广西科学 Guangxi Sciences 2009,16(3):243～245,252

# 两类B-样条小波的性质*

# The Properties of Two Categories of B-spline Wavelets

张国兵,丁宣浩,蒋英春
ZHANG Guo-bing,DING Xuan-hao,JIANG Ying-chun

(桂林电子科技大学数学与计算科学学院,广西桂林 541004)
(School of Mathematics and Computational Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin,Guangxi,541004,China)

**摘要**:讨论由多尺度分析构造的两类B-样条小波的紧支撑性,对称性或反对称性,消失矩及可导性等性质.这些性质的研究进一步完善了算子小波理论,增强了小波的实用性.

**关键词**:样条小波 B-样条函数 Riesz基 多尺度分析

**中图法分类号**:O174.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2009)03-0243-03

**Abstract**:The properties of compactly supported,symmetry or antisymmetry,vanishing moments, derivative and so on of two categories of B-spline wavelets constructed by multiresolution analysis are discussed in this paper,by the study of these properties,operator and wavelet theory is obtained to be further improved and the practical application of wavelets is further enhanced.

**Key words**:spline wavelet,B-spline function,Riesz basis,multiresolution analysis

人们为了满足不同需要已经构造了许多小波函数,这些小波函数有着各种各样的良好性质[1~4].在数字信号处理,图像处理以及时-频分析等应用中,需要小波函数同时具有如:像紧支性、对称性和反对称性、光滑性、消失矩以及正交性等性质[3,4].本文主要考察由多尺度理论构造出的两类B-样条小波的一些性质.

## 1 基本定义及引理

一般的,用$L^2(R)$表示$R$上所有满足$\int_R |f(x)|^2 dx < \infty$的函数$f$的全体形成的线性空间,它是Hilbert空间且该空间上任意两个函数$f,g$的卷积定义为$(f*g)(x)=\int_R f(t)g(x-t)dt$.

**定义1** 若一阶基数B-样条为

$$B_1(x)=\chi_{[0,1)}=\begin{cases}1,x\in[0,1],\\0,\text{其他},\end{cases}$$

则$n$阶B-样条为$B_n(x)=(B_{n-1}*B_1)(x)$.

从定义1可以看出$B_n$的支撑为$[0,n]$,关于$\frac{n}{2}$对称并有$B_n(x)\in C^{m-1}(R)$,且对任意正整数$m,n$有$B_{m+n}(\cdot)=(B_m*B_n)(\cdot)$,由卷积的傅里叶变换知$\hat{B}_{m+n}(w)=\hat{B}_m(w)\cdot\hat{B}_n(w)$,特别的有$\hat{B}_n(w)=(\hat{B}_1(w))^n=(\frac{1-e^{-iw}}{iw})^n$.对任意给定的$n\in N$,可定义$n$阶B-样条多尺度分析为$V_0=\overline{\text{span}}\{B_n(x-k)\}_{k\in Z}$,对任意的$j\in Z$有$V_j=\overline{\text{span}}\{2^{\frac{j}{2}}B_n(2^jx-k)\}_{k\in Z}$,则$\{V_j\}_{j\in Z}$为$B_n(x)$生成的多尺度分析[5],并且对$\forall f(x)\in V_0$,有$f(x)\in C^{n-1}(R)$,且在区间$[0,k)$上是次数为$n$的多项式.进而$\forall f(x)\in V_j$,有$f(x)\in C^{n-1}(R)$,并且在区间$[2^jk,2^j(k+1))$,$k\in Z$上是次数为$n$的多项式.

**引理1** 对任意$n\in N$,$B_n(x)$满足关系式:

$$\hat{B}_n(w)=m_0(\frac{w}{2})\hat{B}_n(\frac{w}{2}),\tag{1}$$

其中$m_0(w)=2^{-n}(1+e^{-iw})^n=(\frac{1+e^{-iw}}{2})^n$为三角多项式.

