DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.04.009
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(4): 368－372

一类具脉冲效应和单调功能反应的时滞捕食系统的正周期解*

Positive Periodic Solution for a Class of a Delay Predator-prey System with Monotonic Functional Response and Impulsive Effect

罗芳琼,姚晓洁
LUO Fang-qiong, YAO Xiao-jie

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州 545004)
(Department of Mathematics, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545004, China)

摘要:利用重合度理论中的延拓定理,获得一类具有脉冲效应和单调功能反应的时滞捕食系统正周期解存在的充分条件,改进了相关文献的结果.
关键词:微分方程 捕食系统 脉冲效应 功能反应 周期解 重合度
中图法分类号:O175.12 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2009)04-0368-05

Abstract By using a continuation theorem based on coincidence degree theory, sufficient conditions are obtained for the existence of positive periodic solution for a class of a delay predator-prey system with monotonic functional response and impulsive effect. The results have improved and extend the related reports in the literatures.
Key words differential equation, predator-prey system, impulsive effect, monotonic functional response, periodic solutions, coincidence degree

近年来,学术界对时滞捕食系统周期解的研究已经取得许多结果[1~4].对种群生态学而言,脉冲效应是经常存在的,例如在固定的时间点人为地对系统投放或收获,这种投放和收获对系统的数量构成一种脉冲;又如许多种群的出生是季节性的,也可以把这些种群的出生看成是对系统的脉冲.因此,为了对种群系统有更精确的描述,可以考虑使用脉冲微分方程来研究其各种性态.目前对有脉冲作用的动力系统模型周期解的研究也有不少结果[5~8].文献[9]研究了时滞捕食系统

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)[a(t) - b(t)\int_{-\infty}^{t} K(t-s)\cdot \\ \qquad x_1(s)\,ds] - c(t)g(\frac{x_1(t)}{x_2(t)})x_2(t), \\ x_2'(t) = x_2(t)[-d(t) + e(t)\cdot \\ \qquad g(\frac{x_1(t-\tau(t))}{x_2(t-\tau(t))})] \end{cases} \tag{1}$$

正周期解的存在性.本文研究具有脉冲效应和时滞的捕食系统

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} & x_1'(t) = x_1(t)[a(t) - b(t)\int_{-\infty}^{t} K(t-s)\cdot \\ & \qquad x_1(s)\,ds] - c(t)g(\frac{x_1(t)}{x_2(t)})x_2(t) \\ & x_2'(t) = x_2(t)[-d(t) + e(t)\cdot \\ & \qquad g(\frac{x_1(t-\tau(t))}{x_2(t-\tau(t))})], \end{aligned}\right\}, \\ \qquad t \neq t_k, k \in N, \\ \left.\begin{aligned} & \Delta x_1(t) = x_1(t_k^+) - x_1(t_k) = b_{1k}x_1(t_k) \\ & \Delta x_2(t) = x_2(t_k^+) - x_2(t_k) = b_{2k}x_2(t_k) \end{aligned}\right\}, \\ \qquad t = t_k, k \in N. \end{cases} \tag{2}$$

周期解的存在性问题,这里 $b_{ik}x_i(t_k)$ $(i = 1, 2)$ 表示种群 $x_i(t)$ 在时刻 t_k 的脉冲增量,t_k 为脉冲点,其它参数的生态意义参见文献[9].

我们总假设:

(A_1) $a, d: R \to R$, $b, c, e, f, \tau: R \to R^+$ 都是连续 ω-周期函数;

(A_2) $b_{ik} > -1, i = 1, 2$;

收稿日期:2008-12-18
作者简介:姚晓洁(1970-),女,讲师,主要从事微分方程研究。
* 国家自然科学基金项目(10671133)资助。

(A_3) $K(s)$: $R^+ \to R^+$ 是连续函数并且 $\int_0^{+\infty} K(s)\,ds = 1$;

(A_4) 存在正整数 p,使得 $t_{k+p} = t_k + \omega$, $b_{i(k+p)} = b_{ik}$, $i = 1,2$, $x_i(t_k) = x_i(t_k^-)$,且 $\lim\limits_{t \to t_k^+} x_i(t)$ 存在.

