DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.04.001
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(4): 392~396, 399

二阶奇异摄动问题的高阶有限体积法*

High Order Finite Volume Methods for the Second Order Singular Perturbation Problems

何崇南
HE Chong-nan

(广西民族大学数学与计算机科学学院,广西南宁 530006)
(College of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要: 建立一种奇异摄动两点边值问题数值求解的高阶 Hermite型有限体积法,给出该体积法的 1个简单的计算格式,在较弱的条件下得到最佳阶的一致收敛性估计,并用数值实验验证该有限体积法的合理性和方法的有效性.结果表明,有限体积法和 Galerkin方法几乎具有相同精度,最优收敛阶的实际值与理论值很接近.

关键词: 奇异摄动问题 有限体积法 最优网格
中图法分类号: O241.82 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)04-0392-05

Abstract A high order finite volume method of the Hermite type is established for solving the second order singular perturbation problems. A simple computing scheme of finite volume method is presented. The optimal order of uniform convergence is obtained under a much weaker condition than coercivity assumption. Numerical experiments are presented to verify our theoretical estimates. It shows that finite volume method and Galerkin method have nearly the same accuracy and the optimal order of uniform convergence calculated from the numerical errors is very closed to theoretical value.

Key words singular perturbation problems, finite volume method, optimal meshes

奇异摄动问题的数值解法在计算数学界一直受到关注.由于解的边界层效应,我们很难得到最佳阶的一致收敛计算格式.为此人们提出了各种数值方法[1~10]来解决此类问题,其中包括各种有限差分法和有限元法以及各种特殊的网格剖分.最近,Liu等[11]针对高阶椭圆奇异摄动两点边值问题提出一种最优的 Galerkin方法.他们给出一个简单的网格剖分充分条件(满足这样条件的网格称为最优网格),并构造一个最优网格,证明在最优网格下用 Hermite样条可以获得最佳阶一致收敛的数值解.

本文建立一种奇异摄动两点边值问题数值求解的高阶 Hermite型最优有限体积法,借助于最优网格,给出一个简单的计算格式,在相当弱的条件下得到最佳阶的一致收敛性估计.数值实验验证了理论的合理性和方法的有效性,通过比较也可以看出,有限体积法和 Galerkin方法几乎具有同样的精度.

1 基于 Hermite三次元的有限体积法

设 $I=(0,1)$, $L^2(I)$ 表示区间 I上的实值平方可积函数空间,其相应的内积和范数分别是 $(\cdot,\cdot)$和 $\|\cdot\|$. $L^\infty(I)$ 表示区间 I上的实值本性有界可测函数空间,范数为 $\|\cdot\|_\infty$. $H^1(I)$和 $W^{1,\infty}(I)$表示区间 I上的 Sobolev空间,内积为 $(\cdot,\cdot)$,范数分别为 $\|\cdot\|_1$和 $\|\cdot\|_{1,\infty}$,半范数用 $|\cdot|_1$表示. $C_0^\infty(I)$表示区间 I上的有紧支集的无穷次可微的线性函数空间. $H_0^1(I)$是 $C_0^\infty(I)$的闭包(按照范数 $\|\cdot\|_1$).

设 $q(x)\in L^2(I)$, $f\in L^2(I)$, $\varepsilon\in(0,1]$是一小扰动参数.定义微分算子 L_ε:

$$(L_\varepsilon u)(x):=-\varepsilon^2 u''(x)+q(x)u(x).$$

考虑区间 $I=(0,1)$ 上的二阶奇异摄动两点边值问题:

$$(\mathrm{P1})\begin{cases} L_\varepsilon u=f, x\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期: 2009-10-25
作者简介: 何崇南(1973-),男,讲师,博士,主要从事微分方程数值解法的研究。
* 国家自然科学基金项目(10962001),广西自然科学基金资助项目(0575029)资助。

定义双线性形式

$$a(u,v):=(u',v'),b(u,v)=(qu,v). \quad (2)$$

令 $A^X(u,v)=Xa(u,v)+b(u,v)$,那么和问题(1)相应的变分问题是:求 $u\in U:=H_0^1(I)$,使得对于任意的 $v\in U$,

$$A^X(u,v)=(f,v). \quad (3)$$

现在我们考虑用有限体积法求变分问题(3)的数值解,为此对 $I=[0,1]$作剖分 T_N,节点是 $0=x_0<x_1<\cdots<x_N=1$.单元 I_i的长度为 $h_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,3,\cdots N$,记 $h=\max h_i$.

为了离散问题(3),取试探函数空间 U_N 为相应于 T_N 的 Hermite型三次有限元空间,即 U_N 为满足下列条件的函数 u_N 的集合.

(i)$u_N\in C^1(I),u_N(0)=0,u_N(1)=0$,

(ii)u_N 在每个 $I_i=[x_i-x_{i-1}]$上是三次多项式,它完全由单元端点的函数值和一阶导数值所确定.

