基于生物防治的脉冲控制害虫模型分析*

Analysis of Impulsive Control Pest Model Based on Biological Control

徐为坚[1],黄一友[2]

XU Wei-jian[1],HUANG Yi-you[2]

(1.玉林师范学院数学与计算机科学系,广西玉林 537000;2.浦北县外国语学校,广西浦北 535300)

(1. Department of Mathematics and Computer Science,Yulin Normal University,Yulin,Guangxi,537000,China;2. Pubei Foreign Languages School,Pubei,Guangxi,535300,China)

摘要:基于昆虫病毒防治害虫的策略,建立具有脉冲效应的微分方程模型,证明该模型害虫灭绝周期解的全局渐近稳定性及持久性,并得到害虫灭绝周期解全局渐近稳定的最大脉冲周期.

关键词:脉冲控制 周期解 全局渐近稳定

中图法分类号:O175.13 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2009)03-0253-03

Abstract:Based on the control strategy of using insect viruses to control pests,a differential equation model with impulsive control is constructed, and the globally asymptotical stability of pest-eradication periodic solution and the permanence of the model are proved. Furthermore, the maximum pulse period of the pest-eradication periodic solution's globally asymptotical stability is obtained.

Key words:impulsive control,periodic solution,globally asymptotical stability

近20多年来,利用昆虫病毒防治农作物虫害已成为国内外生物防治的一个重要发展方向.昆虫病毒防治方法具有专化性强、对天敌及高等动物安全、对环境无污染、后效作用明显等特点[1],是一种安全、经济、简便、快速的防治害虫方法,对维护农林业可持续发展、恢复自然生态平衡有着重要的经济意义与生态意义.许多学者在昆虫病毒防治害虫方面做了研究,文献[2～6]从昆虫病毒的种类、防治机制及作用等方面进行研究.少数文献[7,8]通过数学模型来研究昆虫病毒控制害虫.

昆虫病毒防治害虫的主要机理是以昆虫病毒流行病学为依据,通过昆虫传递病毒,制造病毒流行病,使害虫染病而直接死亡、或抑制取食、或延缓生长发育,避免害虫继续大量取食而造成危害,达到持续控制害虫的目的.根据这一特点,我们可以把人工接种的被感染病毒的成虫(简称病虫)大量释放,通过病虫使病毒散布到害虫种群中去,引起害虫感染病毒而发病.本文昆虫病毒防治害虫的策略,建立具有脉冲效应的微分方程模型,证明该模型害虫灭绝周期解的全局渐近稳定性及系统的持久性,得到了最大脉冲周期,为害虫管理提供可靠的理论依据.

1 模型及相关引理

文献[7]中的模型假设释放病虫是连续的,但事实上,释放病虫不是连续进行的,而是每隔一段时间定期释放一次或当害虫的数目达到经济危害水平时才释放,因此用脉冲动力系统描述这种现象,更符合生态实际.考虑到害虫种群的增长及在固定时刻喷洒杀虫剂和释放病虫,我们假设:1) 害虫具有增长率 $S'(t)=S(t)(1-S(t))$,病虫没有生育能力,而且不能危害农作物,病虫的死亡率为 c.2) 每只病虫对害虫都具有传染力,传染系数为 α.3) 在时刻 $n\tau(n=1,2,\cdots\cdots)$ 释放已经在实验室感染病毒的病虫,释放率为 u.于是得到具有脉冲效应的害虫控制模型:

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}S'(t)&=S(t)(1-S(t))-\alpha S(t)I(t)\\ I'(t)&=\alpha S(t)I(t)-cI(t)\end{aligned}\right\} t\neq n\tau,\\ \left.\begin{aligned}S(t^{+})&=S(t)\\ I(t^{+})&=I(t)+u\end{aligned}\right\} t=n\tau,\end{cases}$$

收稿日期:2009-03-05

作者简介:徐为坚(1956-),女,教授,主要从事生物数学研究。

*广西科学基金项目(桂科自0991283),广西教育厅科研项目(200707LX143)资助。

$n=1,2,3,\cdots$ (1)

其中 α、c、u 均为正常数.

