DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.02.005
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(2): 139-146

局部满射算子与局部扰动算子差的映射性质及其应用

Mapping Property and Its Application of Local Surjection Operator Minus Local Disturbed Operator

吴树宏
WU Shu-hong

(武汉理工大学理学院数学系,湖北武汉 430070)
(Department of Mathematics, School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan, Hubei, 430070, China)

摘要:研究局部满射算子与局部扰动算子差的映射性质,并利用该性质得到离散方程组、迭代函数方程组、右端可化为有界的方程组、积分方程组及一些可化为积分方程组的方程组解存在的充分条件.

关键词:方程组 迭代 微分积分 存在性
中图法分类号:O175 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2009)02-0139-08

Abstract We study mapping property of local surjection operator minus local disturbed operator and make use of it to discuss sufficient conditions of existence of solutions of a type of discrete equations, iterative function equations, equations whose right side can be turned into bounded function, integral equations and some equations which can be turned into integral equations.

Key words equations, iteration, differential integral, existence

一般来讲,要想判断微分积分方程组是否有解很困难,往往要加上很苛刻的条件才能说明它有解或无解.以往关于微分积分方程组解的存在性一般都是用各种形式的不动点原理来证明.如此形成的结论是:微分积分方程组解的存在性定理所需的条件琐碎、复杂,证明也颇为不易.显然引入新的思路是必要的.本文研究局部满射算子与局部扰动算子差的映射性质,并利用该性质得到离散方程方程组,迭代函数方程组,右端可化为有界的方程组,积分方程组及一些可化为积分方程组的方程组解存在的充分条件.

1 相关映射性质

2个已知的结论:(i)若 I 为恒等算子,A 为线性算子,$\|A\|<1$,则 $(I-A)^{-1}$ 存在.(ii)若 I,A 为非线性算子,可以认为:I 为局部满射算子,A 为局部扰动算子,对此二算子定义域中某集合 K,若能确定出一集合 $W\subseteq(I-A)K$,则对 $\forall f\in W$,必有 $g\in K$,满足 $f=(I-A)g$.

定义 1.1 设 X、Y 是拓扑空间,$C(X,Y)$ 是 X 到 Y 的所有连续映射的集合,$f,g\in C(X,Y)$,$I=[0,1]$.如果有连续映射 $H:X\times I\to Y$,使得 $\forall x\in X$,$H(x,0)=f(x)$,$H(x,1)=g(x)$,则称 f 与 g 同伦,记作 $f\simeq g:X\to Y$,或简记为 $f\simeq g$.$\forall w\in X$,$f(x)=w$,$g(x)=x$,若 $f\simeq g$,则称 X 为可缩拓扑空间.设 $A\subseteq X$,若将 A 视为拓扑空间时,A 为可缩拓扑空间,则称 A 为可缩集.若 U,V 为二集合,记 $U-V=\{u-v|u\in U,v\in V\}$,$U+V=\{u+v|u\in U,v\in V\}$.

引理 1.1 设 X、Y 是拓扑空间,Y 连通,f 为从 X 到 Y 中的映射,$f(X)\cup\bar{Z}\subset Y$,$f(X)\cup\bar{Z}\neq Y$ 且 $Y/f(X)$ 为连通集,∂Z 为 Z 相对于 Y 的边界,$\partial Z\subset f(X)$,则 $\bar{Z}\subseteq f(X)$.

证明 若 $\mathrm{int}Z\neq\varnothing$,$z\in\mathrm{int}Z$,$z\notin f(X)$,则 $z\in Y/f(X)$.设 $u\in Y/(f(X)\cup\bar{Z})$.因为 $\bar{Z}\subset Y$,$\bar{Z}\neq Y$,故 $\mathrm{int}Y/Z\supseteq\mathrm{int}Y/\bar{Z}=Y/\bar{Z}\neq\varnothing$,又 $\mathrm{int}Z\neq\varnothing$,$Y$ 连通,$\partial Z=\overline{Y/Z}\cap\bar{Z}$,$Y/\partial Z=Y/\bar{Z}\cup[Y/\overline{Y/Z}]=\mathrm{int}Y/\bar{Z}\cup\mathrm{int}[Y/\overline{Y/Z}]$,$Y/\bar{Z}\cap[Y/\overline{Y/Z}]=\varnothing$,故 $Y/\partial Z$ 为不连通集,z 与 u 分别属于 $Y/\partial Z$ 的 2 个不同的连通分支内,从而 z 与 u 分别属于 $Y/f(X)$ 的 2 个不同的连通

收稿日期:2008-09-15
作者简介:吴树宏(1963-),男,副教授,主要从事泛函分析研究.

分支内. 这与 $Y/f(X)$ 为连通集矛盾, 故 $\mathrm{int}Z \subseteq f(X)$. 再由 $\partial Z \subset f(X)$ 知 $Z = \mathrm{int}Z \cup \partial Z \subset f(X)$.

引理 1.2 设 X 为可缩拓扑空间, Y 为连通拓扑空间, $V \subseteq Y$, S, T 为 X 到 Y 的映射, $S - T$ 为 X 到 Y 的连续映射, $TX \cup \{0\} \subseteq V$, 对满足 $U \subseteq SX - V \subseteq Y$ 的任意可缩集 U, Y/U 为非空连通集, 则 $\overline{SX/(\partial SX - V)} \subseteq (S - T)X$.

证明 $\forall k \in X$, 对 $x \in X$, 设 $f(x) = w$, $g(x) = x$. 因为 X 为可缩拓扑空间, 故 $f \simeq g$. 此时存在连续映射 $H: X \times [0,1] \to X$, 满足 $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$. 又因为 $S - T$ 为 X 到 Y 的连续映射, 对 $Z = (S - T)k$, $y = (S - T)x$, 令 $F(y) = Z$, $G(y) = y$, $\hat{H}(x,t) = (S - T)H(x,t)$, 则 $\hat{H}(x,0) = (S - T)k = Z$, $\hat{H}(x,1) = (S - T)x = y$, 故在 $(S - T)X$ 中必有 $F \simeq G$, 从而 $(S - T)X$ 为 Y 中的可缩集. 因为 $TX \subseteq V$, 故 $(S - T)X \subseteq SX - V$, 此时 $Y/(S - T)X$ 必为 Y 中的非空连通集. 注意 $0 \in V$, 必有可缩集 K, 满足 $\partial K \subseteq (S - T)X$, $SX/(\partial SX - V) \subseteq K \subseteq \overline{K} \subseteq SX - V$. 此时 $(S - T)X \cup \overline{K} \subseteq SX - V \subseteq Y$, $(S - T)X \cup \overline{K} \neq Y$. 由引理 1.1 知 $\overline{SX/(\partial SX - V)} \subseteq \overline{K} \subseteq (S - T)X$.

引理 1.3 设 X 为可缩拓扑空间, Y 为连通拓扑空间, $U, V, W \subseteq Y$, S, T 为 X 到 Y 的映射, $S - T$ 为 X 到 Y 的连续映射, $SX \supseteq U$, $TX \cup \{0\} \subseteq V$, $U \cap \partial SX = \varnothing$, $V + W \subseteq U$, 若对满足 $P \subseteq SX - V \subseteq Y$ 的任意可缩集 P, Y/P 为非空连通集, 则 $\overline{W} \subseteq (S - T)X$.

