DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.04.012
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(4): 381-384

广义统一代数 Lyapunov方程的亚正定解*

The Subpositive Definite Solution of the Generalized Unified Algebraic Lyapunov Equation

于 丽,王建丽,黄敬频
YU Li, WANG Jian-li, HUANG Jing-pin

(广西民族大学数学与计算机科学学院,广西南宁 530006)
(College of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要:给出基于 Delta算子的广义统一代数 Lyapunov 方程(GUALE)具有亚正定解的必要和充分条件,建立求解 GUALE亚正定解的迭代算法并用数值算例验其有效性.该算法收敛而且所得的算例结果与理论值相符.

关键词:广义统一代数 Lyapunov方程 亚正定解 采样周期 选取方法
中图法分类号: O151.21 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)04-0381-04

Abstract The necessary and sufficient conditions of the sub positive-definite solution to the generalized unified algebraic Lyapunov equation based on Delta operator are given, the iterative algorithms for computing the sub positive-definite solution to the GUALE is established and we use numerical example to show the results. The algorithms is convergent and the results is corresponding to the theoretical values.

Key words generalized unified algebraic, Lyapunov equation, subpositive definite solution, sampling period, selection method

实对称阵与实对称正定阵的广泛应用促使人们思考怎样将非对称阵加以"对称化",以解决与原矩阵相关的实际问题. 1985年, Johnson[1]首先给出亚正定矩阵的定义. 1990年以来,屠伯埙等[2,3]人对亚正定阵理论作过深入研究,取得了许多成果.但是,关于矩阵方程的亚正定解方面的研究报道却很少.

对于矩阵 $Q\in R^{n\times n}$ 的一种分解: $Q=R(Q)+S(Q)$,其中 $R(Q)=\frac{1}{2}(Q+Q^{T})$, $S(Q)=\frac{1}{2}(Q-Q^{T})$,如果 $R(Q)$ 对称正定,则称 Q亚正定.全体亚正定阵集合记作 SP_n.显然,$Q\in SP_n\Leftrightarrow\forall\, 0\neq x\in R^n$, $x^{T}Qx>0$.

本文考虑基于 Delta算子的广义统一代数 Lyapunov方程(GUALE)

$$A^{T}X+XA+\theta A^{T}XA=-Q \tag{1}$$

的亚正定解问题.这里,$A,X,Q\in R^{n\times n}$,Q亚正定,$\theta>0$为采样周期,且 A的特征值位于稳定区域 $|\lambda_i(A)+\frac{1}{\theta}|=\frac{1}{\theta}$内.

Lyapunov方程在稳定性理论、最优控制、实现理论及逼近性问题等方面有着重要作用[4].文献[5]给出了 UALE正定解的平均值、特征值以及行列式的上界和下界的估计公式.文献[6]给出了 UALE正定解矩阵的上下界估计.

我们从直接求解 GUALE(1)的角度,研究方程(1)存在亚正定解的一些必要和充分条件,并给出其亚正定解的迭代算法.用 $\lambda_i(A)$表示 $A\in R^{n\times n}$的第 i个特征值.若 A为实对称矩阵,设特征值按递减次序排列,即 $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$; $\sigma(A)$表示 A的谱; $\mathrm{Re}\lambda$表示 λ 的实部;$\otimes$表示矩阵的 Kronecker积.

1 GUALE亚正定解存在条件

记 $P=\frac{1}{2}(Q+Q^{T})$,为讨论方便,我们构造一个统一代数 Lyapunov方程(UALE)

$$A^{T}Y+YA+\theta A^{T}YA=-P, \tag{2}$$

收稿日期: 2008-10-30
作者简介: 于 丽(1981-),女,硕士研究生,主要从事偏微分方程的函数论方法研究。
* 广西自然科学基金项目(桂科自 0832083)资助。

这里 $A\in R^{n\times n}$, $P>0$.