文献[6]中定理5.22给出了$n$阶B-样条$B_n(x)$的9条性质,实际上它也满足双尺度方程性质,即

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{2}}{2^n}\binom{n}{k}2^{\frac{1}{2}}B_n(2x-k).\tag{2}$$

**收稿日期**:2009-03-05
**作者简介**:张国兵(1983-),男,硕士研究生,主要从事算子小波理论与应用研究。
*国家自然科学基金项目(10871217);广西区研究生创新基金项目(2007105950701M04);广西区教育厅项目(桂教科研200607LX010);广西科学基金项目(桂科基0731018);桂林电子科技大学教研基金项目(Z20710)资助。

事实上，由二项式展开定理知$(\frac{1+e^{\frac{-iw}{2}}}{2})^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{2}}{2^n}\binom{n}{k}2^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{iwk}{2}}$，把此式代入(1)式并对其两边作Fourier逆变换得$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{2}}{2^n}\binom{n}{k}2^{\frac{1}{2}}B_n(2x-k)$，即(2)式成立.

文献[7]给出基数B-样条函数的一条结论：如果$m$是一个偶数，则有

$$\sum_{j\in Z}B_n(j)e^{-ijw}\neq 0, w\in R. \quad (3)$$

文献[8]给出方括号积的概念，即对$L^2(R)$上任意两个紧支撑的函数$f(x),g(x)$有

$$[f,g](w)=\sum_{j\in Z}\langle f,g(x-j)\rangle e^{-ijw}=\sum_{k\in Z}\hat{f}(w+2k\pi)\overline{\hat{g}(w+2k\pi)}, w\in R. \quad (4)$$

## 2 两类小波的性质

设$\varphi(x),\tilde{\varphi}(x)$是$L^2(R)$上紧支撑的尺度函数，并且生成多分辩分析$\{V_j\}_{j\in Z}$，$\{\tilde{V}_j\}_{j\in Z}$，则有$\varphi(x)=\sum_{j\in Z}a(j)\varphi(2x-j)$，$\tilde{\varphi}(x)=\sum_{j\in Z}\tilde{a}(j)\tilde{\varphi}(2x-j)$，其中$x\in R$，$a,\tilde{a}$为有限序列. 令$\lambda(j)=\langle\varphi,\tilde{\varphi}(x-j)\rangle$，$\tilde{p}(j)=\langle\tilde{\varphi},\varphi(2x-j)\rangle$，$p(j)=\langle\varphi,\tilde{\varphi}(2x-j)\rangle$，$j\in Z$，并且定义

$$\psi=\sum_{j\in Z}(-1)^j\overline{\tilde{p}(1-j)}\varphi(2x-j), \tilde{\psi}=\sum_{j\in Z}(-1)^j\overline{p(1-j)}\tilde{\varphi}(2x-j). \quad (5)$$

由文献[9]，若$[\tilde{\varphi},\varphi](w)\neq 0, w\in R$，则序列集$\{\psi_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)\}_{(j,k)\in Z}$和$\{\tilde{\psi}_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}\tilde{\psi}(2^jx-k)\}_{(j,k)\in Z}$均为$L^2(R)$的Riesz基. 若补充$\varphi(x)\in H^m(R)$，则$\{\psi_{j,k}^{(m)}(x)=2^{\frac{j}{2}}\psi^{(m)}(2^jx-k)\}_{(j,k)\in Z^2}$也为$L^2(R)$的Riesz基，其中$\psi_{j,k}^{(m)}$表示函数$\psi_{j,k}$的第$m$阶导数. 特别的当$\hat{\lambda}(w)=1$时，即$\varphi(x)$和$\tilde{\varphi}(x)$是一对对偶尺度函数时，(5)式恰好是双正交小波.