系统(2)具有初始条件: $x_i(t) = \varphi_i(t)$, $\varphi_i(0) > 0$, $i = 1,2$. 其中 $\varphi_1(t) \in C((-\infty, 0], R^+)$, $\varphi_2(t) \in C([-\tau^*, 0], R^+)$, $R^+ = [0, +\infty)$, $\tau^* = \sup\limits_{t \in [0,\omega]} \{\tau(t)\}$.显然,当 $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0$ 时,系统(2)退化为系统(1).

重合度理论: 设 X, Z 是赋范向量空间, L: $\mathrm{Dom}L \subset X \to Z$ 为线性映射, N: $X \to Z$ 为连续映射,如果 $\dim \mathrm{Ker}L = \mathrm{codim}\,\mathrm{Im}L < +\infty$,且 $\mathrm{Im}L$ 为 Z 中的闭子集,则映射 L 称为零指标的 Fredholm 映射.如果 L 是零指标的 Fredholm 映射,且存在连续投影 P: $X \to X$ 及 Q: $Z \to Z$ 使得 $\mathrm{Im}P = \mathrm{Ker}L$, $\mathrm{Im}L = \mathrm{Ker}Q = \mathrm{Im}(I - Q)$,则 $L|_{\mathrm{Dom}L \cap \mathrm{Ker}P}$: $(I - P)X \to \mathrm{Im}L$ 可逆,设其逆映射为 K_P.设 Ω 为 X 中有界开集,如果 $QN(\bar\Omega)$ 有界且 $K_P(I - Q)N$: $\bar\Omega \to X$ 是紧的,则称 N 在 $\bar\Omega$ 上是 L-紧的. 由于 $\mathrm{Im}Q$ 与 $\mathrm{Ker}L$ 同构,因而存在同构映射 J: $\mathrm{Im}Q \to \mathrm{Ker}L$.

1 相关引理

引理 1[10] (Mawhin 延拓定理) 设 L 是指标为零的 Fredholm 映射, N 在 $\bar\Omega$ 是 L-紧的,假设:

(i) 对任意的 $\lambda \in (0,1)$,方程 $Lx = \lambda Nx$ 的解满足 $x \notin \partial\Omega$;

(ii) $QNx \neq 0$, $\forall x \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L$;

(iii) $\deg\{JQN, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\} \neq 0$.

则方程 $Lx = Nx$ 在 $\mathrm{Dom}L \cap \bar\Omega$ 内至少有一个解.

建立函数空间: $PC[J, R^2] = \{x$: $J \to R^2$,对于 $t \in J$, $t \neq t_k$ 时, $x(t)$ 在该点连续, $x(t_k^+)$, $x(t_k^-)$ 存在,且 $x(t_k^-) = x(t_k)\}$; $PC'[J, R^2] = \{x \in PC[J, R^2]$,对于 $t \in J$, $t \neq t_k$ 时, $x(t)$ 在该点连续可微, $x'(t_k^+)$, $x'(t_k^-)$ 存在,且 $x'(t_k^-) = x'(t_k)\}$.显然,对于范数

$\|x\|_{PC} = \sup\limits_{t \in J} \|x(t)\|$, $\|x\|_{PC'} = \max\{\|x\|_{PC}, \|x'\|_{PC}\}$,

$PC[J, R^2]$, $PC'[J, R^2]$ 都是 Banach 空间.

引理 2[11] $PC[J, R^2]$ 空间的函数族 H 是相对紧集,当且仅当 H 中的函数都是在 J 上一致有界,并且对于给定值 $K > 1$, H 中的函数在区间 $(t_{k-1}, t_k]$, $k = 1,2,\cdots,K$ 上等度连续.

为了方便,对连续 ω-周期函数 $f(t)$,记 $\bar f = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(t)\,dt$, $|\bar f| = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} |f(t)|\,dt$.再令

$\Delta_i = \frac{1}{\omega}\sum\limits_{k=1}^{p} \ln(1 + b_{ik})$, $|\Delta_i| = \frac{1}{\omega}\sum\limits_{k=1}^{p} |\ln(1 + b_{ik})|$, $i = 1,2$, $m = \sup\limits_{z \in [0,+\infty)} \frac{g(z)}{z} \geqslant 0$.