定理 1 矩阵方程(1)或(2)存在唯一解的充要条件是
$$\theta\neq -\frac{\lambda_i(A)+\lambda_j(A)}{\lambda_i(A)\lambda_j(A)}, i,j=1,2,\cdots,n.$$

证明 利用方程(1)的等价形式: $(I-(\theta A+I)^{\mathrm{T}}\otimes(\theta A+I)^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}(X)=\theta\mathrm{vec}(Q)$, 以及
$$\det(I-(\theta A+I)^{\mathrm{T}}\otimes(\theta A+I)^{\mathrm{T}})\neq 0\Leftrightarrow\lambda_i(\theta A+I)\lambda_j(\theta A+I)=[\theta\lambda_i(A)+1][\theta\lambda_j(A)+1]\neq 1,$$
立即可得定理1成立. 显然, 当 $\mathrm{d}(\theta A+I)<1$ 时, 方程(1)存在唯一解.

定理 2 GUALE存在唯一亚正定解 $X\Leftrightarrow$ 矩阵方程(2)存在唯一对称正定解 Y.

证明 必要性. 如果GUALE存在唯一亚正定解 X, 则对方程(1)两边取转置, 再与方程(1)相加, 整理得
$$A^{\mathrm{T}}(\frac{X+X^{\mathrm{T}}}{2})+(\frac{X+X^{\mathrm{T}}}{2})A+\theta A^{\mathrm{T}}(\frac{X+X^{\mathrm{T}}}{2})A=-(\frac{Q+Q^{\mathrm{T}}}{2}).$$
显然, $Y=\frac{1}{2}(X+X^{\mathrm{T}})$ 是方程(2)的对称正定解.

充分性. 如果方程(2)存在唯一对称正定解 Y, 则由定理1知, 方程(1)存在唯一解 X. 这时 $2\times(2)-(1)$, 得
$$A^{\mathrm{T}}(2Y-X)+(2Y-X)A+\theta A^{\mathrm{T}}(2Y-X)A=-Q^{\mathrm{T}}. \qquad (3)$$
设 $\tilde{X}=2Y-X$, 则等式(3)满足 $A^{\mathrm{T}}\tilde{X}+\tilde{X}A+\theta A^{\mathrm{T}}\tilde{X}A=-Q^{\mathrm{T}}$, 即
$$A^{\mathrm{T}}\tilde{X}^{\mathrm{T}}+\tilde{X}^{\mathrm{T}}A+\theta A^{\mathrm{T}}\tilde{X}^{\mathrm{T}}A=-Q. \qquad (4)$$
对比方程(1)和方程(4)可知, $\tilde{X}^{\mathrm{T}}=X$, 因此, $Y=\frac{1}{2}(X+X^{\mathrm{T}})\Rightarrow X\in SP_n$.

定理 3 GUALE存在亚正定解的必要条件为 $\mathrm{Re}\,e(A)<0$.

证明 若方程(1)存在亚正定解 X, 则 $(Q+\theta A^{\mathrm{T}}XA)\in SP_n$, 于是 $-(A^{\mathrm{T}}X+XA)\in SP_n$. 设 A 的任意特征值 $\lambda(A)$ 对应的特征向量为 x, 则 $Ax=\lambda(A)x$. 因此
$$x^*(A^{\mathrm{T}}X+XA)x=(Ax)^*Xx+x^*X(Ax)=\overline{\lambda(A)}x^*Xx+\lambda(A)x^*Xx=2\mathrm{Re}(\lambda(A))x^*Xx<0,$$
从而 $\mathrm{Re}\lambda(A)<0$.

定理 4 在方程(1)中, 设 $\theta A^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}+A<0$, 其中正实数
$$\theta\neq -\frac{\lambda_i(A)+\lambda_j(A)}{\lambda_i(A)\lambda_j(A)}, i,j=1,2,\cdots,n,$$
则方程(1)存在唯一亚正定解 X, 且 $0<R(X)\leqslant \mathrm{T}I$, 这里 $\mathrm{T}=-\frac{\mathrm{d}(Q+Q^{\mathrm{T}})}{\lambda_1(\theta A^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}+A)}$.

证明 由于
$$\theta\neq -\frac{\lambda_i(A)+\lambda_j(A)}{\lambda_i(A)\lambda_j(A)}, i,j=1,2,\cdots,n,$$
因此, 由定理1知, 方程(1)存在唯一解 X.

再证明方程(2)存在唯一对称正定解 Y. 由于方程(2)可以等价地写成 $Y=(\theta A+I)^{\mathrm{T}}Y(\theta A+I)+\theta P$, 记 $f(Y)=(\theta A+I)^{\mathrm{T}}Y(\theta A+I)+\theta P$.