设 $R_+=[0,\infty)$，$R_+^2=\{z\in R^2, z\geqslant 0\}$，$f=(f_1, f_2)$ 表示模型(1)右边的映射. 模型(1)的解 $z(t)=(S(t),I(t)): R_+\to R_+^2$，在区间 $(n\tau,(n+1)\tau)(n=1,2,\cdots)$ 上是连续可微的. 显然 f 的光滑性保证模型(1)解的全局存在性和唯一性[9].

引理1 假设 $z(t)=(S(t),I(t))$ 是模型(1)的任意一个解且初值 $z(0^+)\geqslant 0$，那么对任意的 $t\geqslant 0$，有 $z(t)\geqslant 0$，且当 $z(0^+)>0$ 时，对任意的 $t\geqslant 0$ 有 $z(t)>0$.

证明 由模型(1)不难得到

$$S(t)=S(0^+)\exp(\int_0^t(1-S(v)-\alpha I(v))\mathrm{d}v),$$

$$I(t)=I(0^+)\exp(\int_0^t(\alpha S(v)-c)\mathrm{d}v)+u\sum_{n=1}^{k}\exp(\int_0^t(\alpha S(v)-c)\mathrm{d}v),$$

其中 k 是在区间 $[0,t]$ 中脉冲的次数，$t\in[0,+\infty)$ 是任意的. 故引理1成立.

引理2[10] 设函数 $m(t)\in PC'(R^+,R)$ 满足不等式

$$\begin{cases} m'(t)\leqslant p(t)m(t)+q(t), t\neq t_k, t>0,\\ m(t_k^+)\leqslant d_k m(t_k)+b_k, t_k>0,\\ m(0^+)\leqslant m_0, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $p,q\in PC(R^+,R)$，且 $d_k\geqslant 0$，b_k，m_0 是常数，则对 $t>0$，有

$$m(t)\leqslant m_0\prod_{0<t_k<t}d_k\exp(\int_0^t p(s)\mathrm{d}s)+\int_0^t\prod_{s<t_k<t}d_k\exp(\int_s^t p(\sigma)\mathrm{d}\sigma)q(s)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}(\prod_{t_k<t_j<t}d_j\exp(\int_{t_k}^t p(s)\mathrm{d}s))b_k.$$

引理3 存在一个常数 $M>0$，对于足够大的 t，使得模型(1)的任意解 $(S(t),I(t))$ 有 $S(t)\leqslant M$，$I(t)\leqslant M$.

证明 令 $V(t)=S(t)+I(t)$，取 $b<c$，则当 $t\neq n\tau$ 时，有 $D^+V(t)+bV(t)=-S^2(t)+(1+b)S(t)-(c-b)I(t)\leqslant -S^2(t)+(1+b)S(t)\leqslant M_0$，其中 $M_0=\frac{(b+1)^2}{4}$. 于是有

$$\begin{cases} D^+V(t)\leqslant -bV(t)+M_0, t\neq n\tau,\\ V(n\tau^+)\leqslant V(n\tau)+u, t=n\tau, \end{cases}$$

$n=1,2,3,\cdots$

由引理2，对于 $t\in(n\tau,(n+1)\tau]$，我们有

$$V(t)\leqslant V(0)e^{-bt}+\int_0^t M_0e^{-b(t-s)}\mathrm{d}s+\sum_{0<n\tau<t}ue^{-b(t-n\tau)}=V(0)e^{-bt}+\frac{M_0}{b}(1-e^{-bt})+u\frac{e^{-b(t-\tau)}-e^{-b(t-(n+1)\tau)}}{1-e^{bt}}<V(0)e^{-bt}+\frac{M_0}{b}(1-e^{-bt})+\frac{ue^{-b(t-\tau)}}{1-e^{b\tau}}+\frac{ue^{b\tau}}{e^{b\tau}-1}\to\frac{M_0}{b}+\frac{ue^{b\tau}}{e^{b\tau}-1},\text{当}t\to\infty.$$

所以 $V(t)$ 是一致完全有界的. 于是对于足够大的 t，存在一个常数 $M>0$，使得 $S(t)\leqslant M$，$I(t)\leqslant M$.

2 主要结论

定理1 模型(1)有害虫灭绝周期解 $(0,\tilde{I}(t))$，其中 $\tilde{I}(t)=\frac{ue^{-c(t-n\tau)}}{1-e^{-c\tau}}$，$t\geqslant 0$.