2 系统正周期解的存在性

定理 1 如果 $\bar a > 0$, $\bar d > 0$ 成立,且下列条件满足:

(H_1) $g(u)$ 满足 $g(0) = 0$,且 $g'(u) > 0$, $u \in [0, +\infty)$, $\lim\limits_{u \to +\infty} g(u) = W > 0$, W 是常数;

(H_2) $\bar a + \Delta_1 > m\bar c$;

(H_3) $\bar d - \Delta_2 > 0$;

(H_4) $\bar d - \Delta_2 < W\bar e$.

则系统(2)至少存在一个正 ω-周期解.

证明 对系统(2)作变换 $x_i(t) = e^{u_i(t)}$, $i = 1,2$,则系统(2)变为

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} u_1'(t) &= a(t) - b(t)\int_{-\infty}^{t} K(t - s)e^{u_1(s)}\,ds - \\ &\quad c(t)g\Big(\frac{e^{u_1(t)}}{e^{u_2(t)}}\Big)\frac{e^{u_2(t)}}{e^{u_1(t)}} \\ u_2'(t) &= -d(t) + e(t)g\Big(\frac{e^{u_1(t-\tau(t))}}{e^{u_2(t-\tau(t))}}\Big), \end{aligned}\right\}, \\ \quad t \neq t_k, k \in N, \\ \left.\begin{aligned} \Delta u_1(t) &= u_1(t_k^+) - u_1(t_k) = \ln(1 + b_{1k}) \\ \Delta u_2(t) &= u_2(t_k^+) - u_2(t_k) = \ln(1 + b_{2k}) \end{aligned}\right\}, \\ \quad t = t_k, k \in N. \end{cases} \tag{3}$$

如果系统(3)存在一个 ω-周期解 $(u_1^*, u_2^*)^{\mathrm T}$,则 $(e^{u_1^*}, e^{u_2^*})^{\mathrm T}$ 为系统(2)的一个正 ω-周期解.令 $X = \{u(t) = (u_1(t), u_2(t))^{\mathrm T} \in PC(R, R^2) \mid u(t + \omega) = u(t)\}$, $Z = X \times R^{2p}$,对于 $x \in X$,定义范数 $\|u\|_{PC} = \sup\limits_{t \in [0,\omega]} \|u(t)\|$ ($\|\cdot\|$ 是 R^2 中的一般范数定义).对于 $z \in Z$,定义范数 $\|z\|_z = \|u\|_{PC} + \|y\|$, $u \in X$, $y \in R^{2p}$ ($\|\cdot\|$ 是 R^{2p} 中一般范数定义),则 X, Z 都是 Banach 空间.

假设

$\mathrm{Dom}L = \{u(t) = (u_1(t), u_2(t))^{\mathrm T} \in X \mid (u_1(t), u_2(t))^{\mathrm T} PC'[R, R^2]\}$,

$$L: \mathrm{Dom}L \to Z, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \to \left(\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} \Delta u_1(t_k) \\ \Delta u_2(t_k) \end{pmatrix} \right\}_{k=1}^{p} \right)$$

以及 N: $X \to Z$ 满足

$$N\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} \ln(1 + b_{1k}) \\ \ln(1 + b_{2k}) \end{pmatrix} \right\}_{k=1}^{p} \right),$$

其中

$$N_1(t) = a(t) - b(t)\int_{-\infty}^{t} K(t-s)e^{u_1(s)}\mathrm{d}s - c(t)g\left(\frac{e^{u_1(t)}}{e^{u_2(t)}}\right)\frac{e^{u_2(t)}}{e^{u_1(t)}}, N_2(t) = -d(t) + e(t)g\left(\frac{e^{u_1(t-\tau(t))}}{e^{u_2(t-\tau(t))}}\right).$$

显然有

$$\mathrm{Ker}L = \left\{\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\in R^2, t\in[0,\omega]\right\},$$

$$\mathrm{Im}L = \left\{z = \left(\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix},\left\{\begin{pmatrix}a_k\\b_k\end{pmatrix}\right\}_{k=1}^{p}\right)\in Z:\begin{matrix}\int_0^\omega f_1\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{p}a_k = 0\\ \int_0^\omega f_2\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{p}b_k = 0\end{matrix}\right\}.$$