定义对称正定矩阵集合 $\mathrm{K}=\{Y: 0\leqslant Y\leqslant \mathrm{T}I, \mathrm{T}>0\}$. 易知, K是一个紧凸集. 由于 $\mathrm{T}(\theta A^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}+A)+P$, $\theta A^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}+A$ 为实对称矩阵, $P>0$, 因此由特征值不等式有
$$\lambda_1[\mathrm{T}(\theta A^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}+A)+P]\leqslant \mathrm{T}\lambda_1(\theta A^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}+A)+\lambda_1(P)=-\frac{\mathrm{d}(Q+Q^{\mathrm{T}})}{\lambda_1(\theta A^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}+A)}\lambda_1(\theta A^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}+A)+\frac{1}{2}\mathrm{d}(Q+Q^{\mathrm{T}})<0.$$
于是, $\mathrm{T}(\theta A^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}+A)+P<0$. 故对 $\forall Y\in\mathrm{K}$, 有
$$0<f(Y)\leqslant \mathrm{T}(\theta A+I)^{\mathrm{T}}(\theta A+I)+\theta P=\theta[\mathrm{T}(\theta A^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}+A)+P]+\mathrm{T}I\leqslant \mathrm{T}I,$$
从而 $f(\mathrm{K})\subset\mathrm{K}$. 因此 $f(Y)$ 在K上必存在不动点 Y, 即方程(2)存在对称正定解 Y, 且 $0<Y\leqslant \mathrm{T}I$. 根据定理2知, 方程(1)存在唯一亚正定解 X, 且 $0<R(X)\leqslant \mathrm{T}I$.

推论 1 若 $\|\theta A+I\|_2<1$, 则方程(1)存在唯一亚正定解 X, 且 $0<R(X)\leqslant \mathrm{T}I$,
$$\mathrm{T}=-\frac{\mathrm{d}(Q+Q^{\mathrm{T}})}{\lambda_1(\theta A^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}+A)}.$$

证明 当 $\|\theta A+I\|_2<1$ 时, 由
$$[\mathrm{d}(\theta A+I)]^2\leqslant\|\theta A+I\|_2^2=\lambda_1[(\theta A+I)^{\mathrm{T}}(\theta A+I)]=\theta\lambda_1(\theta A^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}+A)+1<1\Rightarrow\lambda_1(\theta A^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}+A)<0\Rightarrow\theta A^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}+A<0,$$
因此, 由定理4及 $\mathrm{d}(\theta A+I)\leqslant\|\theta A+I\|_2<1$, 即知推论1成立.

2 GUALE亚正定解的迭代算法

利用方程(1)的等价形式: $X-(\theta A+I)^{\mathrm{T}}X(\theta A+I)=\theta Q$, 构造迭代
$$\begin{cases}X^{(k+1)}=(\theta A+I)^{\mathrm{T}}X^{(k)}(\theta A+I)+\theta Q\\ X^{(0)}=\theta Q\end{cases}, k=0,1,2,\cdots \qquad (5)$$
由文献[7]知, 迭代(5)收敛$\Leftrightarrow\mathrm{d}(\theta A+I)<1$. 于是,

由推论 1可得

定理 5 设 $\|\theta A+I\|_2 < 1$,则由迭代(5)产生的序列 $\{X^{(n)}\}$ 收敛到方程(1)的唯一亚正定解 X,且 $0 < R(X) \leqslant \tau I$,其中 $\tau = -\dfrac{d(Q+Q^{\mathrm{T}})}{\lambda_1(\theta A^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}} + A)}$.

注 $d(\theta A+I) < 1$ 只保证迭代(5)收敛到方程(1)的唯一解.由定理 5可知,$\|\theta A+I\|_2 < 1$ 就能保证迭代(5)收敛到方程(1)的唯一亚正定解.

定理 6 设矩阵 A 的特征值均具有负实部,即 $\mathrm{Re}\,e(A) < 0$.

(1)当 $\Delta = [\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A)]^2 - 4\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A) < 0$ 时,选取 $\theta \in \left(0, \dfrac{-\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A)}{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}\right)$;

(2)当 $\Delta = [\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A)]^2 - 4\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A) \geqslant 0$ 时,选取

$$\theta \in \left(\frac{-\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A)+\sqrt{\Delta}}{2\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}, \frac{-\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A)}{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}\right);$$

则 $\|\theta A+I\|_2 < 1$,从而由迭代(5)产生的序列 $\{X^{(n)}\}$ 收敛到方程(1)的唯一亚正定解 X.