证明 因为 $0 \in V$, $V + W \subseteq U$, 故 $W \subseteq U \subseteq SX$. 设 $x \in \partial SX - V$, 则 $(V + \{x\}) \cap \partial SX \neq \varnothing$. 若 $x \in W$, 则 $V + \{x\} \subseteq V + W \subseteq U$. 从而 $\varnothing \neq (V + \{x\}) \cap \partial SX \subseteq U \cap \partial SX = \varnothing$, 产生矛盾, 故 $x \notin W$, 即 $W \subseteq SX/(\partial SX - V)$. 再由引理 1.2 知 $\overline{W} \subseteq \overline{SX/(\partial SX - V)} \subseteq (S - T)X$.

引理 1.4 若 K_1 为拓扑空间, K_2 为可缩拓扑空间, F 为 K_1 到 K_2 的所有连续映射所成之集, 则 F 为可缩集.

证明 设 I 为全序指标集, 对 I 中任意真子集 J, I/J 均有最小元, 集合 I 的势不小于集合 K_2 的势. 若 $k \in I$, 设 $L^k, M_x^k, N_x^k \subseteq K_2$, 对 $x \in L^k$, 有 $x \in M_x^k \subseteq N_x^k$, M_x^k, N_x^k 为 K_2 中的非空可缩开集, 对任意 $x_1, x_2 \in L^k$, $x_1 \neq x_2$, $M_{x_1} \cap M_{x_2} = \varnothing$, $\bigcup_{x \in L_k} N_x = K_2$, 对 $k_1, k_2 \in I$, $k_1 \preceq k_2$, $M_x^{k_2} \subseteq M_x^{k_1}$, $N_x^{k_2} \subseteq N_x^{k_1}$, $L^{k_1} \subseteq L^{k_2}$, $\bigcap_{k \in I} M_x^k = \bigcap_{k \in I} N_x^k = \{x\}$, $\overline{\bigcup_{k \in I} L^k} = K_2$. 设 l 为 I 的最小元, $\forall x_l \in L^l$. 因 K_2 为可缩拓扑空间, 故存在 $H_{x_l} \in C(K_2 \times [0,1], K_2)$, 满足 $H_{x_l}(x,0) = x_l$, $H_{x_l}(x,1) = x$ ($x \in K_2$). 设 l' 为 $I/\{l\}$ 中的最小元, $\forall x_{l'} \in L^{l'}/L^l$, 存在 $x \in L^l$, 使得 $x_{l'} \in N_x^l$. 因为 N_x^l 为可缩集, 则存在 $H_{x_{l'}}^l \in C(N_x^l \times [0,1], N_x^l)$, 满足 $H_{x_{l'}}^l(y,0) = x_{l'}$, $H_{x_{l'}}^l(y,1) = y$ ($y \in N_x^l$). 因为 H_{x_l} 连续, N_x^l 为开集, 则存在 $t_l^* \in (0,1)$, 当 $t \in [0, t_l^*]$, $x \in K_2$ 时, 有 $H_{x_l}(x,t) \in N_x^l$. 对 $z \in K_2$, 令

$$H_{x_{l'}}(z,t) = \begin{cases} H_{x_l}(z,t), & t \in [t_l^*, 1], \\ H_{x_{l'}}^l\left(H_{x_l}(z,t), \dfrac{t}{t_l^*}\right), & t \in [0, t_l^*], \end{cases}$$

则 $H_{x_{l'}}(z,t)$ 在 $K_2 \times [0,1]$ 上关于 z, t 连续, 且 $H_{x_{l'}}(z,0) = x_{l'}$, $H_{x_{l'}}(z,1) = z$. 按上述方法归纳递推可得 H_r ($r \in \bigcup_{k \in I} L^k$). $\forall x' \in K_2$, 存在有序列 $\{x_p\} \subseteq \bigcup_{k \in I} L^k$, $x_p \in L^p$, $p \in I$, $\lim x_p = x'$. 定义 $H_{x'} = \lim H_{x_p}$. 由上述构造过程可知极限存在. 作为 $C(K_2 \times [0,1], K_2)$ 中的函数族, $H_{x'}$ 关于 x' 连续, $H_{x'}(x,0) = x'$, $H_{x'}(x,1) = x$ ($x \in K_2$). 设 $g \in F$, 对任意 $f \in F$, 令 $G_1(f) = g$, $G_2(f) = f$. $\forall x \in K_1$, $H_{g(x)}(f(x),t)$ 为 $F \times [0,1]$ 到 F 上的连续映射, $H_{g(x)}(f(x),0) = g(x)$, $H_{g(x)}(f(x),1) = f(x)$. 故 $G_1 \simeq G_2$, 即 F 为可缩集.

定理 1.1 设 $n \in N$, 若 $T = (T_1, T_2, \cdots, T_n) \in N^n$, 记 $|T| = \sum_{i=1}^{n} T_i$, $D^T = \dfrac{\partial^T}{\partial_1 \partial_2 \ldots \partial_n}$, 设 K_1, K_2 为可缩集, K_4 为连通集, K 为 K_1 中的可测集, 由 K_1 到 K_2 的 (正、非负) 至多 n 阶可微映射组成的集合记为 G_1, 由 K_1 到 K_4 的 (正、非负) 连续 (可测) 映射组成的集合记为 G_2; $a \in G_2$, $A, B \subseteq G_2$, $F_1(x, y, z_T(|T| \leqslant n))$, $F_2(x, y, z_T(|T| \leqslant n))$ 为 $K_1 \times K \times \prod_{|T| \leqslant n} K_2$ 到 K_3 中的关于 y 可测, 关于 $x, z_T(|T| \leqslant n)$ 连续的映射, $H_1(x, y_T(|T| \leqslant n), z)$, $H_2(x, y_T(|T| \leqslant n), z)$ 为 $K_1 \times \prod_{|T| \leqslant n} K_2 \times K_3$ 到 K_4 中的映射, $H_1(x, y_T(|T| \leqslant n), z) - H_2(x, y_T(|T| \leqslant n), z)$ 为 $K_1 \times \prod_{|T| \leqslant n} K_2 \times K_3$ 到 K_4 中的连续映射, $\forall x \in K_1$, $h \in G_1$, $S(x,h) = H_1[x, D^T h(x)(|T| \leqslant n), \int_K F_1(x,t,D^T h(t)(|T| \leqslant n))\mathrm{d}t]$, $T(x,h) = H_2[x, D^T h(x)(|T| \leqslant n), \int_K F_2(x,t,D^T h(t)(|T| \leqslant n))\mathrm{d}t]$. 若 $T[K_1 \times G_1] \cup \{0\} \subseteq B$, $S[K_1 \times G_1] \supseteq A \supseteq \{a\} + B$, $A \cap \partial S[K_1 \times G_1] = \varnothing$, 对满足 $P \subseteq S(K_1 \times G_1) - B \subseteq G_2$ 的任意可缩集 P, G_2/P 为非空连通集. 则微分积分方程组

$$H_1[x, D^T h(x)(|T| \leqslant n), \int_K F_1(x,t,D^T h(t)(|T| \leqslant n))\mathrm{d}t] = a(t) + H_2[x, D^T h(x)(|T| \leqslant n), \int_K F_2(x,$$

$t, D^{T}h(t)(|T| \leqslant n))dt]$

有(正、非负)连续(可测)解 $h \in G_1$.