**命题1** (1)当$N$为奇数时，设$\tilde{\psi}_N=\sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j}{2}[B_{N+1}(j)+B_{N+1}(j+1)]B_N(2x-j)$，则$\tilde{\psi}_N$为相应于$B_N(x)$的样条小波且具有性质：1)对$n=0,1,2,\cdots,N-1$，集合$\{2^{\frac{j}{2}}\tilde{\psi}_N^{(n)}(x)(2^jx-k)\}_{(j,k)\in Z^2}$均为$L^2(R)$的Riesz基；2)$\tilde{\psi}_N$具有支撑$[0,N]$；3)$\tilde{\psi}_N$关于$\frac{N}{2}$反对称；4)$\tilde{\psi}_N$具有$N$阶消失矩.

(2)当$N$为偶数时，设$\tilde{\psi}_N=\sum_{j=0}^{N+2}\frac{(-1)^j}{4}[B_{N+2}(j-1)+2B_{N+2}(j)+B_{N+2}(j+1)]B_N(2x-j)$，则$\tilde{\psi}_N$为相应于$B_N(x)$的样条小波且具有性质：1)对$n=0,1,2,\cdots,N-1$集合$\{2^{\frac{j}{2}}\tilde{\psi}_N^{(n)}(x)(2^jx-k)\}_{(j,k)\in Z^2}$均为$L^2(R)$的Riesz基；2)$\tilde{\psi}_N$具有支撑$[0,N+1]$；3)$\tilde{\psi}_N$关于$\frac{N+1}{2}$对称；4)$\tilde{\psi}_N$具有$N$阶消失矩.

**证明** (1)取$\varphi(x)=B_1(x)$，$\tilde{\varphi}(x)=B_N(x)$，那么$\langle\tilde{\varphi},\varphi(x-j)\rangle=\int_R B_N(x)B_1(x-j)\mathrm{d}x=\int_R B_N(x)B_1(1+j-x)\mathrm{d}x=B_{N+1}(1+j)$. 因$N+1$为偶数，由(3)式得$[\tilde{\varphi},\varphi](w)=\sum_{j\in Z}\langle\tilde{\varphi},\varphi(x-j)\rangle e^{-ijw}=\sum_{j\in Z}B_{N+1}(1+j)e^{-ijw}\neq 0$. 又$p(j)=\langle\varphi,\tilde{\varphi}(2x-j)\rangle=\int_R B_1(x)B_N(2x-j)\mathrm{d}x=\int_R B_N(2x-j)[B_1(2x)+B_1(2x-j)]\mathrm{d}x=\int_R B_N(x)[B_1(x+j)+B_1(x+j-1)]\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_R B_N(x)[B_1(1-x-j)+B_1(2-x-j)]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[B_{N+1}(1-j)+B_{N+1}(2-j)]$，$j\in Z$，所以$\overline{p(1-j)}=\frac{1}{2}[B_{N+1}(j)+B_{N+1}(1+j)]$，$j\in Z$. 故有$\tilde{\psi}_N=\sum_{j\in Z}(-1)^j\overline{p(1-j)}\varphi(2x-j)=\sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j}{2}[B_{N+1}(j)+B_{N+1}(j+1)]B_N(2x-j)$.

由文献[9]定理5.1知，若$\varphi(x)\in H^m(R)$($m$为正整数)，如果$[\tilde{\varphi},\varphi](w)\neq 0, w\in R$，则$\{2^{\frac{j}{2}}\tilde{\psi}^{(m)}(2^jx-k)\}_{(j,k)\in Z^2}$为$L^2(R)$的Riesz基，故对$n=0,1,2,\cdots,N-1$，集合$\{2^{\frac{j}{2}}\tilde{\psi}_N^{(n)}(x)(2^jx-k)\}_{(j,k)\in Z^2}$均为$L^2(R)$的Riesz基.

由于$B_N(x)$及$B_{N+1}(x)$的支撑分别为$[0,N]$和$[0,N+1]$，易得$\tilde{\psi}_N$的支撑为$[0,N]$.

