关于非优美指数的一些结论*

Some Conclusions about Non-beaty Index

吴文权,谢　科

WU Wen-quan,XIE Ke

(阿坝师范高等专科学校数学系,四川汶川　623000)

(Department of Mathematics,Aba Normal College,Wenchuan,Sichuan,623000,China)

摘要:给出1个判断正整数是非优美指数的充要条件,并应用该充要条件论证2个猜想,证实其中一个猜想成立另一个猜想不成立.

关键词:非优美指数　除数函数　Murthy. A 猜想

中图法分类号:O156.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2009)03-0238-02

Abstract:A sufficient and necessary condition for judging non-beauty index is offered,and uses it to demonstrate two conjectures and proofs that one of them is correct but the other one is not.

Key words:Non-beaty index,divisor function,conjecture of Murthy. A

2001年,Murthy. A[1]定义了优美指数的概念,同时还提出猜想:任意正整数 m,m 都是优美指数.乐茂华[2]证明64不是优美指数,从而否定了 Murthy. A 猜想.蒲永锋[3]找到了无穷多个非优美指数.唐波[4]指出形如 $15p(p\neq 5$ 为素数)的数都是非优美指数.本文将给出 1 个判断正整数是非优美指数的充要条件,同时指出它的应用.

1　定义及引理

由文献[5]可知,若 N 是全体正整数的集合,对于 $n\in N$,设 $d(n)$ 是 n 的除数函数,当 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$.

定义1[2]　对于一个正整数 m,如果存在一个正整数 n,使得

$$m=\frac{n}{d(n)},\tag{1}$$

则称 m 为优美指数,否则称为非优美指数.

引理1　设正整数 m 为优美指数,则 n 一定不含大于 $m+1$ 的素因子.

证明　反证法.设 p 为大于 $m+1$ 的素数,且 $p|n$,可设 $n=p^{\alpha}\prod_{i=1}^{k}q_i^{\beta_i}$,$\alpha\geqslant 1$,$\beta_i\geqslant 0$,$q_i\neq p$ 为互不相同的素数,则

$$m=\frac{p^{\alpha}\prod_{i=1}^{k}q_i^{\beta_i}}{(\alpha+1)\prod_{i=1}^{k}(\beta_i+1)}.\tag{2}$$

因为 $q_i^{\beta_i}\geqslant\beta_i+1$,所以由(2)式,有 $m(\alpha+1)\geqslant p^{\alpha}$.不难看出只有 $\alpha=1$ 适合上式.将 $\alpha=1$ 代入(2)式,

$$2m\prod_{i=1}^{k}(\beta_i+1)=p\prod_{i=1}^{k}q_i^{\beta_i}.\tag{3}$$

因为 $p\nmid 2m$,所以,一定存在 i,使得 $p|(\beta_i+1)$.不妨设 $i=1$,即有 $\beta_1+1=lp$,其中 $l\geqslant 1$ 为整数.因为 $q_i^{\beta_i}\geqslant\beta_i+1$,所以又由(3)式可知,$2m(\beta_1+1)\geqslant p\cdot q_1^{\beta_1}$,那么

$$2ml\geqslant q_1^{lp-1}.\tag{4}$$

令 $f(l)=q_1^{lp-1}-2ml$,则 $f'(l)=p\cdot\ln q_1\cdot q_1^{lp-1}-2m$.因为 $q_1\geqslant 2$,$p>m+1$,$l\geqslant 1$,所以 $f'(l)>\ln 2\cdot(m+1)\cdot 2^m-2m$.又因为 $2^m\geqslant m+1$,$\ln 2>0.69$,所以 $f'(l)>\ln 2\cdot(m+1)^2-2m=m(\ln 2\cdot m+2\cdot\ln 2-2)+\ln 2\geqslant m(3\ln 2-2)>0.07m>0$,所以 $f(l)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调上升,且 $f(1)=q_1^{p-1}-2m\geqslant 2^{m+1}-2m\geqslant 2$,因而,当 $l\geqslant 1$ 时,$f(l)\geqslant f(1)>0$.这说明(4)式不成立.得出矛盾.这就说明 n 一定不含大于 $m+1$ 的素因子.

2　主要结论

定理1　设 $m_0=a_1a_2\cdots a_s$,$s\geqslant 1$,a_i 是整数,且 a_i

收稿日期:2008-11-18

修回日期:2009-01-14

作者简介:吴文权(1968-),男,副教授,主要从事数论及微分方程的研究。

* 四川省教育厅科研基金项目(2006C057);阿坝师专校级科研基金项目(ASB07-10)资助。

$\geqslant 2, m=\prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i-1}$,其中 p_i 为互不相同的素数.则当 $p_i > (a_i+1)\cdot\prod_{j\neq i} a_j (i,j=1,2,\cdots,s)$ 时,m 为非优美指数当且仅当 m_0 为非优美指数.