证明 由 K_1, K_2 为可缩集及引理 1.4 知 $K_1 \times G_1$ 为可缩集,又 K_4 为连通集,故 G_2 为连通集. 在引理 1.3 中令 $X = K_1 \times G_1, Y = G_2, V = B, W = \{a\}, U = A$. 由引理 1.3 得 $a \in (S - T)(K_1 \times G_1)$. 故

$$H_1[x, D^{T}h(x)(|T| \leqslant n), \int_K F_1(x, t, D^{T}h(t)(|T| \leqslant n))dt] = a(t) + H_2[x, D^{T}h(x)(|T| \leqslant n), \int_K F_2(x, t, D^{T}h(t)(|T| \leqslant n))dt]$$

有(正、非负)连续(可测)解 $h \in G_1$.

定理 1.2 设 $n \in N$, 若 $T = (T_1, T_2, \cdots, T_n) \in N^n$, 记 $|T| = \sum_{i=1}^{n} T_i$, $D^{T} = \dfrac{\partial^{|T|}}{\partial_1 \partial_2 \ldots \partial_n}$. 设 K 为 K_1 中的可测集, K_2 为可缩集, K_4 为连通集, K 为 K_1 中的可测集, 由 K_1 到 K_2 的(正、非负)至多 n 阶可微映射组成的集合记为 G_1, 由 K_1 到 K_4 的(正、非负)连续(可测)映射组成的集合记为 G_2; $a \in G_2, A, B \subseteq G_2, F_1(y, z_T(|T| \leqslant n)), F_2(y, z_T(|T| \leqslant n))$ 为 $K \times \prod_{|T| \leqslant n} K_2$ 到 K_3 中的关于 y 可测, 关于 $z_T(|T| \leqslant n)$ 连续的映射, $H_1(y_T(|T| \leqslant n), z), H_2(y_T(|T| \leqslant n), z)$ 为 $\prod_{|T| \leqslant n} K_2 \times K_3$ 到 K_4 中的映射, $H_1(y_T(|T| \leqslant n), z) - H_2(y_T(|T| \leqslant n), z)$ 为 $\prod_{|T| \leqslant n} K_2 \times K_3$ 到 K_4 中的连续映射, $\forall h \in G_1$, $S(h) = H_1[D^{T}h(|T| \leqslant n), \int_K F_1(t, D^{T}h(t)(|T| \leqslant n))dt]$, $T(h) = H_2[D^{T}h(x)(|T| \leqslant n), \int_K F_2(t, D^{T}h(t)(|T| \leqslant n))dt]$. 若 $TG_1 \cup \{0\} \subseteq B, SG_1 \supseteq A \supseteq \{a\} + B, A \cap \partial SG_1 = \varnothing$, 对满足 $P \subseteq SG_1 - B \subseteq G_2$ 的任意可缩集 P, G_2/P 为非空连通集. 则微分积分方程组

$$H_1[D^{T}h(x)(|T| \leqslant n), \int_K F_1(t, D^{T}h(t)(|T| \leqslant n))dt] = a(t) + H_2[D^{T}h(x)(|T| \leqslant n), \int_K F_2(t, D^{T}h(t)(|T| \leqslant n))dt]$$

有(正、非负)连续(可测)解 $h \in G_1$.

证明 因为 K_2 为可缩集, 由引理 1.4 知 G_1 为可缩集, 又 K_4 为连通集, 故 G_2 为连通集. 在引理 1.3 中令 $X = G_1, Y = G_2, V = B, W = \{a\}, U = A$. 由引理 1.3 得 $a \in (S - T)G_1$. 故

$$H_1[D^{T}h(x)(|T| \leqslant n), \int_K F_1(t, D^{T}h(t)(|T| \leqslant n))dt] = a(t) + H_2[D^{T}h(x)(|T| \leqslant n), \int_K F_2(t, D^{T}h(t)(|T| \leqslant n))dt]$$

有(正、非负)连续(可测)解 $h \in G_1$.

注 若引理 1.4 中的 K_2 为凸集, 则其证明会很简单, 下节出现的所有情形均属于此种类型.

2 映射性质的应用

若定理 1.1 定理 1.2 的方程左边仅为某变量的导数, 则其某种积分就要满足边界条件或初始条件, 这样方程左边一般不会是局部满射, 就不能满足定理 1.1 定理 1.2 的条件. 故要想利用定理 1.1 定理 1.2, 最好先将微分积分方程组的左边化为变量 h, 而其右边化为微分积分方程组的形状, 再针对各种不同情形, 设计不同的集合与空间来讨论方程解的存在性.

2.1 离散方程组解的存在性

我们考虑 $2m$ 阶差分方程 LidstoneBVP 的特征值问题:

$$\begin{cases} \triangle^{2m} y(t-m) = \lambda f(t, y(t)), t \in [a+1, b+1], \\ \triangle^{2i} y(a-m+1) = \triangle^{2i} y(b+m+1-2i) = 0, 0 \leqslant i \leqslant m-1, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $m \in N, a, b, t \in Z, a \leqslant b, 0 < \lambda < \infty$ 为实参数, $(-1)^m f(t, y): [a+1, b+1] \times R \to (0, +\infty)$, 并且 $\max_{t \in [a+1, b+1]} (-1)^m f(t, 0) > 0$. 称函数 $y: [a-m+1, b+m+1] \to (0, +\infty)$ 为特征值问题 (1) 的一个正解, 若 y 满足 (1) 式, 并且在 $[a-m+2, b+m]$ 上 $y > 0$. 若对某一个 λ, 特征值问题 (1) 有一正解 y, 则称 λ 为 (1) 式的一个特征值, 称 y 为相应的特征向量. 定义 (1) 式的 Green 函数 $g_m(t, s): [a+m+1, b+m+1] \times [a+1, b+1] \to R$ 为:

$$\begin{cases} g_1(t, s) = g_{1,a,b}(t, s) = g(t, s), \\ g_j(t, s) = g_{j,a,b}(t, s) = \\ \quad \sum_{f=a}^{b+2} g_{j-1,a-1,b+1}(t, f) g_1(f, s), 2 \leqslant j \leqslant m, \end{cases}$$

其中 $g_j(t, s): [a-j+1, b+j+1] \times [a+1, b+1] \to R, 1 \leqslant j \leqslant m$, 并且

$$g(t, s) = -\frac{1}{b+2-a} \begin{cases} (b+2-s)(t-a), a \leqslant t \leqslant s, \\ (b+2-t)(s-a), s \leqslant t \leqslant b+2, \end{cases}$$

由文献 [1] 知, 对任意固定的 $0 < \lambda < \infty$, 函数 $y: [a-m+1, b+m+1] \to R$ 是 (1) 式的解当且仅当 y 是下列方程的解:

$$y(t) = \lambda \sum_{s=a+1}^{b+1} g_m(t, s) f(s, y(s)), t \in [a-m+1, b+m+1]. \quad (2)$$

定理 2.1 若存在 $R > 0, T > 0$, 满足 $\max_{t \in [a+1, b+1], y \in [-R, R]} (-1)^m f(t, y) \leqslant TR$, 则当 $0 < \lambda < [T \sum_{s=a+1}^{b+1} (-1)^m g_m(s, s)]^{-1}$ 时 (1) 式有正解.