因为$\tilde{\psi}_N(N-x)=\sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j}{2}[B_{N+1}(j)+B_{N+1}(j+1)]B_N(2N-2x-j)=\sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j}{2}\cdot[B_{N+1}(j)+B_{N+1}(j+1)]B_N(2x+j-N)=\sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^{N-j}}{2}[B_{N+1}(N-j)+B_{N+1}(N-j+1)]B_N(2x+j-N)=-\tilde{\psi}_N(x)$，所以$\tilde{\psi}_N$关于$\frac{N}{2}$是反对称的.

由文献[5]定理9.11，对$\hat{B}_n(w)=m_0(\frac{w}{2})\hat{B}_n(\frac{w}{2})$，若$m_0(w)=(\frac{1+e^{-iw}}{2})^N L(w)$，就有$\int_R x^k\tilde{\psi}_N\mathrm{d}x=0, 0\leqslant k\leqslant N-1$，其中$L(w)$是周期为$2\pi$

的三角多项式．结合(1)式可得 $\tilde{\psi}_N$ 的消失矩为 $N$．当然也可以取 $\varphi(x)=B_m(x)$，其中 $m$ 为大于1的奇数，这样会使 $\tilde{\psi}_N$ 支撑变大，从而增加了小波实际应用的复杂性．

(2) 取 $\varphi(x)=B_2(x+1)$，$\tilde{\varphi}(x)=B_N(x)$，所以 $\langle\tilde{\varphi},\varphi(x-j)\rangle=\int_R B_N(x)B_2(x+1-j)\mathrm{d}x=\int_R B_N(x)B_2(1+j-x)\mathrm{d}x=B_{N+2}(1+j)$．由于 $N+2$ 为偶数，结合(3)式，所以 $[\tilde{\varphi},\varphi](w)=\sum_{j\in Z}\langle\tilde{\varphi},\varphi(x-j)\rangle e^{-ijw}=\sum_{j\in Z}B_{N+2}(1+j)e^{-ijw}\neq 0$．又 $p(j)=\langle\varphi,\tilde{\varphi}(2x-j)\rangle=\int_R B_2(x+1)B_N(2x-j)\mathrm{d}x$．由(2)式得 $B_2(x+1)=\frac{1}{2}[B_2(2x+2)+2B_2(2x+1)+B_2(2x)]$，所以 $p(j)=\frac{1}{2}\int_R B_N(2x-j)[B_2(2x+2)+2B_2(2x+1)+B_2(2x)]\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_R B_N(x)[B_2(x+j)+2B_2(x+j+1)+B_2(x+j+2)]\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_R B_N(x)[B_2(2-j-x)+2B_2(1-j-x)+B_2(-j-x)]\mathrm{d}x=\frac{1}{4}[B_{N+2}(2-j)+2B_{N+2}(1-j)+B_{N+2}(-j)]$，$j\in Z$，所以 $\overline{p(1-j)}=\frac{1}{2}[B_{N+1}(j)+B_{N+1}(1+j)]$，$j\in Z$．故有 $\tilde{\psi}_N=\sum_{j\in Z}(-1)^j\overline{p(1-j)}\varphi(2x-j)=\sum_{j=0}^{N+2}\frac{(-1)^j}{4}[B_{N+2}(j-1)+2B_{N+2}(j)+B_{N+2}(j+1)]B_N(2x-j)$．

再由文献[9]定理5.1得 $n=0,1,2,\cdots,N-1$ 时，集合 $\{2^{\frac{j}{2}}\tilde{\psi}_N^{(n)}(x)(2^jx-k)\}_{(j,k)\in Z^2}$ 均为 $L^2(R)$ 的 Riesz 基．②，③，④类似(1)可证．当然也可取 $\varphi(x)=B_m(x+1)$，其中 $m$ 为大于2的偶数，但是这样会使 $\tilde{\psi}_N$ 的支撑变大，所以这里选取的 $\varphi(x)$ 是最合理的．