由于 $\mathrm{Im}L$ 在 Z 中是闭的,L 是一个指标为零的 Fredholm映射.易知 P和 Q是连续的投影且使得 $\mathrm{Im}P = \mathrm{Ker}L$, $\mathrm{Ker}P = \mathrm{Im}L = \mathrm{Im}(I-Q)$,其中

$$P\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}\int_0^\omega u_1(t)\mathrm{d}t\\ \int_0^\omega u_2(t)\mathrm{d}t\end{pmatrix}, x\in X;$$

$$QZ = Q\left(\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix},\left\{\begin{pmatrix}a_k\\b_k\end{pmatrix}\right\}_{k=1}^{p}\right) = \left(\frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}\int_0^\omega f_1\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{p}a_k\\ \int_0^\omega f_2\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{p}b_k\end{pmatrix},\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}_{k=1}^{p}\right).$$

从而,广义逆$(L)K_P$: $\mathrm{Im}L\to\mathrm{Ker}P\cap\mathrm{Dom}L$ 是

$$K_P z = \begin{pmatrix}\int_0^t f_1\mathrm{d}s + \sum_{t>t_k}a_k - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t f_1\mathrm{d}s\mathrm{d}t - \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}(\omega-t_k)a_k\\ \int_0^t f_2\mathrm{d}s + \sum_{t>t_k}b_k - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t f_2\mathrm{d}s\mathrm{d}t - \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}(\omega-t_k)b_k\end{pmatrix}.$$

因此

$$QN\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix}\frac{1}{\omega}\int_0^\omega N_1(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}\ln(1+b_{1k})\\ \frac{1}{\omega}\int_0^\omega N_2(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}\ln(1+b_{2k})\end{pmatrix},\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}_{k=1}^{p}\right),$$

$$K_p(I-Q)N\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\int_0^t N_1(s)\mathrm{d}s + \sum_{t>t_k}\ln(1+b_{1k})\\ \int_0^t N_2(s)\mathrm{d}s + \sum_{t>t_k}\ln(1+b_{2k})\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t N_1(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}(\omega-t_k)\ln(1+b_{1k})\\ \frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t N_2(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}(\omega-t_k)\ln(1+b_{2k})\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\left(\frac{t}{\omega}-\frac{1}{2}\right)\int_0^\omega N_1(s)\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{p}\ln(1+b_{1k})\\ \left(\frac{t}{\omega}-\frac{1}{2}\right)\int_0^\omega N_2(s)\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{p}\ln(1+b_{2k})\end{pmatrix}.$$

显然 QN 和 $K_P(I-Q)N$ 是连续的.利用引理 2和 Lebegegu收敛定理,可以证明对任意的有界集 $\Omega\subset X$,$K_P(I-Q)N(\bar{\Omega})$是紧致集,且 $QN(\bar{\Omega})$有界,从而 N在 $\bar{\Omega}$上是 L-紧的.

对算子方程 $Lu = \lambda Nu$,$u = (u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$,$\lambda\in(0,1)$,

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}u_1'(t) &= \lambda\Big[a(t) - b(t)\int_{-\infty}^{t}K(t-s)\cdot\\ &\quad e^{u_1(s)}\mathrm{d}s - c(t)g\Big(\frac{e^{u_1(t)}}{e^{u_2(t)}}\Big)\frac{e^{u_2(t)}}{e^{u_1(t)}}\Big]\\ u_2'(t) &= \lambda\Big[-d(t) + e(t)g\Big(\frac{e^{u_1(t-\tau(t))}}{e^{u_2(t-\tau(t))}}\Big)\Big]\end{aligned}\right\},\\ \quad t\neq t_k, k\in N,\\ \left.\begin{aligned}\Delta u_1(t) &= u_1(t_k^+) - u_1(t_k) = \lambda\ln(1+b_{1k})\\ \Delta u_2(t) &= u_2(t_k^+) - u_2(t_k) = \lambda\ln(1+b_{2k})\end{aligned}\right\},\\ \quad t = t_k, k\in N.\end{cases}\tag{4}$$

设 $u = (u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$是(4)式对某个$\lambda\in(0,1)$的 ω-周期解,将(4)式从 0到 ω进行积分得

$$\omega\bar{a} - \int_0^\omega b(t)\int_{-\infty}^{t}K(t-s)e^{u_1(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t - \int_0^\omega c(t)g\Big(\frac{e^{u_1(t)}}{e^{u_2(t)}}\Big)\frac{e^{u_2(t)}}{e^{u_1(t)}}\mathrm{d}t + \omega\Delta_1 = 0,\tag{5}$$

$$-\omega\bar{d} + \int_0^\omega e(t)g\Big(\frac{e^{u_1(t-\tau(t))}}{e^{u_2(t-\tau(t))}}\Big)\mathrm{d}t + \omega\Delta_2 = 0.\tag{6}$$