证明　在定理 1.1中,令 $K = [a+1, b+1] \cap Z$,关于 K的积分测度为 $\sum_{k\in K} W_k$,W_k 为 Dirac函数,$K_1 = [a-m+1, b+m+1]$,$K_2 = K_3 = [-R, R]$,$K_4 = R$,$G_1 = C(K_1, [-R, R])$,$G_2 = C(K_1)$,$A = B = C(K_1, (-R, R))$,$a = 0$,$F_1(t,s,y) = 0$,$F_2(t,s,y) = g_m(t,s)f(s,y)$,$H_1(t,y,u) = y$,$H_2(t,y,u) = \lambda u$.由文献[1]中引理 4知,当 $t \in [a-m+1, b+m+1]$,$y \in G_1$ 时,有

$$0 < \lambda \sum_{s=a+1}^{b+1} g_m(t,s) f(s, y(s)) = \lambda \sum_{s=a+1}^{b+1} (-1)^m g_m(t,s)(-1)^m f(s,y(s)) \leqslant \lambda \sum_{s=a+1}^{b+1} (-1)^m g_m(s,s)(-1)^m f(s,y(s)) < R,$$

$\forall y \in G_2$,令 $\|y\| = \sup_{x\in K_1} \|y(x)\|$.在此范数赋予的拓扑意义下,有 $A \cap \partial S(K_1 \times G_1) = \varnothing$,$T(K_1 \times G_1) \cup \{0\} \subseteq B + \{a\} \subseteq A \subseteq S(K_1 \times G_1)$.显然,对满足 $P \subseteq S(K_1 \times G_1) - B \subseteq G_2$ 的任意可缩集 P,G_2/P 为非空连通集.由定理 1.1知(2)式有解,再由文献[1]中引理 5知(1)式有正解.

2.2　迭代函数方程组解的存在性

迭代函数方程解的存在性方面已有丰富的成果[2,3],但一般都是讨论一元函数的情形,多元函数情形的结论并不多见.

定理 2.2　设 $0 \in V \subseteq \mathrm{int}W \subseteq W \subset R^n$,$W$ 为可缩集,对满足 $P \subseteq W - V$ 的任意可缩集 P,R^n/P 为非空连通集,$h \in C(W,W)$,$h^2 = h \circ h$,$h^k = h \circ h^{k-1}$,$f \in C(W \times W \times \cdots \times W, W)$,$f(W \times W \times \cdots \times W) \subseteq V$.则 $h(t) = f(t, h(t), h^2(t), \cdots, h^n(t))$ 有解 $h \in C(W,W)$.

证明　在定理 1.1中,设 $K = \varnothing$,$K_1 = K_2 = W$,$K_3 = K_4 = R^n$,$G_1 = C(W,W)$,$G_2 = C(W, R^n)$,$F_1(x,t,h) = F_2(x,t,h) = 0$,$H_1(x,h,z) = h$,$H_2(x,h,z) = f(x,h,h^2,\cdots,h^n)$,$A = C(W,W)$,$B = C(W,V)$,$a = 0$,$S(x,h) = h$,$T(x,h) = f(x,h,h^2,\cdots,h^n)$.$\forall y \in G_2$,令 $\|y\| = \sup_{x\in K_1}\|y(x)\|$.在此范数赋予的拓扑意义下,有 $T(K_1 \times G_1) \cup \{0\} \subseteq B$,$S(K_1 \times G_1) \supseteq A \supseteq \{a\} + B$,$A \cap \partial S(K_1 \times G_1) = \varnothing$.因为对满足 $P \subseteq W - V$ 的任意可缩集 P,R^n/P 为非空连通集,故 $G_2/(S-T)(K_1 \times G_1)$ 为非空连通集.由定理 1.1得 $h(t) = f(t, h(t), h^2(t), \cdots, h^n(t))$ 有解 $h \in C(W,W)$.

2.3　右端可化为有界的方程组解的存在性

考虑 Duffing方程

$$x'' + g(x) = p(t) \tag{3}$$

的周期解问题,此处 $p(t)$ 是 2π的周期函数.根据 $g(x)$ 在无穷远处关于 x 的增长速度,可将方程(3)分为下述类型:1) 超线性:$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x} = \pm\infty$;2) 半线性:$k < \frac{g(x)}{x} < K$;3) 次线性:$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$,$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x} = 0$.

按照这样的分类方法,上述每一类中都已有大量的结论.但此种分类方法并不完备,如文献[4]讨论的 $g(x) = \arctan x$ 时的情形.

定理 2.3　若 $p(t)$ 是 2π的无穷阶可微周期函数,则 Duffing方程 $x''(t) + \tan x(t) = p(t)$ 有无穷阶可微 2π周期解.

证明　只须证明 $x(t) = \arctan[-x''(t) + p(t)]$ 有无穷阶可微 2π周期解即可.在定理 1.1中,令 $K = \varnothing$,$K_1 = K_2 = [0, 2\pi]$,$K_3 = K_4 = R$,$G_2 = \{x \in C^\infty([0,2\pi]) \mid x(0) = x(2\pi), x'(0) = x'(2\pi), x''(0) = x''(2\pi)\}$,$G_1 = \{x \in G_2 \mid \max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|x(t)| \leqslant 2\pi\}$,$A = B = \{x \in G_2 \mid \max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|x(t)| < 2\pi\}$,$a = 0$,$F_1(s,t,x) = F_2(s,t,x) = 0$,$S(t, h(t)) = h(t)$,$T(t, h(t)) = \arctan[-h''(t) + p(t)]$.$\forall y \in G_2$,令 $\|y\| = \sup_{x\in K_1}\|y(x)\|$.在此范数赋予的拓扑意义下,有 $A \cap \partial S(K_1 \times G_1) = \varnothing$,$T(K_1 \times G_1) \cup \{0\} \subseteq B$,$B + \{a\} \subseteq A \subseteq S(K_1 \times G_1)$.显然,对满足 $P \subseteq S(K_1 \times G_1) - B$ 的任意可缩集 P,G_2/P 为非空连通集.由定理 1.1知 $x(t) = \arctan[-x''(t) + p(t)]$ 有无穷阶可微 2π周期解,即 Duffing方程 $x''(t) + \tan x(t) = p(t)$ 有无穷阶可微 2π周期解.

2.4　积分方程组解的存在性

定义 2.1[5]　记 R^+ 为非负实数集.R 的一个子集 S 称作是相对稠的,是指存在一个常数 $l > 0$,满足 $[a, a+l] \cap S \neq \varnothing$,$a \in R$.函数 $f \in C(R)$ ($f \in C(R \times R^+)$)称作是(关于 t 且一致对于 $x \in K$,K 是 R^+ 中的任意紧子集)概周期的,是指对任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在一个相对稠子集 P_ε,满足 $|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon$,$t \in R$,$\tau \in P_\varepsilon$ ($|f(t+\tau, x) - f(t,x)| < \varepsilon$,$t \in R$,$\tau \in P_\varepsilon$,$x \in K$).