再看另一类由一般多尺度分析构造的样条小波的性质．

**命题 2** 设 $\psi_N(x)$ 满足条件：(1) $\psi_N(x)=\sum_{j=0}^{3N-2}h_jB_N(2x-j)$；(2) 若 $3N-2$ 为奇数时，取 $h(\frac{3N-2}{2})$ 为1或 $h(\frac{3N-1}{2})$ 为 $-1$，若为偶数时，取 $h(\frac{3N-2}{2})$ 为1；(3) $\int_R\psi_N(x)B_N(x-j)\mathrm{d}x=0$，$j\in Z$，则 $\psi_N(x)$ 为尺度函数 $B_N(x)$ 相应的小波函数，并有性质：有 $N$ 阶消失矩且 $N>2$ 时有 $N-2$ 阶连续的导数；其支撑为 $[0,2N-1]$；有对称性或反对称性且在不同尺度上有半正交性．

用两个例子来说明命题2的正确性．

**例 1** 考虑[0,1]上的 Haar 小波．此时 $N=1$，所以 $\varphi_1(x)=B_1(x)=\begin{cases}1, x\in[0,1]\\0,\text{其它}\end{cases}$，$\psi_1(x)=\sum_{j=0}^{1}h_jB_1(2x-j)$，$h_0=1$ 或 $h_1=1$，其支撑为[0,1]，又 $\int_R\psi_1(x)B_1(x-j)\mathrm{d}x=0$，解得 $h_1=-1$，$h_0=-1$，所以 $\psi_1(x)=B_1(2x)-B_1(2x-1)$ 或 $\psi_1(x)=-[B_1(2x)-B_1(2x-1)]$．容易看出 Haar 小波满足命题2中相应结论．

**例 2** 考虑[0,3]上的二次样条小波．此时 $N=3$，所以满足命题2的小波为 $\psi_3(x)=\sum_{j=0}^{7}h_jB_3(2x-j)$，$h_3=1$ 或 $h_4=1$，则 $\psi_3(x)$ 为尺度函数 $B_3(x)$ 相应的小波函数，并有性质：有1阶连续的导数且有3阶消失矩；其支撑为[0,5]；关于 $x=\frac{5}{2}$ 对称且在不同尺度上有半正交性．

**证明** 将 $B_3(x)$ 代入到命题2的条件中，解得 $h_0=\frac{-1}{303}$，$h_1=\frac{21}{303}$，$h_2=\frac{147}{303}$，$h_3=1$，$h_4=-1$，$h_5=\frac{147}{303}$，$h_6=\frac{-29}{303}$，$h_7=\frac{1}{303}$．由文献[10]小波的构造理论及 $\hat{\varphi}(w)=P(z)\hat{\varphi}(\frac{w}{2})$，$\hat{\psi}(w)=Q(z)\hat{\psi}(\frac{w}{2})$(这里的尺度函数为 $B_3(x)$)得辅助矩阵 $M(z)=\begin{pmatrix}P(z) & P(-z)\\Q(z) & Q(-z)\end{pmatrix}$，其中 $P(z)$，$Q(z)$ 均为 Laurent 多项式，$z=e^{-\frac{iw}{2}}$．经计算可得 $|M(z)|=-\frac{16}{303}z^9-\frac{416}{303}z^7-\frac{1056}{303}z^5-\frac{416}{303}z^3-\frac{16}{303}z$．令 $|M(z)|=0$ 解得根的模为0.66和0，因此 $M(z)$ 在 $|z|=1$ 上可逆．由文献[6]的定理5.1知，对给定的序列 $\{p_n\}_{n\in Z}$，$\{q_n\}_{n\in Z}\in l^1(Z)$，$\{\varphi(x-n),\psi(x-n)\}_{n\in Z}$ 为 $V_1$ 的 Riesz 基等价于 $M(z)$ 在 $|z|=1$ 上可逆，这里 $W_j=\overline{\mathrm{span}}\{\psi_{j,k},k\in Z\}$，$V_j=\overline{\mathrm{span}}\{\varphi_{j,k},k\in Z\}$，即有 $V_1=W_0\oplus V_0$，所以可得 $\psi_3(x)$ 为二次样条小波函数．由 $\psi_3(x)$ 的表达式及 $B_3(x)$ 的支撑为[0,3]并有1阶连续的导数且关于 $\frac{3}{2}$ 对称．所以 $\psi_3(x)$ 的支撑为[0,5]，关于 $\frac{5}{2}$ 对称并有二阶连续的导数．把 $h_0,h_1,\cdots,h_7$ 代入 $\psi_3$ 得，当 $k=0,1,2$ 时，都有 $\int_R x^k\psi_3(x)\mathrm{d}x=0$，且易验证在不同尺度上有半正交性．