证明 如果 $S(t)=0$，那么可以得到模型(1)的子模型

$$\begin{cases} I'(t)=-cI(t), t\neq n\tau,\\ I(t^+)=I(t)+u, t=n\tau, n=1,2,3,\cdots\\ I(0^+)=I(0), \end{cases} \tag{3}$$

由模型(3)的第一个式子，在 $(n\tau,(n+1)\tau]$ 上积分得 $I(t)=I(n\tau^+)e^{-c(t-n\tau)}$，且 $I((n+1)\tau=I(n\tau^+)e^{-c\tau}$，故 $I(n\tau^+)=I(0^+)e^{-nc\tau}+\frac{u(1-e^{-nc\tau})}{1-e^{-c\tau}}$. 令 $I(n\tau^+)=I(0^+)$，解得 $I(0^+)=I(n\tau^+)=\frac{u}{1-e^{-c\tau}}$. 所以得到模型(3)的一个正周期解 $\tilde{I}(t)=\frac{ue^{-c(t-n\tau)}}{1-e^{-c\tau}}$，$t\in(n\tau,(n+1)\tau]$，$n\in Z_+$. 并且模型(3)的任意解可写成 $I(t)=(I(0^+)-\frac{u}{1-e^{-c\tau}})e^{-c(t-n\tau)}+\tilde{I}(t)$，$t\in(n\tau,(n+1)\tau]$，$n\in Z_+$，从而 $\lim_{t\to\infty}I(t)=\tilde{I}(t)$. 于是模型(1)有害虫灭绝的周期解 $(0,\tilde{I}(t))$.

定理2 如果 $\tau<\frac{\alpha u}{c}$，那么模型(1)的害虫灭绝周期解 $(0,\tilde{I}(t))$ 是局部渐进稳定的.

证明 作变换 $S(t)=x(t)$，$I(t)=y(t)+\tilde{I}(t)$，得到模型(1)关于周期解 $(0,\tilde{I}(t))$ 的近似线性系统：

$$\begin{pmatrix} x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 1-\alpha\tilde{I}(t) & 0\\ \alpha I(t) & -c\end{bmatrix}\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}.$$

容易得到满足条件 $\Phi(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 的基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{\int_0^t(1-\alpha\tilde{I}(t))\mathrm{d}t} & 0\\ \Delta & e^{-ct}\end{bmatrix}.$$

上式中的 Δ 在后面没有用到，所以不必要算出来. 由模型(1)的第3和第4个方程得

$$\begin{pmatrix} x(n\tau^+)\\ y(n\tau^+)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(n\tau)\\ y(n\tau)\end{pmatrix}.$$

周期解 $(0,\tilde{I}(t))$ 的局部渐近稳定性由下列矩阵的特征值来决定.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi(\tau) = \begin{pmatrix} e^{\int_0^\tau (1-\alpha \tilde{I}(t))dt} & 0 \\ \Delta & e^{-c\tau} \end{pmatrix}.$$

因为其特征值分别是 $\lambda_1 = e^{-c\tau} < 1, \lambda_2 = e^{\int_0^\tau (1-\alpha \tilde{I}(t))dt}$，令 $|\lambda_2| < 1$，即 $e^{\int_0^\tau (1-\alpha \tilde{I}(t))dt} < 1$，亦即 $\int_0^t (1-\alpha \tilde{I}(t))dt < 0$，得 $\tau - \frac{\alpha u}{c} < 0$.

所以，由乘子理论知道，当 $\tau < \frac{\alpha u}{c}$ 时，周期解 $(0, \tilde{I}(t))$ 是局部渐近稳定的. 当 $\tau > \frac{\alpha u}{c}$ 时，$\lambda_2 > 1$，此时 $(0, \tilde{I}(t))$ 不稳定.

定理 3 当 $\tau < \frac{\alpha u}{c}$ 时，则模型(1)是全局渐近稳定的.