易知 U_N 的维数是 $2N$,取 U_N 的基函数 $\{h_{i,0},h_{i,1}:i=1,2,\cdots,N-1\}$为

$$h_{i,0}(x):=\begin{cases}(1-h_i^{-1}|x-x_i|)^2(2h_i^{-1}|x-x_i|+1),\\ \quad x\in[x_{i-1},x_i],\\ (1-h_{i+1}^{-1}|x-x_i|)^2(2h_{i+1}^{-1}|x-x_i|+1),\\ \quad x\in(x_i,x_{i+1}],\\ 0,x\notin[x_{i-1},x_{i+1}],\end{cases}$$

$$h_{i,1}(x):=\begin{cases}(x-x_i)(h_i^{-1}|x-x_i|-1)^2,x\in[x_{i-1},x_i],\\ (x-x_i)(h_{i+1}^{-1}|x-x_i|-1)^2,x\in(x_i,x_{i+1}],\\ 0,x\notin[x_{i-1},x_{i+1}].\end{cases}$$

$h_{0,0}(x):=(1-h_1^{-1}|x-x_0|)^2(2h_1^{-1}|x-x_0|+1),x\in[x_0,x_1]$,

$h_{N,0}(x):=(1-h_N^{-1}|x-x_N|)^2(2h_N^{-1}|x-x_N|+1),x\in[x_{N-1},x_N]$

$h_{0,1}(x)=(x-x_0)(h_1^{-1}|x-x_0|-1)^2,x\in[x_0,x_1]$,

$h_{N,1}(x)=(x-x_N)(h_N^{-1}|x-x_N|-1)^2,x\in[x_{N-1},x_N]$,

于是,任意 $u_N\in U_N$ 可以唯一表示成

$$u_N=\sum_{i=0}^{N}(u_i h_{i,0}+u_i' h_{i,1}), \quad (4)$$

其中 $u_i=u_N(x_i),u_0=u_N=0,u_i'=u_N'(x_i)$.

在单元 $I_i=[x_{i-1},x_k]$上,

$$u_N=u_{i-1}(1-Z)^2(2Z+1)+u_iZ^2(3-2Z)+u'_{i-1}h_iZ(1-Z)^2+u'_ih_i(Z-1)Z^2, \quad (5)$$

$$u'_N=u_{i-1}h_i^{-1}(6Z^2-6Z)+u_ih_i^{-1}(-6Z^2+6Z)+u'_{i-1}(3Z^2-4Z+1)+u'_i(3Z^2-2Z), \quad (6)$$

其中 $Z=(x-x_{i-1})/h_i$.

再作对偶剖分 T_N^*,节点为

$0=x_0<x_{\frac{1}{2}}<x_{\frac{3}{2}}<\cdots<x_{n-\frac{1}{2}}<x_N=1$,其中 $x_{i-\frac{1}{2}}=(x_{i-1}+x_i)/2,i=1,2,\cdots,N$.

取检验函数空间 V_N 为相应于 T_N^* 的分片线性函数空间,其基函数取法如下:

$$j_{j,0}(x):=\begin{cases}1,x\in[x_{j-1/2},x_{j+1/2}],\\ 0,x\notin[x_{j-1/2},x_{j+1/2}],\end{cases}$$

$$j_{j,1}(x):=\begin{cases}x-x_j,x\in[x_{j-1/2},x_{j+1/2}],\\ 0,x\notin[x_{j-1/2},x_{j+1/2}].\end{cases}$$

任意 $v_N\in V_N$ 可以唯一地表示为

$$v_N=\sum_{j=0}^{N}(v_j j_{j,0}+v_j' j_{j,1}).$$

注意到,(2)式中的双线性形式 $a(u,v)=(u',v')=\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x$ 在 V_N 上是没有定义的,因为 V_N 中的函数 v_N 是分片线性函数,即 v_N只属于 $L^2(I)$,而不属于 $H^1(I)$.对于任意 $u\in U_N\cup H^2(I)$,有

$$(u'',j_{j,0})=\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}}u''j_{j,0}\mathrm{d}x=\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}}u''\mathrm{d}x=u'_{j+1/2}-u'_{j-1/2},$$

$$(u'',j_{j,1})=\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}}u''j_{j,1}\mathrm{d}x=\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}}u''(x-x_j)\mathrm{d}x=-\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}}u'\mathrm{d}x+u'|_{j-1/2}^{j+1/2}=u'_{j+1/2}-u'_{j-1/2}=u_{j-1/2}-u_{j+1/2}+u'_{j-1/2}\frac{h_j}{2}+u'_{j+1/2}\frac{h_{j+1}}{2}.$$