(下转第252页 Continue on page 252)

[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 161: 477-495.

[9] Cahlon B, Schmid D. A note on generic oscillations for delay differential equations[J]. J Math Anal Appl, 1999, 238: 591-598.

[10] Yan Jurang, Zhao Aimin, Zhang Quanxin. Oscillation properties of nonlinear impulsive delay differential equations and applications to population models [J]. J Math Anal Appl, 2006, 322: 359-370.

[11] Chen Yongshao, Feng Wenzhen. Oscillation of second order nonlinear ODE with impulses [J]. J Math Anal Appl, 1997, 210: 150-169.

[12] Peng Mingshu. Oscillation caused by impulses[J]. J Math Anal Appl, 2001, 255: 163-176.

[13] Berezansky L, Braverman E. On oscillation of a second order impulsive linear delay differential equation[J]. J Math Anal Appl, 1999, 233: 276-300.

[14] Wu Xiuli, Chen Siyang, Tang Hongji. Oscillation of a class of second-order delay differential equation with impulses [J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 145: 561-567.

[15] Duan Yongrui, Zhang Weiping, Tian Peng, et al. Generic oscillations of second-order delay differential equations with impulses[J]. J Math Anal Appl, 2003, 277: 465-473.

[16] Bainov D, Domshlak Y, Simeonov P. Sturmian comparison theory for impulsive differential inequalities and equations[J]. Arch Math, 1996, 67: 35-49.

(责任编辑:尹　闯)

(上接第245页 Continue from page 245)

**参考文献:**

[1] Hongand D, WU A D. Orthogonal multiwavelets of multiplicity four[J]. Computers & math, 2000, 40: 1153-1169.

[2] Deboor C, Hollig K, Riemensoheider S D. Box spline[M]. New York: Springer Verlag, 1998.

[3] Jibng Q T. Orthogonal inultiwaveles with oplinuan linefrequency resolution [J]. IEEE Trans Signal Proc, 1998, 46: 830-844.

[4] Han Bin, Shen Zuowei. Wavelets from the loop scheme [J]. Fourier Analysis and Applications, 2005, 11 (6): 615-636.

[5] David F Walnut. An introdution to wavelet analysis [M]. Berlin, Birkhauser Boston: Applied and numerical harmonic analysis, 2002.

[6] 程正兴,杨守志,冯晓霞. 小波分析的理论、算法、进展和应用[M]. 北京:国防工业出版社,2007.

[7] Schoenberg L J. Cardinal spline interpolation[M]. Philadelphia: SIAM, 1973.

[8] Jia R Q, Micchelli C A. Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets Ⅱ: Powers of two [M]//Laurent P J, Mehaute A Le, Schumaker L L. Curves and surfaces. New York: Academic Press, 1991: 209-246.

[9] Jia Rongqing, Wang Jianzhoug, Zhou Dingxuan. Compactly supported wavelet bases for Sobolev spaces [J]. Appl Comput Harmon Anal, 2003(15): 224-241.

[10] 栾丹,丁宣浩. 一种B-样条小波的构造[J]. 广西科学院学报,2007,23(3):138-139,143.

(责任编辑:尹　闯)