f 是图 $D_{n,4}^2 * p_m * S_t$ 的奇强协调标号,故图 $D_{n,4}^2 * p_m * S_t$ 是奇强协调图.

参考文献:

[1] Gallian A. A Guide to the graph labeling zoo[J]. Discrete Applied Mathematics, 1994, 49: 213-229.

[2] Frank Hsu D Harmonious. labelings of windmill graphs and related gradphs[J]. Journal of Graph Theory, 1982, 6(1): 85-87.

[3] 马克杰.优美图[M].北京:北京大学出版社,1991.

[4] 王卫军,严谦泰.关于图的奇优美性和奇强协调性[J].南阳师范学院学报,2003,9: 1-2.

[5] J A邦迪,U S R墨蒂.图论及其应用[M].北京:科学出版社,1984.

(责任编辑:尹 闯)