为此,引入另一定义在 $(U_N\cup H^2(I))\times V_N$ 上双线性形式 $\tilde{a}(\cdot,\cdot)$.按如下定义:

$$\tilde{a}(u,j_{j,0})=u'_{j+1/2}-u'_{j-1/2},$$

$$\tilde{a}(u,j_{j,1})=u_{j-1/2}-u_{j+1/2}+u'_{j-1/2}\frac{h_j}{2}+u'_{j+1/2}\frac{h_{j+1}}{2}.$$

对于任意 $v\in V_N$,双线性形式 $\tilde{a}(u,v)$的值是上述表达式的线性组合.那么对于 $u\in H^2(I)$和 $v\in V_N$,有 $\tilde{a}(u,v)=(u'',v)$.注意到 $b(u,v)=(qu,v)$在$(U_N\cup H^2(I))\times V_N$ 也是有定义的,于是 $\tilde{A}^X(u,v)=-X\tilde{a}(u,v)+b(u,v)$是定义在$(U_N\cup H^2(I))\times V_N$ 上的双线性形式.所以求解问题(1)的 Hermite型三次元有限体积法就是求 $u_N\in U_N$,使得对于任意的 $v\in V_N$,

$$\tilde{A}^X(u_N,v)=(f,v). \quad (7)$$

根据文献[12],问题(P1)的解 u 可以写成

$$u=E+F+G, \quad (8)$$

其中函数 E,F,G是充分光滑的函数,使得对于任意的 $x\in I$和 $j\in\{1,2,\cdots\}$,有

$$|G^{(j)}(x)| \leqslant c,$$
$$|E^{(j)}(x)| \leqslant c\varepsilon^{-j} e^{-\alpha x/\varepsilon},$$
$$|F^{(j)}(x)| \leqslant c\varepsilon^{-j} e^{-\alpha(1-x)/\varepsilon}. \quad (9)$$

对于求方程(1)数值解的三次元 Galerkin方法,最优网格可通过如下方法实现:引进步长生成函数

$$h^0(x) := \frac{\varepsilon}{N} e^{\frac{\alpha x}{4\varepsilon}}, \quad (10)$$

选取步长 $h_i, i\in \mathbb{N}_{\tilde N}$,使得

$$h_i \leqslant \min\{h^0(x_{i-1}), h^0(1-x_{i-1}), 1/N\}, \quad (11)$$
$$\tilde N \leqslant cN. \quad (12)$$

具有性质(11)、(12)的网格称为最优网格.网格的具体构造可以参考文献[11].

对于任意 $N\in \mathbb{N}$,选取 T_N 如上述的最优网格剖分,用 T_N^* 表示相应的对偶剖分,对于 $u\in U$, $\Pi_N u$ 和 $\Pi_N^* u$ 分别表示 u 到空间 U_N 和空间 V_N 的 Hermite插值,也就是

$$\Pi_N u := \sum_{i\in Z_{N-1}} [u(x_i)\varphi_{i,0} + u'(x_i)\varphi_{i,1}],$$
$$\Pi_N^* u := \sum_{i\in Z_{N-1}} [u(x_i)\psi_{i,0} + u'(x_i)\psi_{i,1}].$$

设 $|v|_{k,\infty,I_i}$ 表示 v^k 在区间 I_i 上的最大模范数.则对于 $j = 0, 1, 2, 3$,

$$|E - \Pi_N E|_{j,\infty,I_i} \leqslant h_i^{4-j}|E|_{4,\infty,I_i} \leqslant c\varepsilon^{-4} e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} \left(\frac{\varepsilon}{N} e^{\frac{\alpha x_{i-1}}{4\varepsilon}}\right)^{4-j} \leqslant c\varepsilon^{-j}N^{-4+j}.$$

类似的,上述的不等式对于 F 和 G 也是成立的.因此有

引理 1 设 u 是问题(1)的解,那么存在一个不依赖于 c 的常数 ε 和 N 使得

$$\|(u-\Pi_N u)^{(j)}\| \leqslant c\varepsilon^{-j}N^{-4+j}, j = 0, 1, 2, 3, \quad (13)$$
$$\|u - \Pi_N u\|_\varepsilon \leqslant cN^{-3}, \quad (14)$$

其中能量范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$ 定义为 $\|u\|_\varepsilon := (\varepsilon|u|_1^2 + \|u\|_0^2)^{1/2}$.