证明 若 $\tau < \frac{\alpha u}{c}$，则可以选择充分小的 $\varepsilon > 0$ 使得 $\rho = e^{\int_0^\tau (1-\alpha(\tilde{I}(t)-\varepsilon))dt} < 1$. 由模型(1)的第 2 个方程，我们注意到 $I'(t) \geqslant -cI(t)$. 因此考虑脉冲微分方程

$$\begin{cases} v'(t) = -cv(t), t \neq n\tau, \\ v(t^+) = v(t) + u, t = n\tau, \\ v(0^+) = I(0^+). \end{cases} \tag{4}$$

由脉冲微分方程比较定理[9]得到 $I(t) \geqslant v(t)$ 和 $v(t) \to \tilde{I}(t)$. 所以当 t 充分大时，有

$$I(t) \geqslant v(t) \geqslant \tilde{I}(t) - \varepsilon. \tag{5}$$

由(1)式及(5)式，得到

$$\begin{cases} S'(t) \leqslant S(t)[1-\alpha(\tilde{I}(t)-\varepsilon)], t \neq \tau n, \\ S(n\tau^+) = S(n\tau), t = \tau n, \end{cases}$$

$n = 1,2,3,\cdots$ 所以 $S((n+1)\tau) \leqslant S(n\tau^+) \cdot e^{\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} (1-\alpha(\tilde{I}(t)-\varepsilon))ds}$，因此 $S(n\tau) \leqslant S(0^+)\rho^n$，从而当 $n \to \infty$ 时，$S(n\tau) \to 0$. 又对任意 $n\tau < t \leqslant (n+1)\tau$ 有，$0 < S(t) \leqslant S(n\tau)e^{\tau}$，所以 $\lim\limits_{t\to\infty} S(t) = 0$.

再证明 $I(t) \to \tilde{I}(t), t \to \infty$. 假设 $0 < \varepsilon \leqslant c$，那么存在一个 $t_0 > 0$，使得对所有 $t \geqslant t_0$，有 $0 < S(t) < \varepsilon$. 于是当 $t \geqslant t_0$ 时，

$$-cI(t) \leqslant I'(t) \leqslant (-c+\varepsilon)I(t). \tag{6}$$

则 $v(t) \leqslant I(t) \leqslant Z(t)$ 和 $v(t) \to \tilde{I}(t), Z(t) \to \tilde{I}(t)$，当 $t \to \infty$. 其中 $v(t)$ 和 $Z(t)$ 分别是方程(4)与

$$\begin{cases} Z'(t) = (-c+\varepsilon)Z(t), t \neq n\tau, \\ Z(t^+) = Z(t) + u, t = n\tau, \\ Z(0^+) = I(0^+) \end{cases} \tag{7}$$

的解，$Z(t) = \frac{ue^{(-c+\varepsilon)(t-n\tau)}}{1-e^{(-c+\varepsilon)\tau}}, n\tau < t \leqslant (n+1)\tau$.

因此对于任意的 $\varepsilon_1 > 0$，存在 $t_1 > t_0$，使得当 $t > t_1$ 时，有 $v(t) - \varepsilon_1 < I(t) < Z(t) + \varepsilon_1$. 让 $\varepsilon \to 0, t \to \infty$，得到 $\tilde{I}(t) - \varepsilon_1 < I(t) < \tilde{I}(t) + \varepsilon_1$. 这表明 $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = \tilde{I}(t)$.

综上所述，$\lim\limits_{t\to\infty}(S(t), I(t)) = (0, \tilde{I}(t))$，所以 $(0, \tilde{I}(t))$ 是全局吸引的，从而是全局渐近稳定的.

定理 4 若 $\tau > \frac{\alpha u}{c}$，则模型(1)是一致持久的.

证明 设 $(S(t), I(t))$ 是模型(1)的具有正初值的任意解. 由引理 3，存在常数 $M > 0$，当 t 充分大时，有 $S(t) \leqslant M, I(t) \leqslant M$. 类似(5)式推理，对充分小的 $\varepsilon_2 > 0$，有 $I(t) \geqslant \frac{ue^{-c\tau}}{1-e^{-c\tau}} - \varepsilon_2 \triangleq m_2 > 0$. 因此，只须找到 $m_1 > 0$，当 t 足够大时，有 $S(t) \geqslant m_1$ 即可.