由(4)式和(5)式得

$$\int_0^\omega|u_1'(t)|\mathrm{d}t\leqslant(|\bar{a}| + \bar{a} + \Delta_1)\omega.\tag{7}$$

由(4)式和(6)式得

$$\int_0^\omega|u_2'(t)|\mathrm{d}t\leqslant(|\bar{d}| + \bar{d} - \Delta_2)\omega.\tag{8}$$

由于 $u = (u_1,u_2)^{\mathrm{T}}\in X$,则存在 $\xi_i,\eta_i\in[0,\omega]$,$i = 1,2$,使得

$$u_1(\xi_1) = \min_{t\in[0,\omega]}u_1(t), u_1(\eta_1) = \max_{t\in[0,\omega]}u_1(t), u_2(\xi_2) = \min_{t\in[0,\omega]}u_2(t), u_1(\eta_2) = \max_{t\in[0,\omega]}u_2(t).\tag{9}$$

由(5)式和(9)式得 $\bar{b}\omega e^{u_1(\xi_1)}\leqslant\omega(\bar{a}+\Delta_1)$,即 $u_1(\xi_1)\leqslant\ln\frac{\bar{a}+\Delta_1}{\bar{b}}$,结合(7)式得

$$u_1(t)\leqslant u_1(\xi_1) + \int_0^\omega|u_1'(t)|\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{p}|\ln(1+$$

$$b_{1k})| \leqslant \ln\frac{\bar{a}+\Delta_1}{\bar{b}} + (|\bar{a}| + \bar{a} + \Delta_1 + |\Delta_1|)\omega \triangleq B_1. \tag{10}$$

又由(5)式和(9)式得

$$\omega\bar{a} + \omega\Delta_1 = \int_0^\omega b(t)\int_{-\infty}^t K(t-s)e^{u_1(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_0^\omega c(t)g\left(\frac{e^{u_1(t)}}{e^{u_2(t)}}\right)\frac{e^{u_2(t)}}{e^{u_1(t)}}\mathrm{d}t \leqslant \bar{b}\omega e^{u_1(\xi_1)} + m\bar{c}\omega,$$

即 $u_1(\xi_1) \geqslant \ln\frac{(\bar{a}+\Delta_1)-m\bar{c}}{\bar{b}}$,结合(7)式得

$$u_1(t) \geqslant u_1(\xi_1) - \int_0^\omega |u_1'(t)|\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^p |\ln(1+b_{1k})| \geqslant \ln\frac{(\bar{a}+\Delta_1)-m\bar{c}}{\bar{b}} - (|\bar{a}| + \bar{a} + \Delta_1 + |\Delta_1|)\omega \triangleq B_2. \tag{11}$$

由(10)式和(11)式得

$$\max_{t\in[0,\omega]}|u_1(t)| \leqslant \max\{|B_1|,|B_2|\} \triangleq F_1. \tag{12}$$

由(6)式和(9)式得

$$\omega(\bar{d}-\Delta_2) \leqslant \int_0^\omega e(t)g\left(\frac{e^{B_1}}{e^{u_2(\eta_2)}}\right)\mathrm{d}t = \bar{e}g\left(\frac{e^{B_1}}{e^{u_2(\eta_2)}}\right)\omega,$$

即 $u_2(\eta_2) \leqslant \ln\left[\frac{e^{B_1}}{g^{-1}\left(\frac{\bar{d}-\Delta_2}{\bar{e}}\right)}\right]$,结合(8)式得

$$u_2(t) \leqslant u_2(\eta_2) + \int_0^\omega |u_2'(t)|\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^p |\ln(1+b_{2k})| \leqslant \ln\left[\frac{e^{B_1}}{g^{-1}\left(\frac{\bar{d}-\Delta_2}{\bar{e}}\right)}\right] + (|\bar{d}| + \bar{d} - \Delta_2 + |\Delta_2|)\omega \triangleq B_3. \tag{13}$$

又由(6)式和(9)式得

$$\omega(\bar{d}-\Delta_2) \leqslant \int_0^\omega e(t)g\left(\frac{e^{B_2}}{e^{u_2(\xi_2)}}\right)\mathrm{d}t = \bar{e}g\left(\frac{e^{B_2}}{e^{u_2(\xi_2)}}\right)\omega,$$