考虑时滞积分方程

$$x(t) = a(t) + \int_{t-\tau}^{t} D(t,s,x(s))\,\mathrm{d}s, \tag{4}$$

其中,$a: R \to R$,$D: \triangle \times R \to R$ 为连续函数,$\triangle = \{(t,s): t, s \in R, 0 \leqslant t - s \leqslant \tau\}$,$a(t)$ 关于 t 为概周期函数,对 $x \in S$,S 为 R 中任一紧集,$D(t,s,x)$ 关于 t 和 s 都是一致概周期的.

定理 2.4　记 $K = \sup_{t\in R}|a(t)|$.若存在 $r > K > 0$,当 $\sup_{t\in R}|x(t)| \leqslant r$ 时,$\sup_{t\in R}\left|\int_{t-\tau}^{t} D(t,s,x(s))\,\mathrm{d}s\right| < r -$

K,则方程(4)有概周期解.

证明　在定理1.1中,令 $\mathrm{K}=\mathrm{K}_1=\mathrm{K}_3=\mathrm{K}_4=R$, $\mathrm{K}_2=[-r,r]$, $H_1(t,x,y)=x$, $H_2(t,x,y)=a(t)+y$, $F_1(t,s,x)=0$, $F_2(t,s,x)=D(t,s,x)I_{[t-f,t]}(s)$, $G_1=C(\mathrm{K}_1,[-r,r])$, $G_2=C(\mathrm{K}_1)$, $A=C(\mathrm{K}_1,(-r,r))$, $B=C(\mathrm{K}_1,(-r+K,r-K))$.当 $x\in G_1$ 时, $\sup\limits_{t\in R}\left|a(t)+\int_{t-f}^{t}D(t,s,x(s))\mathrm{d}s\right|<r$. $\forall y\in G_2$,令 $\|y\|=\sup\limits_{x\in\mathrm{K}_1}\|y(x)\|$.在此范数赋予的拓扑意义下,有 $A\cap\partial S(\mathrm{K}_1\times G_1)=\varnothing$, $T(\mathrm{K}_1\times G_1)\cup\{0\}\subseteq B$, $\{a\}+B\subseteq A\subseteq S(\mathrm{K}_1\times G_1)$.显然,对满足 $P\subseteq S(\mathrm{K}_1\times G_1)-B\subseteq G_2$ 的任意可缩集 P, G_2/P 为非空连通集.由定理1.1知方程(4)有解.再由文献[6]中定理1的证明过程知,此解为概周期解.

注　文献[6]中的定理3为定理2.4的特例.

2.5　可化为积分方程组的方程组解的存在性

(Ⅰ)考虑泛函微分方程的奇性边值问题:

$$\begin{cases}x''(t)+f(t,x(t),x'(t))=0, 0<t<1,\\ x(0)=x'(1)=0.\end{cases}\tag{5}$$

这里允许 f 在 $t=0,1$ 和 $x'=0$ 处有一定的奇性,即

$$\lim_{t\to 0^+,1^-}f(t,\cdot,\cdot)=+\infty,\ \lim_{y\to 0^+}f(\cdot,\cdot,y)=+\infty.$$

由文献[7]知,(5)式等价于积分方程组

$$\begin{cases}x(t)=\int_0^t y(s)\mathrm{d}s, t\in[0,1],\\ y(t)=\int_t^1 f(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s, t\in[0,1].\end{cases}\tag{6}$$

设 $a,b\in[0,1)$, $Z[a,b]=\{x\in C([0,1],[0,+\infty))\mid \max\limits_{t\in[0,1]}t^a(1-t)^b x(t)<+\infty\}$, $\mathrm{K}[a,b]=\{x\in C([0,1])\mid \max\limits_{t\in[0,1]}t^a(1-t)^b|x(t)|<+\infty\}$.显然, $\mathrm{K}[a,b]\supset Z[a,b]$. $\forall x\in\mathrm{K}[a,b]$,令 $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}t^a(1-t)^b|x(t)|$,易知按照 $\|\cdot\|$, $\mathrm{K}[a,b]$ 为一个 Banach 空间.

定理2.5　设 $f\in C((0,1)\times[0,+\infty)\times[0,+\infty),[0,+\infty))$ 且 $f:(0,1)\times(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to(0,+\infty)$.若存在 $a,b,c,d\in[0,1)$, $K,M>0$,当 $x,y\in\{z\in Z[a,b]\mid\|z\|\leqslant K\}$ 时, $\max\limits_{t\in[0,1]}t^c(1-t)^d|f(t,x(t),y(t))|\leqslant M$,且 $\frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}B(1-a,1-b)<1$, $\frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}B(1-c,1-d)M<K$,其中 B 为 Beta 函数,则(5)式有解 $x,y\in\{z\in Z[a,b]\mid\|z\|\leqslant K\}$ 且当 $t\in(0,1)$ 时 $x(t),y(t)>0$.

证明　作 f 的延拓

$$\tilde{f}(t,x,y)=\begin{cases}f(t,x,y), t\in(0,1), x,y\in[0,+\infty),\\ f(t,x,-y), t\in(0,1), x\in[0,+\infty),\\ \qquad y\in(-\infty,0],\\ f(t,-x,y), t\in(0,1), x\in(-\infty,0],\\ \qquad y\in[0,+\infty),\\ f(t,-x,-y), t\in(0,1), x,y\in(-\infty,0],\end{cases}\tag{7}$$

则 $\tilde{f}\in C((0,1)\times R^2)$.对 $\mathrm{K}'\subseteq\mathrm{K}$,记

$$I^{\mathrm{K}'}(t)=\begin{cases}1, t\in\mathrm{K}',\\ 0, t\notin\mathrm{K}'.\end{cases}$$

在定理1.1中,令 $\mathrm{K}=\mathrm{K}_1=(0,1)$, $\mathrm{K}_2=[-K,K]$, $\mathrm{K}_3=\mathrm{K}_4=R$, $F_1(t,s,(x,y))=0$, $F_2(t,s,(x,y))=(yI_{[0,t]}(s),f(s,x,y)I_{[t,1]}(s))$, $H_1(s,(x,y),z)=(x,y)$, $H_2(s,(x,y),z)=z$, $G_2=\mathrm{K}(a,b)\times\mathrm{K}(a,b)$, $a=0$, $G_1=\{(x,y)\in\mathrm{K}(a,b)\times\mathrm{K}(a,b)\mid\|x\|\leqslant K,\|y\|\leqslant K\}$, $A=B=\{(x,y)\in\mathrm{K}(a,b)\times\mathrm{K}(a,b)\mid\|x\|<K,\|y\|<K\}$.