若 $\tau > \frac{\alpha u}{c}$，则可选择 $0 < m_3 < \frac{c}{\alpha}$ 及充分小的 $\varepsilon_2 > 0$，使得 $\delta = e^{(1-m_3-\alpha\varepsilon_2)\tau + \frac{\alpha u}{\alpha m_3 - c}} > 1$. 我们断言，对任意的 $t_1 > 0$，不可能对所有的 $t \geqslant t_1$，都有 $S(t) < m_3$. 否则存在一个 $t_1 > 0$，当 $t \geqslant t_1$ 时，有 $S(t) < m_3$. 于是由模型(1)的第 2 个方程有 $I'(t) < (\alpha m_3 - c)I(t)$. 考虑脉冲微分方程

$$\begin{cases} \varphi(t)' = (\alpha m_3 - c)\varphi(t), t \neq n\tau, \\ \varphi(t^+) = \varphi(t) + u, t = n\tau, \\ \varphi(0^+) = I(0^+), \end{cases} \tag{8}$$

则方程(8)存在一个全局渐近稳定的正周期解：

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{ue^{(\alpha m_3 - c)(t-n\tau)}}{1-e^{(\alpha m_3 - c)\tau}}, t \in (n\tau, (n+1)\tau]. \tag{9}$$

由脉冲微分系统比较定理知，存在 $t_2 > t_1$，使得当 $t \geqslant t_2$ 时，有 $I(t) \leqslant \tilde{\varphi}(t) + \varepsilon_2$. 且由模型(1)的第 1 式，有

$$S(t)' \geqslant (1 - m_3 - \alpha(\tilde{\varphi}(t) + \varepsilon_2))S(t). \tag{10}$$

设 $N_0 \in Z^+$，且 $N_0\tau > t_2$，对 $n > N_0$，(10)式在 $(n\tau, (n+1)\tau]$ 上积分，得

$$S((n+1)\tau) \geqslant S(n\tau)e^{(1-m_3-\alpha\varepsilon_2)\tau + \frac{\alpha u}{\alpha m_3 - c}} = S(n\tau)\delta. \tag{11}$$

则 $S((N_0+n)\tau) \geqslant S(N_0\tau)\delta^n \to \infty$，当 $k \to \infty$ 时. 与 $S(t)$ 有界矛盾. 所以，存在 $t_3 > t_1$，有 $S(t_3) \geqslant m_3$.

若 $t > t_3$ 时，均有 $S(t) \geqslant m_3$，则定理 4 成立. 否则，令 $t^* = \inf\{t | S(t) < m_3, t > t_3\}$，当 $t_3 \leqslant t < t^*$ 时，$S(t) \geqslant m_3$，且由 $I(t)$ 的连续性，知 $S(t^*) = m_3$. 设 $t^* \in [N_1\tau, (N_1+1)\tau), N_1 \in Z^+$. 选择 $N_2 \in Z^+$，使 $e^{(1-M-\alpha M)\tau}\delta^{N_2} > 1$. 假设对任意 $t \in [(N_1+1)\tau, (N_1+1+N_2)\tau]$ 都有 $S(t) < m_3$，且 $t \geqslant (N_1+1)\tau$ 时，显然 $I(t) \leqslant \tilde{v}(t) + \varepsilon_2$. 于是，类似(11)式的推导，得

$$S((N_1+1+N_2)\tau) \geqslant S((N_1+1)\tau)\delta^{N_2}. \tag{12}$$

又 $S'(t) \geqslant (1-M-\alpha M)S(t)$，在 $[t^*, (N_1+1)\tau]$ 上积分，得 $S((N_1+1)\tau) \geqslant S(t^*)e^{(1-M-\alpha M)\tau}$，代入(12)式得 $S((N_1+1+N_2)\tau) \geqslant S(t^*)e^{(1-M-\alpha M)\tau}\delta^{N_2} > S(t^*) = m^*$，矛盾. 所以，存在 $t_4 \in [(N_1+1)\tau, (N_1+1+N_2)\tau]$，使 $S(t_4) \geqslant m_3$. 令 $\bar{t} = \inf\{t | S(t) \geqslant m_3,$

（下转第263页 Continue on page 263）

$$\frac{n}{a_n}\sum_{i=1}^{n} a_i P(a_{i-1} < |X_1| \leqslant a_i) \to 0. \qquad (2.20)$$

由(2.16)式、(2.17)式、(2.19)式和(2.20)式可得

$$\frac{S_n}{a_n} \to 0 \text{ a.s.}.$$

(ii) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > a_n) = \infty$，则由定理1得

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{S_n - d_n}{a_n} \right| = \infty \text{ a.s.}.$$

即(2.8)式成立.