2 收敛性分析

证明双线性形式的一些性质.利用(5)式和(6)式,当 $x = x_{j-\frac12}$ 时,$\xi = \frac12$,可以得到

$$u_{j-\frac12} = u_N(x_{j-\frac12}) = \frac12 u_{j-1} + \frac12 u_j + \frac18 h_j u'_{j-1} - \frac18 h_j u'_j, \quad (15)$$
$$u'_{j-\frac12} = u'_N(x_{j-\frac12}) = -\frac32 h_j^{-1}u_{j-1} + \frac32 h_j^{-1}u_j - \frac14 u'_{j-1} - \frac14 u'_j, \quad (16)$$
$$\tilde a(u_N, \psi_{j,0}) = \frac{3}{2h_j}(u_{j-1} - u_j) - \frac{3}{2h_{j+1}}(u_j - u_{j+1}) + \frac14 u'_{j-1} - \frac14 u'_{j+1}, \quad (17)$$
$$\tilde a(u_N, \psi_{j,1}) = +\frac34(u_j - u_{j-1}) + \frac34(u_{j+1} - u_j) - \frac{h_j}{8}u'_{j-1} - \frac{h_j + h_{j+1}}{8}u'_j - \frac{h_{j+1}}{8}u'_{j+1} - \int_{x_{j-\frac12}}^{x_{j+\frac12}} u'_N \mathrm{d}x. \quad (18)$$

将(18)式最后的积分整理并代入,则有

$$\tilde a(u_N, \psi_{j,1}) = -\frac14 u_{j-1} + \frac14 u_{j+1} - \frac14(h_j + h_{j+1})u'_j. \quad (19)$$

引理 2 对于充分大的 N,存在一个不依赖于 U_N 的正常数 α,使得

$$-\tilde a(u_N, \Pi_N^* u_N) \geqslant \beta|u_N|_1^2, \forall u_N \in U_N. \quad (20)$$

证明 由(18)式和(19)式可得

$$-\tilde a(u_N, \Pi_N^* u_N) = -\sum_{j=0}^N [u_j\tilde a(u_N, \psi_{j,0}) + u'_j\tilde a(u_N, \psi_{j,1})] = \sum_{j=0}^N \left[\frac{3}{2h_j}(u_j - u_{j-1}) - \frac{3}{2h_{j+1}}(u_{j+1} - u_j) - \frac14 u'_{j-1} + \frac14 u'_{j+1}\right] + \sum_{j=0}^N \left[\frac14 u_{j-1}u'_j - \frac14 u_{j+1}u'_j + \frac14(h_j + h_{j+1})u'^2_j\right] = \sum_{j=0}^N h_j \left[\frac32\left(\frac{u_j - u_{j-1}}{h_j}\right)^2 - \frac12 \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j}(u'_j + u'_{j-1}) + \frac14(u'^2_j + u'^2_{j-1})\right] \geqslant \frac18\sum_{j=0}^N h_j\left[\left(\frac{u_j - u_{j-1}}{h_j}\right)^2 + u'^2_j + u'^2_{j-1}\right] \geqslant \frac18|u_N|^2_{1,U_N},$$

其中离散范数

$$|u_N|_{1,U_N} := \left\{\sum_{j=0}^N h_j\left[\left(\frac{u_j - u_{j-1}}{h_j}\right)^2 + u'^2_j + u'^2_{j-1}\right]\right\}^{1/2}.$$

由文献[13]可以知道,对任意的 $u_N \in U_N$,存在不依赖于子空间 U_N, V_N 的正常数 c_1, c_2,使得

$$c_1|u_N|_{1,U_N} \leqslant |u_N|_1 \leqslant c_2|u_N|_{1,U_N}.$$

因此引理 2得证.

对于任意的 $u_N \in U_N$,定义

$$\|u_N\|_{L,U_N} := \sup_{\substack{w_N \in U_N, \\ \|w_N\|_\varepsilon = 1}} |\tilde A_\varepsilon(u_N, \Pi_N^* w_N)|. \quad (21)$$

引理 3 设与问题(1)相应的齐次方程

$$A_\varepsilon(u,v) = 0, v \in U \quad (22)$$

只有平凡解,则存在与子空间 U_N 和 ε 无关的常数 α,使得当 N 充分大时,

$$\|u_N\|_{L,U_N} \geqslant \beta\|u_N\|_\varepsilon, \forall u_N \in U_N. \quad (23)$$

证明 对于任意的 $\lambda > 0$,定义 $b_\lambda(u,v) := \lambda(u,v)$, $\tilde A_{\varepsilon,\lambda}(u,v) = \tilde A_\varepsilon(u,v) + b_\lambda(u,v)$.由引理 2有,存在一个正常数 β,使得

$$\tilde A_{\varepsilon,\lambda}(u_N, \Pi_N^* u_N) = -\varepsilon(u''_N, \Pi_N^* u_N) + ((q+\lambda)u_N, \Pi_N^* u_N) \geqslant \beta\varepsilon|u_N|_1^2 + (\lambda - \|q\|_\infty)\|u_N\|^2 -$$

$$(\lambda + \|q\|_\infty)\|u_N\| \cdot \|\Pi_N^* u_N - u_N\| . \quad (24)$$

注意到,$\|\Pi_N^* u_N - u_N\| \leqslant U_2 N^{-1}\|u_N\|_1, U_2 > 0$,有

$$(\lambda+\|q\|_\infty)\|u_N\|\cdot\|\Pi_N^*u_N - u_N\| \leqslant U_2N^{-1}(\lambda+\|q\|_\infty)\|u_N\|_1\cdot\|u_N\| .$$