当 $x,y\in\mathrm{K}(a,b)$ 时,

$$\max_{t\in(0,1)}t^a(1-t)^b\left|\int_0^t y(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant\max_{t\in(0,1)}t^a(1-t)^b\cdot\int_0^1 s^{-a}(1-s)^{-b}\|y\|\mathrm{d}s=\frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}B(1-a,1-b)K<K,$$

$$\max_{t\in(0,1)}t^a(1-t)^b\left|\int_t^1 f(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\max_{t\in(0,1)}t^a(1-t)^b\int_0^1 s^{-c}(1-s)^{-d}M\mathrm{d}s=\frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}B(1-c,1-d)M<K.$$

在范数 $\|\cdot\|$ 赋予的拓扑意义下,按定理1.1的符号,有 $T(\mathrm{K}_1\times G_1)\cup\{0\}\subseteq B$, $S(\mathrm{K}_1\times G_1)\supseteq A\supseteq B+\{0\}$, $A\cap\partial S(\mathrm{K}_1\times G_1)=\varnothing$.显然,对满足 $P\subseteq S(\mathrm{K}_1\times G_1)-B\subseteq G_2$ 的任意可缩集 P, G_2/P 为非空连通集.由定理1.1知积分方程组

$$\begin{cases}x(t)=\int_0^t y(s)\mathrm{d}s, t\in[0,1],\\ y(t)=\int_t^1 f(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s, t\in[0,1]\end{cases}\tag{8}$$

有解.因为 $f:(0,1)\times(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to(0,+\infty)$,故 $f:(0,1)\times R^2\to(0,+\infty)$,由(8)式知 $x(t),y(t)>0(0<t<1)$,此时(8)式的解必为(6)式的解,亦是(5)式的解.即(5)式有解 $x,y\in\{z\in Z[a,b]\mid\|z\|\leqslant K\}$ 且当 $t\in(0,1)$ 时 $x(t),y(t)>0$.

(Ⅱ)设 $(E,\|\cdot\|)$ 是实 Banach 空间, $I=[t_0,t_0+a]$ $(a>0)$, $f\in C[I\times E\times E\times E,E]$, $x_0\in E$,对 $u\in C(I,E)$,令 $\|u\|_c=\max\limits_{t\in I}\|u(t)\|$.考虑 E 中非线性混合型微分-积分方程初值问题:

$$u'=f(t,u,Tu,Su), u(t_0)=x_0, t\in I,\tag{9}$$

其中

$(Tu)(t)=\int_{t_0}^{t}k(t,s)u(s)\mathrm{d}s$, $(Su)(t)=\int_{t_0}^{t_0+a}h(t,s)u(s)\mathrm{d}s$, $k\in C(D)$, $h\in C(D_0)$, $D=\{(t,s)\in R^2 \mid t_0\leqslant s\leqslant t\leqslant t_0+a\}$, $D_0=\{(t,s)\in R^2 \mid (t,s)\in I\times I\}$. 对 $R>0$,记 $M(R)=\sup_{\|u\|_c\leqslant R,t\in I}\|f(t,u(t),(Tu)(t),(Su)(t))\|_c$.

定理 2.6 若存在 $R>0$,使得 $M(R)<\dfrac{R-\|x_0\|}{a}$,则(9)式有解 $u\in C(I,E)$.

证明 显然,方程(9)等价于积分方程 $u(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,u(s),Tu(s),Su(s))\mathrm{d}s$. 在定理 1.1中,令 $K=K_1=[t_0,t_0+a]$, $K_2=\{x\in E \mid \|x\|\leqslant R\}$, $K_3=K_4=E$, $F_1(t,s,u)=0$, $F_2(t,s,u)=f(s,u(s),Tu(s),Su(s))I_{[t_0,t]}(s)$, $H_1(x,u,z)=u$, $H_2(x,u,z)=x_0+z$, $a=0$, $G_1=\{x\in C(I,E) \mid \|x\|_c\leqslant R\}$, $G_2=C(I,E)$, $A=\{x\in G_1 \mid \|x\|_c<R\}$, $B=\{x\in G_1 \mid \|x\|_c<R-\|x_0\|\}$. 当 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+a$时, $\|x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,u(s),Tu(s),Su(s))\mathrm{d}s\|_c<R$. 在范数 $\|\cdot\|_c$赋予的拓扑意义下,按定理 1.1的符号,有 $T(K_1\times G_1)\cup\{0\}\subseteq B$, $B+\{a\}\subseteq A\subseteq S(K_1\times G_1)$, $A\cap\partial S(K_1\times G_1)=\varnothing$. 显然,对满足 $P\subseteq S(K_1\times G_1)-B\subseteq G_2$的任意可缩集 P, G_2/P为非空连通集. 由定理 1.1知定理 2.6成立.

注 由定理 2.6可推出文献[8]中定理 1.

(Ⅲ) 设 D^{α}是由 $D^{\alpha}w(t)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}w(s)\mathrm{d}s$定义的 Riemann-Liouville分数导数,其中 Γ是 Gamma函数并且 $0<\alpha<1$, $f:[0,1]\times R\to R$是连续的. 现考虑非线性分数微分方程的存在性:

$$D^{\alpha}w(t)=f(t,w(t)),0<t<1;w(0)=0. \tag{10}$$

显然,零函数是方程(10)的解当且仅当 $f(t,0)\equiv 0$. 由文献[9]知方程(10)等价于积分方程

$$w(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,w(s))\mathrm{d}s,t\in[0,1]. \tag{11}$$

定理 2.7 若 $f(t,0)\neq 0$且存在 $d>0$使得 $\max_{t\in[0,1],l\in[-d,d]}|f(t,l)|<\Gamma(1+\alpha)d$,则方程(10)至少有一非平凡解 $u^*\in C[0,1]$, $\max_{t\in[0,1]}|u^*(t)|\leqslant d$. 若还有 $\min_{t\in[0,1],l\in[-d,d]}f(t,l)>0$,则方程(10)至少有一正解 $u^*\in C[0,1]$, $\max_{t\in[0,1]}u^*(t)\leqslant d$.

证明 在定理 1.1中,令 $K=K_1=[0,1]$, $K_2=[-d,d]$, $K_3=K_4=R$, $F_1(t,s,u)=0$, $F_2(t,s,u)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1}f(s,u)I_{[0,t]}(s)$, $H_1(x,u,z)=u$, $H_2(x,u,z)=z$, $G_1=\{x\in C([0,1]) \mid \max_{t\in[0,1]}|x(t)|\leqslant d\}$, $G_2=C([0,1])$, $A=B=\{x\in C([0,1]) \mid \max_{t\in[0,1]}|x(t)|<d\}$, $a=0$. 则当 $t\in[0,1]$, $w\in B$时,

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,w(s))\mathrm{d}s\right|<\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)d\mathrm{d}s\leqslant d.$$

令 $\|y\|=\sup_{x\in K_1}\|y(x)\|$. 在此范数赋予的拓扑意义下,按定理 1.1的符号,有 $T(K_1\times G_1)\subseteq B+\{a\}=A\subseteq S(K_1\times G_1)$, $A\cap\partial S(K_1\times G_1)=\varnothing$. 显然,对满足 $P\subseteq S(K_1\times G_1)-B\subseteq G_2$的任意可缩集 P, G_2/P为非空连通集. 由定理 1.1知方程(11)有一非平凡解 $u^*\in C[0,1]$, $\max_{t\in[0,1]}|u^*(t)|\leqslant d$,它亦是方程(10)的解. 若还有 $\min_{t\in[0,1],l\in[-d,d]}f(t,l)>0$,由方程(11)知当 $t\in(0,1]$时, $u^*(t)>0$,即方程(10)至少有一正解 $u^*\in C[0,1]$, $\max_{t\in[0,1]}u^*(t)\leqslant d$.

注 文献[9]中定理 3.1和文献[10]中定理 2.1都为定理 2.7的特例.