证明 先证明充分性.假设 m 为优美指数,即存在互不相同的素数 $q_j(j=1,2,\cdots,k)$,使得

$$m=\prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i-1}=\frac{\prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i+r_i-1}\cdot\prod_{j=1}^{k} q_j^{b_j}}{\prod_{i=1}^{s}(a_i+r_i)\cdot\prod_{j=1}^{k}(b_j+1)}, \tag{5}$$

其中 $r_i\geqslant 0, k\geqslant 0, b_j\geqslant 1, p_i\neq q_j, i=1,2,\cdots,s, j=1,2,\cdots,k$.因为 $q_j^{b_j}\geqslant b_j+1$,由(5)式可知

$$\prod_{i=1}^{s}(a_i+r_i)\geqslant\prod_{i=1}^{s} p_i^{r_i}. \tag{6}$$

又因为 $p_i>(a_i+1)\prod_{j\neq i} a_j$,所以,只有 $r_1=r_2=\cdots=r_s=0$ 才满足(6)式,将 $r_1=r_2=\cdots=r_s=0$ 代入(5)式,得

$$\prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i-1}=\frac{\prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i-1}\cdot\prod_{j=1}^{k} q_j^{b_j}}{\prod_{i=1}^{s} a_i\cdot\prod_{j=1}^{k}(b_j+1)}. \tag{7}$$

因为 $\prod_{i=1}^{s} a_i=m_0$,再令 $n_0=\prod_{j=1}^{k} q_j^{b_j}$,则 $d(n_0)=\prod_{j=1}^{k}(b_j+1)$.代入(7)式,化简得 $m_0=\frac{n_0}{d(n_0)}$,即 m_0 为优美指数,导出矛盾.

再证明必要性.假设 m_0 为优美指数,即存在正整数 n_0 使得 $m_0=\frac{n_0}{d(n_0)}$,则

$$m=\frac{n_0\cdot\prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i-1}}{\prod_{i=1}^{s} a_i\cdot d(n_0)}. \tag{8}$$

因为 $p_i>(a_i+1)\prod_{j\neq i} a_j\geqslant m_0+1, i=1,2,\cdots,s$.

由引理1知,$p_i\nmid n_0$,所以,由(8)式知,m 为优美指数,导出矛盾.综上所述,定理1得证.

注 若正整数 $m_0=\prod_{i=1}^{s} a_i (s\geqslant 1, a_i$ 是整数,且 $a_i\geqslant 2)$ 为优美指数.令 $m=\prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i-1}$,$p_i$ 为互不相同的素数,注意到 $m=\frac{\prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i-1}\cdot n_0}{\prod_{i=1}^{s} a_i\cdot d(n_0)}$,则当 $p_i\nmid n_0$ 时,$m=\prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i-1}$ 也是优美指数.这一结论可以看成定理1的逆否命题的加强.这里只需要 $p_i\nmid n_0$ 即可,不要求 $p_i>(a_i+1)\prod_{j\neq i} a_j$.

推论1 设 $m_k=p_1p_2\cdots p_k$,p_i 为互不相同的素数,$k\geqslant 1$,当 $p_i>3\cdot 2^{k-1}$ 时,m_k 为非优美指数当且仅当 2^k 为非优美指数.

蒲永锋和唐波分别提出过如下猜想:

猜想1[3] 存在无穷多个相异素因子个数大于3的无平方因子的非优美指数.

猜想2[4] 若 $m_k=p_1p_2\cdots p_k$,p_i 为互不相同的素数,$k>1$,当 $2|k$ 时,m_k 是优美指数.

由文献[3]可知,当 $r=6,10,13,14,22,25$ 时,2^r 都不是优美指数.结合推论1就可以证实猜想1成立,而猜想2不成立.

参考文献:

[1] Murthy A. Some more conjecturees on primes and divisors[J]. Smarandache Notions J,2001(12):311-312.

[2] 乐茂华.关于优美指数的一个猜想[J].韶关学院学报:自然科学版,2004,25(3):7-8.

[3] 蒲永锋,杨仕椿.关于优美指数的 Murthy A 猜想[J].云南师范大学学报:自然科学版,2006,26(2):5-7.

[4] 唐波,康翔军.形如15P的非优美指数[J].商洛学院学报,2007,21(4):8-10.

[5] 华罗庚.数论导引[M].北京:科学出版社,1979.

[6] 蒲永锋,杨仕椿.关于优美指数的新结论[J].西南民族大学学报:自然科学版,2006,32(3),424-427.

(责任编辑:尹 闯)