证明 因为

$\|\theta A + I\|_2^2 = \lambda_{\max}[(\theta A + I)^{\mathrm{T}}(\theta A + I)] = \lambda_{\max}[\theta^2 A^{\mathrm{T}}A + \theta(A^{\mathrm{T}} + A) + I] \leqslant \theta^2\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A) + \theta\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}} + A) + 1$.

(1)当 $\Delta = [\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A)]^2 - 4\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A) < 0$ 时,由于 $\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A) > 0$,因此,由二次曲线性质知,$\forall\theta > 0$, $\theta^2\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A) + \theta\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A) + 1 > 0$,又由

$$\theta^2\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A) + \theta\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A) + 1 < 1 \Rightarrow \theta < \frac{-\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A)}{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)},$$

这里,$A^{\mathrm{T}}+A < 0$(见推论 1的证明).所以,当选取 $\theta \in \left(0, \dfrac{-\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A)}{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}\right)$ 时,$\|\theta A+I\|_2 < 1$.根据定理 5,由迭代(5)产生的序列 $\{X^{(n)}\}$ 收敛到方程(1)的唯一亚正定解 X.

(2)当 $\Delta = [\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A)]^2 - 4\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A) \geqslant 0$ 时,由于

$$\theta^2\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A) + \theta\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A) + 1 > 0 \Rightarrow \theta > \frac{-\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A)+\sqrt{\Delta}}{2\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)},$$

$$\theta^2\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A) + \theta\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A) + 1 < 1 \Rightarrow \theta < \frac{-\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A)}{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)},$$

所以,当选取 $\theta \in \left(\dfrac{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A)+\sqrt{\Delta}}{2\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}, \dfrac{-\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A)}{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}\right)$ 时,$\|\theta A+I\|_2 < 1$,因此,由迭代(5)产生的序列 $\{X^{(n)}\}$ 收敛到方程(1)的唯一亚正定解 X.

根据上述结果,可得求解方程(1)亚正定解的一种算法.

算法:

步骤 1 根据推论 1,判断方程(1)亚正定解的存在性;

步骤 2 若方程(1)存在亚正定解,则按迭代(5)进行迭代;

步骤 3 判断是否 $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon$(精度要求),若满足则取 $X^* \approx X^{(k+1)}$;否则重复步骤 2.

3 数值算例

考虑 GUALE的亚正定解,其中矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -2.8 & -0.1 & & & \\ -0.3 & -2.8 & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & -0.1 \\ & & & -0.3 & -2.8 \end{bmatrix}_{n\times n},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & -0.1 & & & \\ -0.4 & 0.6 & & \cdots & & \\ -0.3 & & & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & & -0.1 \\ & & & \cdots & 0.6 & 0.2 \\ & & & -0.3 & -0.4 & 0.6 \end{bmatrix}_{n\times n},$$

$n \geqslant 10$.

选取适当的采样周期 θ,使迭代(5)收敛到该方程的亚正定解 X^*.

解 当 $n \geqslant 10$ 时,直接计算可知,$\lambda_{\max}(R(Q)) \approx 0.97$,$\lambda_{\min}(R(Q)) \approx 0.06$,所以 $Q \in SP_n$.易知,$\mathrm{Re}\,e(A) < 0$.因此,若能选取适当的采样周期 θ,使 $\|\theta A+I\|_2 < 1$,则由定理 5可知,由迭代(5)产生的序列 $\{X^{(n)}\}$ 收敛到方程(1)的唯一亚正定解 X.