即 $u_2(\xi_2) \geqslant \ln\left[\frac{e^{B_2}}{g^{-1}\left(\frac{\bar{d}-\Delta_2}{\bar{e}}\right)}\right]$,结合(8)式得

$$u_2(t) \geqslant u_2(\xi_2) - \int_0^\omega |u_2'(t)|\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^p |\ln(1+b_{2k})| \geqslant \ln\left[\frac{e^{B_2}}{g^{-1}\left(\frac{\bar{d}-\Delta_2}{\bar{e}}\right)}\right] - (|\bar{d}| + \bar{d} - \Delta_2 - |\Delta_2|)\omega \triangleq B_4. \tag{14}$$

由(13)式和(14)式得

$$\max_{t\in[0,\omega]}|u_2(t)| \leqslant \max\{|B_3|,|B_4|\} \triangleq F_2. \tag{15}$$

显然 $F_i(i=1,2)$ 的选取与 λ 无关.

令 $M = F_1 + F_2 + F_3$,其中 F_3 充分大使得代数方程组

$$\begin{cases} \bar{a} - \bar{b}e^{u_1} - \bar{c}g\left(\frac{e^{u_1}}{e^{u_2}}\right)e^{u_2-u_1} + \Delta_1 = 0, \\ -\bar{d} + \bar{e}g\left(\frac{e^{u_1}}{e^{u_2}}\right) + \Delta_2 = 0 \end{cases} \tag{16}$$

的解 $(u_1^*,u_2^*)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\|(u_1^*,u_2^*)^{\mathrm{T}}\| < F_3$,于是系统(16)的任意解 $x=(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}\in X$ 满足 $\|x\|<M$.令 $\Omega=\{x=(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}\in X: \|u\|<M\}$,则 Ω 满足引理1的条件(i),并且当 $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L=\partial\Omega\cap R^2$ 时,有 $QNu\neq 0$.定义

$$J: \mathrm{Im}Q \to \mathrm{Ker}L, \left(\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}_{k=1}^p\right) \to \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

那么

$$JQN = \begin{pmatrix} \bar{a} - \bar{b}e^{u_1} - \bar{c}g\left(\frac{e^{u_1}}{e^{u_2}}\right)e^{u_2-u_1} + \Delta_1 \\ -\bar{d} + \bar{e}g\left(\frac{e^{u_1}}{e^{u_2}}\right) + \Delta_2 \end{pmatrix}.$$

定义 $H: \mathrm{Dom}L\times[0,1] \to X$,

$$H(u_1,u_2,\mu) = \begin{pmatrix} \bar{a} - \bar{b}e^{u_1} + \Delta_1 \\ -\bar{d} + \bar{e}g\left(\frac{e^{u_1}}{e^{u_2}}\right) + \Delta_2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -\bar{c}g\left(\frac{e^{u_1}}{e^{u_2}}\right)e^{u_2-u_1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\mu\in[0,1]$ 是一个参数.当 $(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$ 时,$(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$ 是 R^2 中的常数向量且满足 $\|(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}\|=M$,于是当 $(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$ 时,必有 $H(u_1,u_2,\mu)\neq 0$.如果这一结论不成立,即满足 $\|(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}\|=M$ 中常数向量 $(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$ 有 $H(u_1,u_2,\mu)=0$,则由方程组

$$\begin{cases} \bar{a} - \bar{b}e^{u_1} - \bar{c}g\left(\frac{e^{u_1}}{e^{u_2}}\right)e^{u_2-u_1} + \Delta_1 = 0, \\ -\bar{d} + \bar{e}g\left(\frac{e^{u_1}}{e^{u_2}}\right) + \Delta_2 = 0, \end{cases}$$

可知 $|u_i|<F_i, i=1,2$,所以 $\|(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}\|<M$,矛盾.利用拓扑度的性质,可得

$\deg\{JQN(u_1,u_2)^{\mathrm{T}},\Omega\cap\mathrm{Ker}L,(0,0)^{\mathrm{T}}\} = \deg\{H(u_1,u_2,1)^{\mathrm{T}},\Omega\cap\mathrm{Ker}L,(0,0)^{\mathrm{T}}\} = \deg\{H(u_1,u_2,0)^{\mathrm{T}},\Omega\cap\mathrm{Ker}L,(0,0)^{\mathrm{T}}\} = \deg\{(\bar{a}-\bar{b}e^{u_1}+\Delta_1, -\bar{d}+\bar{e}g\left(\frac{e^{u_1}}{e^{u_3}}\right)+\Delta_2),\Omega\cap\mathrm{Ker}L,(0,0)^{\mathrm{T}}\}$.