参考文献:

[1] Lehmann, E L. Some concepts of dependence[J]. Ann Math Statist, 1966, 37: 1137-1153.

[2] 吴群英. 两两 NQD 列的收敛性质[J]. 数学学报, 2002, 45(3): 617-624.

[3] 王岳宝, 苏淳, 刘许国. 关于两两 NQD 列的若干极限性质[J]. 应用数学学报, 1998, 213: 404-414.

[4] Seneta E. Regularly varying functions[C]. Berlin: Springer, Lecture Notes in Mathematics 508, 1976.

[5] Matula P A. A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables [J]. Statist Probab Lett, 1992, 15: 209-213.

[6] Chen P Y, Qi Y C. Chover's law of the iterated logarithm for weighted sums with application [J]. Sankyh¯a: The Indian Journal of Statistics, 2006, 68(1), 45-60.

[7] Stout W F. Almost sure convergence[M]. New York: Academic Press, 1974.

[8] De Haan L. On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes[M]. Amsterdam: Mathematics Centrum, 1970.

(责任编辑:尹 闯)

(上接第 255 页 Continue from page 255)

$t > t_4\}$，则 $S(\bar{t}) = m_3$，且当 $t_4 \leqslant t < \bar{t}$ 时，有 $S'(t) \geqslant (1 - \alpha M)S(t)$. 在 $[t^*, \bar{t})$ 上积分，得 $S(t) \geqslant S(t^*)e^{(1-\alpha M)(t-t^*)} \geqslant m^* e^{(1-\alpha M)(N_2+1)\tau} \triangleq m_1$. 因为 $S(\bar{t}) \geqslant m_3$，所以当 $t > \bar{t}$ 时，上述过程可重复.

综上所述，当 t 充分大时，$S(t) \geqslant m_1$. 取 $m = \min\{m_1, m_2\}$，则当 t 充分大时，有 $m \leqslant S(t) \leqslant M$，$m \leqslant I(t) \leqslant M$. 所以模型(1)是一致持久的.

3 生物意义

本文得到脉冲控制害虫的最大脉冲周期 $\tau_{\max} = \frac{au}{c}$ 及最小的病虫释放量 $u_{\min} = \frac{c\tau}{a}$. 当 $\tau < \tau_{\max}$ 或 $u > u_{\min}$ 时，系统的害虫灭绝周期解全局渐近稳定；当 $\tau > \tau_{\max}$ 或 $u < u_{\min}$ 时，系统一致持久. 在害虫防治工作中，我们可以根据实际情况选择适当的病虫释放量 u 及释放周期 τ 来达到控制害虫的目的.

参考文献:

[1] 吕鸿声. 昆虫病毒与昆虫病毒病[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[2] 洪华珠, 杨红. 杀虫微生物学纲要[M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 1997.

[3] Falcon L A. Use of bacteria for microbial control of insects[M]. New York: Academic press, 1971.

[4] Burges H D, Hussey N W. Microbial control of insects and mites[M]. New York: Academic Press, 1971: 67-95.

[5] Falcon L A. Problems associated with the use of arthropod viruses in pest control[J]. Annu Rev Entomol, 1976, 21: 305-324.

[6] 徐伟松, 钟国华, 胡美英. 昆虫病毒在害虫防治上的应用及其对寄生蜂的影响[J]. 昆虫天敌, 2001, 23(2): 70-79.

[7] Goh B S. Management and analysis of biological populations [M]. Amsterdam, Oxford, NY: Elaevier Scientific Publishing Company, 1980.

[8] Zhang Hong, Xu Weijian, Chen Lansun. A impulsive infective transmission SI model for pest control[J]. Math Meth Appl Sci, 2007, 30: 1170-1172.

[9] Lakshimikantham V, Bainov D D, Simeonov P. Theory of an impulsive differential equations[M]. Singapore: World Scientific, 1989.

[10] Bainov D, Simeonov P. Impulsive differential equations: periodic solutions and applications[M]. New York: 66 Longman Scientific Technical, 1993.

(责任编辑:尹 闯)