给出 $n=10$ 的结果.这时,$\Delta = [\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A)]^2 - 4\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A) = -17.2047 < 0$,根据定理 6,当 $\theta \in \left(0, \dfrac{-\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}+A)}{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}\right) = (0, 0.4766)$ 时,$\|\theta A+I\|_2 < 1$.选取 $\theta = 0.4$,迭代得

$X^* \approx$

$$\begin{bmatrix} 0.2460 & 0.0859 & -0.0383 & -0.0003 & -0.0002 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.1613 & 0.2452 & 0.0858 & -0.0383 & -0.0003 & -0.0002 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.1256 & -0.1622 & 0.2452 & 0.0858 & -0.0383 & -0.0003 & -0.0002 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0033 & -0.1258 & -0.1622 & 0.2452 & 0.0858 & -0.0383 & -0.0003 & -0.0002 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0007 & -0.0033 & -0.1258 & -0.1622 & 0.2452 & 0.0858 & -0.0383 & -0.0003 & -0.0002 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0007 & -0.0033 & -0.1258 & -0.1622 & 0.2452 & 0.0858 & -0.0383 & -0.0003 & -0.0002 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0007 & -0.0033 & -0.1258 & -0.1622 & 0.2452 & 0.0858 & -0.0383 & -0.0003 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0007 & -0.0033 & -0.1258 & -0.1622 & 0.2452 & 0.0858 & -0.0378 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0007 & -0.0033 & -0.1258 & -0.1622 & 0.2452 & 0.0851 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0007 & -0.0032 & -0.1239 & -0.1580 & 0.2435 \end{bmatrix},$$

表 1 **GUALE的亚正定解误差与采样周期的关系 (迭代次数 $k=25$)**

Table 1 GUALE sub-definite solution of the relationship between errors and the sampling period (number of iterations $k=25$)

采样周期 Sampling period	$n=10$			$n=100$		$n=500$	
	$\Vert\theta A+I\Vert_2$	Error	Time(s)	Error	Time(s)	Error	Time(s)
$\theta=0.1$	0.7584	5.3236e-008	0.0216	5.4604e-008	0.0990	5.4604e-008	9.3091
$\theta=0.4$	0.2743	0	0.0256	3.1342e-031	0.0979	3.1342e-031	9.3272
$\theta=0.47$	0.4970	8.1460e-017	0.0228	1.2077e-016	0.1163	1.2077e-016	9.3123

计算出 $\lambda_{\min}(R(X^*))=0.0276>0, \lambda_{\max}(R(X^*))=0.3933$. 因此, X^* 是所给统一代数 Lyapunov 矩阵方程的一个 10阶亚正定解,且 $0<R(X^*)\leqslant 0.8370I$. 这与本文的理论结果相符合.

表 1结果显示,不同的采样周期 θ 对迭代 (5) 的收敛性影响较大. 就本文算例而言,当选择 θ 在 0.4附近时的解具有较高精度.

参考文献:

[1] Johnson C R. Matrix analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1985.

[2] 屠伯埙. 亚正定阵理论 (I) [J]. 数学学报, 1990, 33(4): 462-471.

[3] 屠伯埙. 亚正定阵理论 (II) [J]. 数学学报, 1991, 34(1): 991-1002.

[4] Zoran Gajic. Lyapunov matrix equation in system stability and control[M]. San Diego: Rutgers University Academic Press, San Diego, CA, 1995.

[5] 邵锡军, 杨成梧. Delta域 Lyapunov 矩阵方程解的研究 [J]. 南京理工大学学报, 1999, 23(3): 193-196.

[6] 张端金, 杨苹, 吴捷. 基于 Delta算子的统一代数 Lyapunov方程解的上下界 [J]. 控制理论与应用, 2004, 21(1): 94-97.

[7] 张凯院, 徐仲. 数值代数 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2000.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 380页 Continue from page 380)

用文献 [4, 5]中的定理并不能判定例 2是否正规,而用定理 1就能判定,所以定理 1推广了文献 [4, 5]中的相关结论.

参考文献:

[1] Schiff J. Normal families [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[2] Gu Y X, Pang X C, Fang M L. Normal families and it's application[M]. Beijing: Science Press, 2007.

[3] Rosenbloom PC. The fix-poionts of entire functions [J]. Comm Sem Math Univ Lund [Medd. Lunds Univ Mat Sem], 1952, 186-192.

[4] Fang M L, Yuan W J. On Rosenbloom's fix-points theorem and related results[J]. J Austral Math Soc: Series A, 2000, 68: 321-333.

[5] Fang M L, Yuan W J. On the normality for families of meromorphic functions[J]. Indian J Math, 2001, 43: 341-351.

[6] Zalcman L. Normal families: New perspectives[J]. Bull Amer Math Soc, 1998, 35: 215-230.

[7] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

(责任编辑: 尹 闯)