选取正数 λ,对于充分大的 N,应用不等式

$$\|u_N\|_1\cdot\|u_N\| \leqslant \frac{W}{2}\|u_N\|_1^2 + \frac{1}{2W}\|u_N\|^2,$$

其中 $W>0$ 是某一合适的常数,有

$$\tilde A_{X,\lambda}(u_N,\Pi_N^*u_N) \geqslant U\|u_N\|_X^2, \quad (25)$$

其中 U 是与 U_N 无关的正常数.

用反证法论证(23)式.若不然,则有序列 $\{\tilde u_N: \tilde u_N \in U_N\}$ 满足 $\|\tilde u_N\|_X = 1, \|\tilde u_N\|_{L,U_N} \to 0, N\to\infty$.

因为 U 是弱列紧的,不失一般性,不妨设 $\{\tilde u_N\}$ 弱收敛到某 $\tilde u \in U$.任取 $w \in \tilde U := H^2(I)\cap U$,设 $\Pi_N w$ 是 w 到 U_N 的插值投影,于是有 $\Pi_N^*(w-\Pi_N w) = 0$.因此

$$|\tilde A_X(\tilde u_N,\Pi_N^* w)| = |\tilde A_X(\tilde u_N, \Pi_N^*\Pi_N w)| \leqslant c\|\tilde u_N\|_{L,U_N}\|\Pi_N w\|_X .$$

此外对于充分大的 N,有

$$\|\Pi_N w\|_X \leqslant \|w\|_X + \|\Pi_N w - w\|_X \leqslant c\|w\|_2 .$$

因此,当 $N\to\infty$ 时,

$$|\tilde A_X(\tilde u_N,\Pi_N^* w)| \leqslant \|\tilde u_N\|_{L,U_N}\|w\|_2 \to 0 .$$

另一方面,

$$\tilde A_X(\tilde u_N, \Pi_N^* w - w) \leqslant c\|-X^2\tilde u_N'' + q\tilde u_N\|\,\|\Pi_N^*w - w\| \leqslant cN^{-1}\|\tilde u_N\|_2\|w\|_2 \to 0, N\to\infty .$$

因此,

$$\tilde A_X(\tilde u_N,w) = \tilde A_X(\tilde u_N,\Pi_N^*w - w) + \tilde A_X(\tilde u_N,\Pi_N^* w) \to 0 .$$

所以有

$$A_X(\tilde u_N,w) = \tilde A_X(\tilde u_N,w)\to 0, N\to\infty . \quad (26)$$

又由于 $|A_X(u,w)| \leqslant C|u|_1|w|_1, \forall u,w\in H_0^1(I)$,所以,对固定的 $w\in H_0^1(I)$,$|A_X(u,w)|$ 是 $H_0^1(I)$ 上的有界线性泛函,因此

$$A_X(\tilde u_N,w) \to A_X(\tilde u,w), N\to\infty . \quad (27)$$

由(26)式和(27)式得到

$$A_X(\tilde u,w) = 0, \forall w\in U . \quad (28)$$

因为 U 在 $H_0^1(I)$ 中稠密,故上式对任何 $w\in H_0^1(I)$ 成立,由假设便有 $\tilde u = 0$,从而 $\{\tilde u_N\}$ 弱收敛于 0.由于 $H_0^1(I)$ 到 $L^2(I)$ 是紧嵌入,所以 $\{\tilde u_N\}$ 在 $L^2(I)$ 是强收敛于 0.

利用前面的插值结论 $|\Pi_N^* u - u|_0 \leqslant cN^{-2}|u|_2, \forall u\in U$ 和有限元的逆性质 $|u_N|_2 \leqslant cN^2|u_N|_0, \forall u_N\in U_N$,从而

$$|\Pi_N^* u_N|_0 \leqslant |u_N|_0 + |\Pi_N^* u_N - u_N|_0 \leqslant c|u_N|_0 . \quad (29)$$

利用(29)式,可得

$$|b_\lambda(\tilde u_N,\Pi_N^*\tilde u_N)| = |\lambda(\tilde u_N,\Pi_N^*\tilde u_N)| \leqslant c|\tilde u_N|_0|\Pi_N^*\tilde u_N|_0 \leqslant c|\tilde u_N|_0^2 \to 0, N\to 0 . \quad (30)$$

于是

$$|\tilde A_{X,\lambda}(u_N,\Pi_N^*u_N)| \leqslant |\tilde A_X(u_N,\Pi_N^*u_N)| + |b_\lambda(u_N,\Pi_N^*u_N)| \leqslant \|u_N\|_{L,U_N} + |b_\lambda(u_N,\Pi_N^*u_N)| \to 0, N\to 0 . \quad (31)$$

这与(25)式矛盾.因此假设不成立,证明完毕.