显然,在定理1的条件下代数方程组

$$\begin{cases} \bar{a} - \bar{b}e^{u_1} + \Delta_1 = 0, \\ -\bar{d} + \bar{e}g\left(\frac{e^{u_1}}{e^{u_2}}\right) + \Delta_2 = 0 \end{cases}$$

有唯一解 $u^* = (u_1^*,u_2^*)^{\mathrm{T}} = \left(\ln\left(\frac{\bar{a}+\Delta_1}{\bar{b}}\right), \ln\frac{\bar{d}-\Delta_2}{\bar{b}g^{-1}\left(\frac{\bar{d}-\Delta_2}{\bar{e}}\right)}\right)^{\mathrm{T}}$.于是计算可得

$\deg\{JQN(u_1,u_2)^{\mathrm{T}},\Omega\cap\mathrm{Ker}L,(0,0)^{\mathrm{T}}\} = \deg\{(\bar{a}-\bar{b}e^{u_1}+\Delta_1, -\bar{d}+\bar{e}g\left(\frac{e^{u_1}}{e^{u_2}}\right)+\Delta_2),\Omega\cap\mathrm{Ker}L,(0,0)^{\mathrm{T}}\}\neq 0$.

从而根据引理1知,系统(3)至少存在一个 ω-周期解 $(u_1^*(t),u_2^*(t))^{\mathrm{T}}$,因此 $(e^{u_1^*(t)},e^{u_2^*(t)})^{\mathrm{T}}$ 是系统(2)的正

k-周期解.

推论 **1** 如果下列条件成立:

(H_1) $g(u)$满足 $g(0)=0$,且 $g'(u)>0, u\in[0,+\infty)$, $\lim_{u\to+\infty} g(u)=W>0$, W是常数;

(H_2^*) $\bar{a}>m\bar{c}$;

(H_4^*) $0<\bar{d}<W\bar{e}$.

则系统(1)至少存在一个正 k-周期解.

注 与文献[9]的第一个结论相比,推论 1不要求 $a,d: R\to R^+$.

3 例证

例 **1** 考虑 k-周期系统

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l} x_1'(t)=x_1(t)[a(t)-b(t)\int_{-\infty}^{t}K(t-\\ \quad s)x_1(s)ds]-\dfrac{c(t)x_1(t)x_2(t)}{nx_2(t)+x_1(t)} \\ x_2'(t)=x_2(t)[-d(t)+ \\ \quad \dfrac{e(t)x_1(t-f(t))}{nx_2(t-f(t))+x_1(t-f(t))}], \end{array}\right\}, \\ \quad t\neq t_k, k\in N, \\ \left.\begin{array}{l}\Delta x_1(t)=x_1(t_k^+)-x_1(t_k)=b_{1k}x_1(t_k) \\ \Delta x_2(t)=x_2(t_k^+)-x_2(t_k)=b_{2k}x_2(t_k)\end{array}\right\}, \\ \quad t=t_k, k\in N.\end{cases} \qquad (17)$$

这里 $n>0$为常数,其它参数与系统(2)相同.显然 $g(u)=\dfrac{u}{n+u}$满足条件(H_1),于是由定理 1可得:如果条件 $n(\bar{a}+\Delta_1)>\bar{c}$和 $0<\bar{d}-\Delta_2<\bar{e}$成立,则系统(17)至少存在一个正 k-周期解.