(Ⅳ) 利用 Green函数将微分方程组化为积分方程组.

一般微分方程的初边值问题,可以先利用 Green函数给出解的积分表达式,再利用定理 1.1确定解的存在性[11~29],只需要构造出合适的集合,就可证明多解的存在性. 若 Green函数为正,容易得出正解的存在性. 若方程本身奇异,在适当的条件下,可以证明连续解的存在性,对于某些情形甚至可以证明奇异解的存在性. 考察非线性 Lidstone边值问题解和正解的存在性:

$$\begin{cases} u^{(2n)}(t)=f(t,u(t),u'(t),\cdots, \\ \qquad u^{(k)}(t),\cdots,u^{(2n-1)}(t)), \\ \qquad 0\leqslant t\leqslant 1,0\leqslant k\leqslant 2n-1, \\ u^{(2j)}(0)=u^{(2j)}(1)=0,0\leqslant j\leqslant n-1, \end{cases} \tag{12}$$

其中 $u^{(0)}(t)=u(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, f在其定义域上连续.

令 $G(t,s)=\begin{cases} t(1-s),0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1, \\ s(1-t),0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$

上式两边对 t求导可得

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,s)=\begin{cases} 1-s,0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1, \\ -s,0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

直接计算得出

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}t(1-t)=\frac{1}{8},$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1\left|\frac{\partial}{\partial t}G(t,s)\right|\mathrm{d}s=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}(t^2-t+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}.$$

由文献[11]知,方程(12)等价于积分方程组

$$
\begin{cases}
u_0(t) = -\int_0^1 G(t,s)u_2(s)\,\mathrm{d}s, \\
u_1(t) = -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)u_2(s)\,\mathrm{d}s, \\
\cdots \\
u_{2i}(t) = -\int_0^1 G(t,s)u_{2(i+1)}(s)\,\mathrm{d}s, \\
u_{2i+1}(t) = -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)u_{2(i+1)}(s)\,\mathrm{d}s, \\
\cdots \\
u_{2(n-2)}(t) = -\int_0^1 G(t,s)u_{2(n-1)}(s))\,\mathrm{d}s, \\
u_{2n-3}(t) = -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)u_{2(n-1)}(s)\,\mathrm{d}s, \\
u_{2(n-1)}(t) = -\int_0^1 G(t,s)f(s,u_0(s),\cdots,u_k(s),\cdots, \\
\qquad u_{2n-1}(s))\,\mathrm{d}s, \\
u_{2n-1}(t) = -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)f(s,u_0(s),\cdots,u_k(s),\cdots, \\
u_{2n-1}(s))\,\mathrm{d}s. \\
\qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.
\end{cases}
\tag{13}
$$

定理 2.8 设 $0 < a_{2(j+1)} < \min\{8a_{2j}, 2a_{2j+1}\}(0 \leqslant j \leqslant n-2)$，$a_{2n-1} > 0$。若当 $0 \leqslant t \leqslant 1$，$|u_k| \leqslant a_k(0 \leqslant k \leqslant 2n-1)$ 时，$|f(t,u_0,\cdots,u_k,\cdots,u_{2n-1})| < \min\{8a_{2n-2}, 2a_{2n-1}\}$，则方程(12)有解 $u \in C^{2n}([0,1])$ 满足 $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1}|u^{(k)}(t)| \leqslant a_k(0 \leqslant k \leqslant 2n-1)$。若当 $0 \leqslant t \leqslant 1$，$0 < (-1)^i u_{2i} \leqslant a_{2i}$，$0 < (-1)^i u_{2i+1} \leqslant a_{2i+1}(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ 时，还有 $0 < (-1)^n f(t,u_0,\cdots,u_k,\cdots,u_{2n-1})$，则方程(12)有解 $u \in C^{2n}([0,1])$，对 $t \in [0,1]$，有 $0 < (-1)^i u^{(2i)}(t) \leqslant a_{2i}$，$0 < (-1)^i u^{(2i+1)}(t) \leqslant a_{2i+1}(0 \leqslant i \leqslant n-1)$。

证明　在定理 1.1中，令 $K = K_1 = [0,1]$，$K_2 = \prod\limits_{k=0}^{2n-1}[-a_k, a_k]$，$K_3 = K_4 = R^{2n}$，$F_1(x,t,u) = 0$，$F_2(x,t,u) = (-G(x,t)u_2, -\frac{\partial}{\partial x}G(x,t)u_2, \cdots, -G(x,t)u_{2(i+1)}, -\frac{\partial}{\partial x}G(x,t)u_{2(i+1)}, \cdots, -G(x,t)u_{2(n-1)}, \frac{\partial}{\partial x}G(x,t)u_{2(n-1)}, -G(x,t)f(t,u_0,\cdots,u_{2n-1})), -\frac{\partial}{\partial x}G(x,t)f(t,u_0,\cdots,u_{2n-1}))$，$H_1(x,u,z) = u$，$H_2(x,u,z) = z$，$G_1 = C([0,1], \prod\limits_{k=0}^{2n-1}[-a_{2k}, a_{2k}])$，$G_2 = C([0,1], R^{2n})$，$A = B = C([0,1], \prod\limits_{k=0}^{2n-1}(-a_{2k}, a_{2k}))$，$a = 0$。因为 $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1}|-\int_0^1 G(t,s)u_{2(i+1)}(s)\,\mathrm{d}s| \leqslant \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1}|u_{2(i+1)}(t)| \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{8}a_{2(i+1)} < a_{2i}$，$\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1}|-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)u_{2(i+1)}(s)\,\mathrm{d}s| \leqslant \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1}|u_{2(i+1)}(t)| \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2}a_{2(i+1)} < a_{2i+1}$，$\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1, |u_k(t)| \leqslant a_k, 0 \leqslant k \leqslant 2n-1}|-\int_0^1 G(t,s)f(s,u_0(s),\cdots,u_k(s),\cdots,u_{2n-1}(s))\,\mathrm{d}s| < a_{2n-2}$，$\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1, |u_k(t)| \leqslant a_k, 0 \leqslant k \leqslant 2n-1}|-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)f(s,u_0(s),\cdots,u_k(s),\cdots,u_{2n-1}(s))\,\mathrm{d}s| < a_{2n-1}$，$\forall u = (u_0, u_1, \cdots, u_{2n-1}) \in G_2$，