定理 1 设齐次方程(22)有唯一解,u 和 u_N 分别是方程(1)和(7)的解,则存在正整数 N_0 和正常数 $c>0$,使得对于任意 $N\geqslant N_0$,有

$$\|u-u_N\|_X \leqslant cN^{-3} . \quad (32)$$

证明 根据方程(1)和(7)有

$$\tilde A_X(u,\Pi_N^* w_N) = \tilde A_X(u_N,\Pi_N^* w_N), \forall w_N\in U_N . \quad (33)$$

由引理 3 得

$$\|\Pi_N u - u_N\|_X \leqslant c \sup_{\substack{w_N\in U_N \\ \|w_N\|_X=1}} |\tilde A_X(\Pi_N u - u_N, \Pi_N^* w_N)| = c\sup_{\substack{w_N\in U_N \\ \|w_N\|_X=1}} |\tilde A_X(u-\Pi_N u,\Pi_N^* w_N)| . \quad (34)$$

设 $e_N := u-\Pi_N u$,把 $|\tilde A_X(u-\Pi_Nu,\Pi_N^*w_N)|$ 分成 4 个部分

$$\tilde A_X(e_N,\Pi_N^* w_N) = \tilde A_X(e_N,w_N) + \tilde A_X(e_N,\Pi_N^* w_N - w_N) = -X^2 a(e_N,w_N) + b(e_N,w_N) - X^2 a(e_N,\Pi_N^*w_N - w_N) + b(e_N,\Pi_N^* w_N - w_N) .$$

对于第 1 部分 $X^2 a(e_N,w_N)$,有

$$X^2 a(e_N,w_N) = X^2(e_N'',w_N) \leqslant X^2|e_N|_1|w_N|_1 = X^2|w_N|_1\left(\int_I|e_N'|^2dx\right)^{1/2} = X^2|w_N|_1\left(\sum_{j\in Z_N}\int_{I_j}|e_N'|^2dx\right)^{1/2} \leqslant X^2|w_N|_1\left(\sum_{j\in Z_N}|e_N|_{1,\infty,I_j}^2|I_j|\right)^{1/2} \leqslant X^2|w_N|_1\left(\sum_{j\in Z_N}(h_j^3|u|_{4,\infty,I_j})^2|I_j|\right)^{1/2} .$$

由(11)式,可得

$$h_j^3|u|_{4,\infty,I_j} \leqslant X^{-4}e^{-\frac{Tx_{j-1}}{X}}\left(\frac{X}{N}e^{\frac{Tx_{j-1}}{4X}}\right)^3 \leqslant CX^{-1}N^{-3}, \quad (35)$$

因此有

$$X^2a(e_N,w_N) \leqslant CX^2|w_N|_1\left(\sum_{j\in Z_N}(h_j^3|u|_{4,\infty,I_j})^2|I_j|\right)^{1/2} \leqslant CX^2|w_N|_1\left(\sum_{j\in Z_N}(X^{-1}N^{-3})^2|I_j|\right)^{1/2} \leqslant CXN^{-3}|w_N|_1 .$$

对于第 2 部分 $b(e_N,w_N)$,有

$b(e_N,w_N) = (qe_N,w_N) \leqslant q_{\max}|e_N|_0|w_N|_0 = q_{\max}|w_N|_0(\int_I |e_N|^2 dx)^{1/2} =$
$q_{\max}|w_N|_0(\sum_{j\in Z_N}\int_{I_j}|e_N|^2 dx)^{1/2} \leqslant$
$q_{\max}|w_N|_0(\sum_{j\in Z_N}|e_N|^2_{0,\infty,I_j}|I_j|)^{1/2} \leqslant$
$Cq_{\max}|w_N|_0(\sum_{j\in Z_N}(h_j^4|u|_{4,\infty,I_j})^2|I_j|)^{1/2}.$

与(35)式类似,有

$$h_j^4|u|_{4,\infty,I_j} \leqslant \varepsilon^4 e^{-\frac{x_{j-1}}{\varepsilon}}(\frac{\varepsilon}{N}e^{\frac{x_{j-1}}{4\varepsilon}})^4 \leqslant CN^{-4}. \quad (36)$$

因此,

$b(e_N,w_N) \leqslant$
$Cq_{\max}|w_N|_0(\sum_{j\in Z_N}(h_j^4|u|_{4,\infty,I_j})^2|I_j|)^{1/2} \leqslant$
$Cq_{\max}|w_N|_0(\sum_{j\in Z_N}(N^{-4})^2|I_j|)^{1/2} \leqslant CN^{-4}|w_N|_0.$

