3 个关于 K_4-e 的 Ramsey 数*
On Three Ramsey Numbers Involving K_4-e

崔岫峰[1],许晓东[2],邵泽辉[3]
CUI Xiu-feng[1],XU Xiao-dong[2],SHAO Ze-hui[3]

(1. 齐齐哈尔大学网络信息中心,黑龙江齐齐哈尔 161006;2. 广西科学院,广西南宁 530007;3. 成都大学信息科学与技术学院,四川成都 610006)
(1. Network Information Center, Qiqihar University, Qiqihar, Heilongjiang, 161006, China; 2. Guangxi Academy of Sciences, Nanning, Guangxi, 530007, China; 3. School of Information Science & Technology, Chengdu University, Chengdu, Sichuan, 610006, China)

摘要:给出求双色 Ramsey 数 $R(G_1,G_2)$ 准确值的一个算法,并利用该算法计算得到 3 个关于 K_4-e 的 Ramsey 数的精确值:$R(K_4-e,K_{2,3})=10$,$R(K_4-e,K_{2,4})=13$,$R(K_4-e,K_{2,5})=16$.

关键词:Ramsey 数 二部图 着色边
中图法分类号:O157.5 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2009)03-0228-02

Abstract:An algorithm to compute the value of Ramsey number $R(G_1,G_2)$ is given, based on which the values of the following Ramsey numbers are decided by computing: $R(K_4-e,K_{2,3})=10$, $R(K_4-e,K_{2,4})=13$, $R(K_4-e,K_{2,5})=16$.

Key words:Ramsey number, bipartite graph, edge coloring

对于一个图 G,如果 $V(G)=X\cup Y$,其中 $X\cap Y=\varnothing$,且 X 中任意两个顶点不相邻,Y 中任意两个顶点不相邻,则称 G 是二部图,其中,X,Y 称为二部图的划分集,若 X 中每一个顶点与 Y 中每一个顶点相邻,则称 G 是完全二部图. n 个顶点的完全图去掉一条边用 K_n-e 表示.

对于简单图 G_1,G_2,Ramsey 数 $R(G_1,G_2)$ 表示满足下列条件[1]的最小正整数 n:对于任意 n 阶图 G,或者 G 含有 G_1,或者 G 的补图含有 G_2. 如果一个图 G 本身不包含同构于 G_1 的子图,它的补图不包含同构于 G_2 的子图,则称图 G 为 (G_1,G_2)- 图. n 阶 (G_1,G_2)- 图定义为 $(G_1,G_2;n)$- 图,$R(G_1,G_2)$ 阶的 (G_1,G_2)- 图称为 (G_1,G_2)Ramsey 图. 我们用 $\mathscr{R}(G_1,G_2)$ 表示所有 (G_1,G_2)- 图的集合,$\mathscr{R}(G_1,G_2;n)$ 表示所有 $(G_1,G_2;n)$- 图的集合.

本文给出了求双色 Ramsey 数 $R(G_1,G_2)$ 准确值的一个算法,并利用此算法计算得到 3 个关于 K_4-e 的 Ramsey 数的精确值:$R(K_4-e,K_{2,3})=10$,$R(K_4-e,K_{2,4})=13$,$R(K_4-e,K_{2,5})=16$. 若无特殊说明,文中所有图均指有限简单图.

1 Ramsey 数精确值的计算方法

关于广义 Ramsey 数 $R(K_4-e,K_{2,t})$ 的下界,由文献[2]中的构造方法可得到如下定理.

定理 1 对于任意整数 $t\geqslant 3$,$R(K_4-e,K_{2,t})\geqslant 2t+3$.

容易知道,完全二部图 $K_{t+1,t+1}$ 是一个 $(K_n-e,K_{2,t})$- 图. 图集合 A 中图的个数,用 $|A|$ 表示.

算法:

步骤 1 利用程序 Nauty[3],从阶数较小的所有 n 阶图中计算集合 $\mathscr{R}(G_1,G_2;n)$.

步骤 2 将 $\mathscr{R}(G_1,G_2;n)$ 扩展为 $\mathscr{R}(G_1,G_2;n+1)$. 即首先置 $\mathscr{R}(G_1,G_2;n+1)$ 为空,然后对于集合 $\mathscr{R}(G_1,G_2;n)$ 中的每一个图 G,加一个顶点 v,枚举这个顶点 v 与 G 中的顶点连接的所有的情况得到一个 $n+1$ 阶的图 H,若 H 是一个 (G_1,G_2)- 图,将 H 加到集合 $\mathscr{R}(G_1,G_2;n+1)$ 中. 最后将 $\mathscr{R}(G_1,G_2;n+1)$ 中同构的图去掉.