令 $\|u\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant 2n-1}|u_k(t)a_k^{-1}|$，在此范数赋予的拓扑意义下，按定理 1.1的符号，有 $T(K_1 \times G_1) \cup \{0\} \subseteq B + \{a\} = A \subseteq S(K_1 \times G_1)$，$A \cap \partial S(K_1 \times G_1) = \varnothing$。显然，对满足 $P \subseteq S(K_1 \times G_1) - B \subseteq G_2$ 的任意可缩集 P，G_2/P 为非空连通集。由定理 1.1知积分方程组(13)有解 $u^* = (u_0^*, u_1^*, \cdots, u_{2n-1}^*) \in C([0,1], R^n)$，满足 $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1}|u_k^*(t)| \leqslant a_k(0 \leqslant k \leqslant 2n-1)$。由方程组(13)可知 $u_0^* \in C^{2n}([0,1])$。故方程组(12)有解 $u_0^*(t)$ 满足 $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1}|u_0^{*(k)}(t)| \leqslant a_k(0 \leqslant k \leqslant 2n-1)$。若当 $0 \leqslant t \leqslant 1$，$0 < (-1)^i u_{2i} \leqslant a_{2i}$，$0 < (-1)^i u_{2i+1} \leqslant a_{2i+1}(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ 时，还有 $0 < (-1)^n f(t,u_0,\cdots,u_k,\cdots,u_{2n-1})$。再由方程组(13)可知 u^* 满足

$$
\begin{cases}
(-1)^0 u_0^*(t) = \int_0^1 G(t,s)(-1)^1 u_2^*(s)\,\mathrm{d}s, \\
(-1)^0 u_1^*(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)(-1)^1 u_2^*(s)\,\mathrm{d}s, \\
\cdots \\
(-1)^i u_{2i}^*(t) = \int_0^1 G(t,s)(-1)^{i+1} u_{2(i+1)}^*(s)\,\mathrm{d}s, \\
(-1)^i u_{2i+1}^*(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)(-1)^{i+1} \cdot \\
\qquad u_{2(i+1)}^*(s)\,\mathrm{d}s, \\
\cdots \\
(-1)^{n-2} u_{2(n-2)}^*(t) = \int_0^1 G(t,s)(-1)^{n-1} \cdot \\
\qquad u_{2(n-1)}^*(s))\,\mathrm{d}s, \\
(-1)^{n-2} u_{2n-3}^*(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}G(t,s) \cdot \\
\qquad (-1)^{n-1} u_{2(n-1)}^*(s)\,\mathrm{d}s, \\
(-1)^{n-1} u_{2(n-1)}^*(t) = \int_0^1 G(t,s) \cdot \\
(-1)^n f(s,u_0^*(s),\cdots,u_k^*(s),\cdots,u_{2n-1}^*(s))\,\mathrm{d}s, \\
(-1)^{n-1} u_{2n-1}^*(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)(-1)^n \cdot \\
\qquad f(s,u_0^*(s),\cdots,u_k^*(s),\cdots,u_{2n-1}^*(s))\,\mathrm{d}s. \\
\qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.
\end{cases}
$$

即方程组(12)有解 $u_0^*(t)$ 且对 $t\in[0,1]$,有 $0<(-1)^k u^{*(k)}(t)\leqslant a_k(0\leqslant k\leqslant 2n-1)$.

参考文献:

[1] 刘学艳,张炳根.高阶差分方程 LidstoneBVP的特征值问题[J].数学学报,2006,49(3):617-624.

[2] 张景中,熊金城.函数迭代与一维动力系统[M].成都:四川教育出版社,1992.

[3] 麦结华,刘新和.一类迭代函数方程的 C^m 解的存在性、唯一性和稳定性[J].中国科学(A),2000,30(2):129-144.

[4] 魏兰阁.一个 Duffing方程的调和解和次调和解[J].数学进展,2003,32(1):39-46.

[5] 姚慧丽,张传义.一类非线性延迟积分方程正的概周期型解的存在性[J].数学学报,2004,47(2):279-284.

[6] 徐建华.一类时滞积分方程概周期解的存在性[J].系统科学与数学,2003,23(2):251-256.

[7] 王宏洲,邓立虎,葛渭高.一类奇性边值问题的正解[J].数学学报,2000,43(3):385-390.

[8] 刘立山.Banach空间非线性混合型微分-积分方程初值问题整体解的存在性[J].系统科学与数学,2000,20(1):112-116.

[9] 姚庆六.非线性分数微分方程解的若干存在性结论[J].高校应用数学学报:A辑,2005,20(3):297-302.

[10] 姚庆六.一类次线性分数微分方程的正解存在性[J].应用数学学报,2005,28(3):429-434.

[11] 姚庆六.一般 Lidstone边值问题的解的存在性[J].数学物理学报,2005,25A(7):1004-1011.

[12] 毛安民,栾世霞.非线性特征值问题的正解[J].数学年刊,2003,24A(2):167-174.

[13] 林晓宁.一阶微分方程周期边值问题最优正解的存在性[J].东北师大学报:自然科学版,2005,37(1):7-10.

[14] 李晓聪,江成顺.一类四阶边值问题的分析[J].数学物理学报,2005,25A(6):890-897.

[15] 倪小虹,葛渭高.高耦合边值问题正解的存在性[J].应用数学学报,2005,28(2):210-215.

[16] 姚庆六.三阶常微分方程的某些非线性特征值问题的正解[J].数学物理学报,2003,23A(5):513-519.

[17] 张国伟,孙经先.非线性 $(k,n-k)$ 共轭边值问题正解存在的特征值条件[J].数学物理学报,2006,26A(6):889-896.

[18] 马宇红,马如云.一类奇异非线性三点边值问题的正解[J].数学物理学报,2003,23A(5):583-588.

[19] 庞常词.超线性非共振奇异 Dirichlet边值问题的正解[J].系统科学与数学,2002,22(1):78-84.

[20] 李仁贵、刘立山.二阶奇异非线性微分方程边值问题的正解[J].应用数学与力学,2001,22(4):435-440.

[21] 程建纲.非线性奇异边值问题[J].应用数学学报,2000,23(1):122-129.

[22] 柴国庆.奇异边值问题的正解存在性[J].数学物理学报,2001,21A(4):521-526.

[23] 毛安民,薛美.奇异边值问题的正解[J].数学学报,2001,44(5):899-908.

[24] 孙经先,张国伟.奇异非线性 Sturm-Liouville问题的正解[J].数学学报,2005,48(6):1095-1104.

[25] 张国伟,孙经先.一类奇异两点边值问题的正解[J].应用数学学报,2006,29(2):297-310.

[26] 赵增勤.二阶奇异超线性微分方程正解的存在性和不可比较性[J].应用数学学报,2006,29(5):921-932.

[27] 刘立山,孙彦.非线性奇异边值问题的正解[J].数学物理学报,2005,25A(4):554-563.

[28] 孙彦,徐本龙,刘立山.Sturm-Liouville方程奇异边值问题的正解[J].系统科学与数学,2005,25(1):69-77.

[29] 马如云.非线性常微分方程非局部问题[M].北京:科学出版社,2004.

(责任编辑:尹　闯)

(上接第138页 Continue from page 138)

[6] Kaminska A. Rotundity of Orlicz-Musielak sequence space[J]. Bull AC Pol Math, 1981, 29(3-4): 137-144.

[7] Hudzik H, Ye Y N. Suppor functional and smoothness in Musielak-Orlicz sequences spaces endowed with the Luxemburg norm [J]. Comment Math Univ Carolinae, 1990, 31(4): 661-684.

[8] Musielak J. Orlicz spaces and modular spaces[M]. Berlin: Lecture Notes in Math, vol Springer-verlag, 1983.

[9] 吴从炘,王廷辅,陈述涛,等.Orlicz空间几何理论[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1986.

[10] 吴从炘,孙慧颖.Musielak-Orlicz序列空间范数与复凸性[J],数学年刊,1991,12(A),增刊:98-102.

[11] Liu Xinbo, Wang Tingfu, Yu Feifei. Extreme pionts and strongly extreme points of Musielak-Orlicz sequences spaces [J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2005, 21(2): 267-278.

(责任编辑:尹　闯)