例 **2** 考虑 k-周期系统

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l} x_1'(t)=x_1(t)[a(t)-b(t)\int_{-\infty}^{t}K(t-\\ \quad s)x_1(s)ds]-\dfrac{c(t)x_1^T(t)y(t)}{n^T x_2^T(t)+x_1^T(t)} \\ x_2'(t)=x_2(t)[-d(t)+ \\ \quad \dfrac{e(t)x_1^T(t-f(t))}{n^T x_2^T(t-f(t))+x_1^T(t-f(t))}], \end{array}\right\}, \\ \quad t\neq t_k, k\in N, \\ \left.\begin{array}{l}\Delta x_1(t)=x_1(t_k^+)-x_1(t_k)=b_{1k}x_1(t_k) \\ \Delta x_2(t)=x_2(t_k^+)-x_2(t_k)=b_{2k}x_2(t_k)\end{array}\right\}, \\ \quad t=t_k, k\in N.\end{cases} \qquad (18)$$

这里 $n>0$, $T\geqslant 2$为常数,其它参数与系统(2)相同.显然 $g(u)=\dfrac{u^T}{n^T+u^T}$, $T\geqslant 2$满足条件(H),于是由定理 1可得:如果条件 $nT(\bar{a}+\Delta_1)>(T-1)^{\frac{T-1}{T}}\bar{c}$和 $0<\bar{d}-\Delta_2<\bar{e}$成立,则系统(18)至少存在一个正 k-周期解.

例 **3** 考虑 k-周期系统

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l} x_1'(t)=x_1(t)[a(t)-b(t)\int_{-\infty}^{t}K(t-s)x_1(s)ds]- \\ \quad \dfrac{c(t)x_1^2(t)x_2(t)}{n^2x_2^2(t)+px_1(t)x_2(t)+x_1^2(t)} \\ x_2'(t)=x_2(t)\{-d(t)+[e(t)x_1^2(t-f(t))]/ \\ \quad [n^2x_2^2(t-f(t))+px_1(t-f(t))x_2(t-f(t))+ \\ \quad x_1^2(t-f(t))]\}, \end{array}\right\}, t\neq t_k, k\in N, \\ \left.\begin{array}{l}\Delta x_1(t)=x_1(t_k^+)-x_1(t_k)=b_{1k}x_1(t_k) \\ \Delta x_2(t)=x_2(t_k^+)-x_2(t_k)=b_{2k}x_2(t_k)\end{array}\right\}, \\ \quad t=t_k, k\in N.\end{cases} \qquad (19)$$

这里 $n>0, p>0$为常数,其它参数与系统(2)相同.显然 $g(u)=\dfrac{u^2}{n^2+pu+u^2}$满足条件($H_1$),于是由定理 1可得:如果条件 $(\bar{a}+\Delta_1)(2n+p)>\bar{c}$和 $0<\bar{d}-\Delta_2<\bar{e}$成立,则系统(19)至少存在一个正 k-周期解.

参考文献:

[1] 范猛,王克.具有偏差变元的捕食者-食饵系统全局周期解的存在性[J].应用数学学报, 2000, 23(4): 557-561.

[2] 范猛,王克.具有 HollingII 型功能反应的捕食者-食饵系统全局周期解的存在性[J].数学物理学报, 2001, 21A(4): 492-497.

[3] 高建国.具有时滞和基于比率的一类捕食者-食饵系统全局周期解的存在性[J].生物数学学报, 2005, 20(3): 315-320.

[4] 董士杰,葛渭高.具时滞和基于比率的两种群捕食-食饵系统的周期解[J].应用数学学报, 2004, 27(1): 132-141.

[5] 谭德君.具有脉冲和功能反应的扩散时滞竞争系统正周期解的存在性[J].生物数学学报, 2005, 20(4): 414-423.

[6] 贾建文,安莹.具有脉冲效应非自治捕食系统的研究[J].数学的实践与认识, 2007, 37(20): 141-149.

[7] 张伟鹏,朱德明.脉冲非自治比率依赖型捕食者-食饵系统的周期解[J].华东师范大学学报:自然科学版, 2007(1): 27-35.

[8] 陈福来,文贤章.具有脉冲和时滞的 Lotka-Volterra系统的正周期解的存在性和全局渐近稳定性[J].生物数学学报, 2004, 19(3): 280-288.

[9] Fan Y, Li W, Wang L. Periodic solutions of delayed ratio-dependent predator-prey models with monotonic or nomonotonic functional responses[J]. Nonlinear Anal Real Word Appl, 2004(5): 247-263.

[10] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equation [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[11] Liu X S, Li G, Luo G L. Positive periodic solution for a two-species ratio-dependent predator-prey system with time delay and impulse[J]. J Math Anal Appl, 2007, 325(1): 715-723.

(责任编辑:尹 闯)