步骤 3 如果 $|\mathscr{R}(G_1,G_2;n+1)|\neq 0$,则 $n=$

收稿日期:2009-03-05
作者简介:崔岫峰 (1974-),男,硕士,主要从事人工智能与网络应用研究。
*广西自然科学基金项目 (0991074) 和广西科学院基本科研业务费项目 (09YJ17XX01) 资助。

$n+1$，转到步骤 2；否则转到步骤 4.

步骤 4　如果 $|\mathscr{R}(G_1,G_2;n+1)|=0$，$R(G_1,G_2)=n+1$，返回.

求 Ramsey 数的精确值往往是十分困难的，但是对于数值不大的情况，有时可以在较短的时间内求得一些 Ramsey 数的精确值.

2　3 个关于 K_n-e 的 Ramsey 数的精确值

当 G_1 为 K_4-e，G_2 分别为 $K_{2,3}$，$K_{2,4}$，$K_{2,5}$ 时，利用第 1 节的算法，我们不仅可以得到比定理 1 更好的下界，而且能求出相应 Ramsey 数的精确值. 这里把 K_4-e 记为 G_1，计算结果如表 1 所示.

表 1　$|R(K_4-e,K_{2,3})|$，$|R(K_4-e,K_{2,4})|$，$|R(K_4-e,K_{2,5})|$ 的统计结果

Table 1　Data on $R(K_4-e,K_{2,3})$，$R(K_4-e,K_{2,4})$，$R(K_4-e,K_{2,5})$|

k	$\lvert R(G_1,K_{2,3})\rvert$	$\lvert R(G_1,K_{2,4})\rvert$	$\lvert R(G_1,K_{2,5})\rvert$
9	4	142	1895
10	0	43	3135
11	0	4	1976
12	0	2	219
13	0	0	14
14	0	0	1
15	0	0	1
16	0	0	0

对表 1 中的 3 个 Ramsey 数，分别取一个对应的 Ramsey 图，如图 1～3 所示.

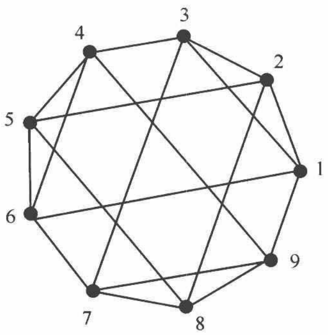

图 1　$(K_4-e,K_{2,3})$- 图

Fig. 1　$(K_4-e,K_{2,3})$ -graph

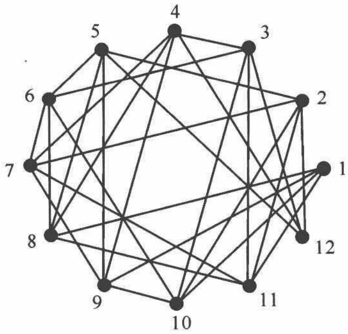

图 2　$(K_4-e,K_{2,4})$- 图

Fig. 2　$(K_4-e,K_{2,4})$ -graph

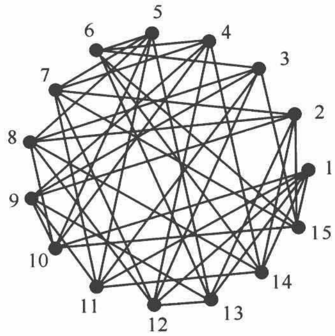

图 3　$(K_4-e,K_{2,5})$- 图

Fig. 3　$(K_4-e,K_{2,5})$ -graph

由表 1 的统计结果，我们可以得到如下定理.

定理 2　$R(K_4-e,K_{2,3})=10$，$R(K_4-e,K_{2,4})=13$，$R(K_4-e,K_{2,5})=16$.

对于整数 $t\geqslant 6$，$R(K_4-e,K_{2,t})$ 将比 16 更大，计算 $R(K_4-e,K_{2,t})$ 准确值的复杂性将随 t 的增大而迅速增大.

参考文献：

[1]　Harary F. A survey of generalized Ramsey theory[M]// Bari R，Harary F. Graphs and combinatorics. Heidelberg: Springer，1974：10-17.

[2]　Burr S. Ramsey numbers involving graphs with long suspended paths[J]. J Lond Math Soc，Ⅱ Ser，1981(24)：405-413.

[3]　Mckay B D. Nauty user's guide (version 2.2)[R/OL]. Technique Report TR-CS-90-02，Computer Science Department，Australian National University，2006[2009-02-17]. http://cs.anu.edu.au/people/bdm.

[4]　Radziszowski S P. Small Ramsey numbers[J/OL]. The Electronic Journal of Combinatorics，2006，DS1，#11：1-60[2009-02-01]. http://www.combinatorics.org.

（责任编辑：尹　闯）