对于第3部分 $\varepsilon^2\tilde{a}(e_N,\Pi_N^* w_N - w_N)$,有

$\varepsilon^2\tilde{a}(e_N,\Pi_N^* w_N - w_N) = \varepsilon^2(e''_N,\Pi_N^* w_N - w_N)$
$= \varepsilon^2\int_I e''_N(x)(\Pi_N^* w_N - w_N)(x)dx =$
$\varepsilon^2\sum_{j\in Z_N}\int_{I_j}e''_N(x)(\Pi_N^* w_N - w_N)(x)dx \leqslant$
$C\varepsilon^2\sum_{j\in Z_N}|e_N|_{2,\infty,I_j}|\Pi_N^* w_N - w_N|_{0,I_j}|I_j| \leqslant$
$C\varepsilon^2\sum_{j\in Z_N}h_j^2|u|_{4,\infty,I_j}h_j|w_N|_1|I_j|.$

再由(35)式,即 $h_j^3|u|_{4,\infty,I_j} \leqslant C\varepsilon^{-1}N^{-3}$,有

$\varepsilon^2\tilde{a}(e_N,\Pi_N^* w_N - w_N) \leqslant$
$C\varepsilon^2\sum_{j\in Z_N}h_j^3|u|_{4,\infty,I_j}|w_N|_1|I_j| \leqslant$
$C\varepsilon^2\sum_{j\in Z_N}\varepsilon^{-1}N^{-3}|w_N|_1|I_j| \leqslant C\varepsilon N^{-3}|w_N|_1\sum_{j\in Z_N}|I_j| =$
$C\varepsilon N^{-3}|w_N|_1.$

对于第4部分 $b(e_N,\Pi_N^* w_N - w_N)$,有

$b(e_N,\Pi_N^* w_N - w_N) = (qe_N,\Pi_N^* w_N - w_N) =$
$\int_I qe_N(x)(\Pi_N^* w_N - w_N)(x)dx =$
$\sum_{j\in Z_N}\int_{I_j}qe_N(x)(\Pi_N^* w_N - w_N)(x)dx \leqslant$
$C\sum_{j\in Z_N}|e_N|_{0,\infty,I_j}|\Pi_N^* w_N - w_N|_{0,I_j}|I_j| \leqslant$
$C\sum_{j\in Z_N}h_j^4|u|_{4,\infty,I_j}|w_N|_0|I_j|.$

由(36)式,即 $h_j^4|u|_{4,\infty,I_j} \leqslant CN^{-4}$,有

$b(e_N,\Pi_N^* w_N - w_N) \leqslant$
$C\sum_{j\in Z_N}h_j^4|u|_{4,\infty,I_j}|w_N|_0|I_j| \leqslant CN^{-4}|w_N|_0\sum_{j\in Z_N}|I_j| =$
$CN^{-4}|w_N|_0.$

把这4部分加起来,有

$|\tilde{A}_\varepsilon(u - \Pi_N u,\Pi_N^* w_N)| \leqslant CN^{-3}(\varepsilon|w_N|_1 + N^{-1}|w_N|_0) \leqslant CN^{-3}\|w_N\|_\varepsilon.$

从而 $\|\Pi_N u - u_N\|_\varepsilon \leqslant CN^{-3}\|w_N\|_\varepsilon$.结合插值估计(14),有 $\|u - u_h\|_\varepsilon \leqslant CN^{-3}$.

3 数值算例

考虑二阶反应扩散问题

$-\varepsilon u''(x) + (2+\sin(x))u(x) = f(x), x\in(0,1),$

$u(0) = u(1) = 0,$

其中选择 f,使得 $u(x) = e^{-x/\varepsilon} + e^{-(1-x)/\varepsilon} + x(1-x) - (1+e^{1/\varepsilon})$ 是原方程的真解.

取网格步长生成函数 $h^0(x) = \frac{2\varepsilon}{N}e^{\frac{x}{4\varepsilon}}$.选取3个不同的小参数作为扰动参数 ε,并对于不同的 N 计算真解 u 和数值解之间的误差.同时考虑用 Galerkin方法计算的真解 u 和数值解之间的误差.收敛阶由以下公式计算:

$$\log(\frac{\|u - u_{N_1}\|_\varepsilon}{\|u - u_{N_2}\|_\varepsilon})/\log(\frac{N_1}{N_2}),$$

其中 N_1 和 N_2 是表中相邻两次剖分的网格点数目.

表1 有限体积法和 Galerkin有限元法的比较

Table 1 Comparison of finite volume method and Galerkin method

ε	N	有限体积法 Finite volume method $\|u-u_N\|_\varepsilon$	有限体积法 Finite volume method 收敛阶 Convergence order	Galerkin有限元法 Galerkin method $\|u-u_N\|_\varepsilon$	Galerkin有限元法 Galerkin method 收敛阶 Convergence order
3.905e-3	63	4.60e-006		3.35e-006	
	127	5.68e-007	3.02	4.59e-007	2.93
	255	7.14e-008	2.99	6.27e-008	2.99
	511	9.25e-009	2.95	8.12e-009	2.92
	1026	1.18e-009	2.97	1.07e-009	2.98
60104e-5	63	7.97e-007		5.51e-007	
	127	9.63e-008	3.05	7.05e-008	2.97
	256	1.28e-008	2.91	9.01e-009	2.90
	512	1.67e-009	2.94	1.21e-009	2.90
	1024	2.19e-010	2.93	1.60e-010	2.92
3.816e-6	63	2.20e-007		1.38e-007	
	126	2.56e-008	3.11	1.89e-008	2.90
	256	3.40e-009	2.91	2.25e-009	2.95
	512	4.71e-010	2.85	3.01e-010	2.92
	1026	6.23e-011	2.92	4.03e-011	2.89

由表1可以看出两种方法有几乎相同的精度.又由定理1知,理论上的最优收敛阶为3,而从表1中我们可以看到实际数值很接近理论值3.这验证了理论上的估计.

(下转第399页 Continue on page 399)

global convergence in nonconvex minimization [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2001, 129: 15-35.

[4] Byrd R H, Schnabel R B, Shultz G A. Approximate solution of the trust region problem by minimization over two-dimensional subspaces [J]. math Prog, 1988, 40: 247-263.

[5] Buleau J P, Vial J Ph. Curvilinear path and trust region in unconstrained optimization, a convergence analysis [J]. Math Prog Study, 1987, 30: 82-101.

[6] 袁功林,韦增欣.一个新的 BFGS信赖域算法 [J].广西科学, 2004, 11(3): 195-196, 200.

[7] Shultz G A, Schnabel R B, Byrd R H. A family of trust-region-based algorithms for unconstrained miimization with strong global convergence properties [J]. SIAM J Numer Anal, 1985, 22: 47-67.

[8] 袁亚湘.信赖域方法的收敛性 [J].计算数学, 1994, 16: 333-346.

[9] Nocedal J, Yuan Y X. Combining trust-region and line search techniques [J]. Advance in Nonlinear Programming, Applied Optimization, Kluwer Academic Publ, Dordrecht, 1998, 14: 153-175.

[10] Rendl F, Wolkowicz H. A semidefinite framework for trust region subproblems with applications to large scale minimization [J]. Math Program, 1997, 77: 273-299.

[11] Yuan Y, Sun W. Theory and methods of optimization [M]. Beijing: Science Press of China, 1999.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 396页 Continue from page 396)

参考文献:

[1] Stynes M, E O′Riordan. A finite element method for a singularly perturbed boundary value problem [J]. Numer Math, 1986, 50: 1-15.

[2] Stynes M, E O′Riordan. An analysis of a singularly perturbed two-point boundary value problem using only finite element techniques [J]. Math Comp, 1991, 56: 663-675.

[3] Sun G, Stynes M. Finite element methods for singularly perturbed high-order elliptic two-point boundary problems, I: Reaction-diffusion-type problems [J]. IMA J Numer Anal, 1995, 15: 117-139.

[4] Sun G, Stynes M. Finite element methods for singularly perturbed high-order elliptic two-point boundary problems, II: Convection-diffusion-type problems [J]. IMA J Numer Anal, 1995, 15: 197-219.

[5] Liu W, Tang T. Error analysis for a Galerkin spectral method with coordinate transformation for solving singularly perturbed problems [J]. Appl Numer Math, 2001, 38: 315-345.

[6] H J J Miller, E O′Riordan, G I Shishkin. Fitted numerical methods for singularly perturbation problems [M]. Singapore: World Scientific, 1996.

[7] Tang T, Trummer M R. Boundary layer resolving pseudospectral methods for singular perturbation problems [J]. SIAM J Sci Comput, 1996, 17: 430-438.

[8] Qiu Y, Sloan D M. Analysis of difference approximations to a singular perturbed two-point boundary value problem on an adaptively generated grid [J]. J Comput Appl Math, 1999, 101: 1-25.

[9] Roos H G, Stynes M, Tobiska L. Numerical methods for singularly perturbed differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

[10] Shishkin G I. Grid approximation of singularly perturbed parabolic equations with internal layers [J]. Sov J Numer Anal Math Model, 1988, 3: 393-407.

[11] Liu S, Xu Y. Galerkin methods based on Hermite splines for singular perturbation problems [J]. SIAM J Number Anal, 2006, 43: 2607-2623.

[12] R E O′Malley. Introduction to singular perturbations [M]. New York: Academic Press, 1974.

[13] Li R, Chen Z, Wu W. Generalized difference methods for differential equations: numerical analysis of finite volume methods [M]. New York: Marcel Dekker, Inc, Basel, 2000.

(责任编辑: 尹 闯)