

# 基于 ARMA-GARCH 模型的风险价值与条件风险价值计算

## A Calculation of VaR and CVaR Based on ARMA-GARCH Model

李志海, 叶建萍, 杨善朝

LI Zhi-hai, YE Jian-ping, YANG Shan-chao

(广西师范大学数学科学学院, 广西桂林 541004)

(College of Mathematical Guangxi Normal University, Guilin Guangxi, 541004, China)

**摘要:** 基于 ARMA-GARCH 模型, 给出风险价值 VaR 条件风险价值 CVaR 的计算公式, 分别在标准正态分布、student-T 分布、Skewed-T 分布、广义误差分布条件下对模型进行数值模拟, 并用上证 A 股、大同煤业股票相关数据拟合模型来进行实证分析. 结果表明, 利用 ARMA-GARCH 模型给出的计算公式能够准确地估计 VaR 值与 CVaR 值, 并且随着给定概率水平  $p$  的减少, VaR 与 CVaR 的值增大, 对于给定同一概率水平的 CVaR 值比 VaR 值大, CVaR 比 VaR 更能体现风险度量的大小.

**关键词:** 风险度量 风险价值 条件风险价值 GARCH 模型

中图分类号: O211.67 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)04-0406-04

**Abstract** Based on ARMA-GARCH model, the formula for calculating the risk of the value of VaR and the value at risk conditions of CVaR are given, respectively, in the standard normal distribution, student-T distribution, Skewed-T distribution, the generalized error distribution model under the condition of numerical simulation. Simulation results show that the use of ARMA-GARCH model can more accurately estimate VaR and CVaR. At last we use Shanghai Stock Index and Datong Coal stock close of empirical data analysis, results showed that with a given probability level  $p$  reduction, VaR and CVaR values increase; the same probability for a given level, the value of CVaR are bigger than that of VaR, so CVaR risk measure is better than VaR.

**Key words** risk measurement, VaR, CVaR, GARCH model

风险度量是把一个代表风险的随机变量转化为一个实际值的过程. Artzner<sup>[1,2]</sup>等首先提出“一致性风险度量”这个概念. 他们认为一个风险度量至少应该满足 4 个条件(单调性、次可加性、正齐次性、平移不变性), 在这 4 个条件中, 次可加性是很重要的一个条件, 它用来刻画投资组合理论中的风险分散化原理. 风险价值 VaR 已经成为风险度量的重要工具之一, 用来度量某一个资产组合在未来一个给定的期限内, 在选定置信水平下的最大可能损失. Artzner<sup>[1]</sup>等指出在一般条件下, VaR 不满足一致性风险度量理论中的次可加性公理, 也即组合的 VaR 可能会大于组合中各资产的 VaR 之和, 因而破坏投资组合理论中的风险分散化原理. 为了弥补风险价值 VaR 的缺

陷, 产生了条件风险价值 CVaR. CVaR 是指损失超过 VaR 水平的条件期望, CVaR 是一致风险度量, 知道 CVaR 的值更能回避风险. 所以正确估计 VaR 与 CVaR 的值具有重大的现实意义.

在金融市场中, 许多金融时间序列具有异方差性质, 如股票、基金的价格等. GARCH 模型是至今为止最常用、最可行的异方差序列拟合模型. 如文献 [2] 应用 GARCH 模型估计上证综合指数收益 VaR 值, 结果 GARCH 模型比 Riskmetrics 标准法能更准确地反应股市风险; 文献 [3] 说明基于 GARCH 模型估计 VaR 更加具有动态性和准确性. 另外, Skewed-T 分布能够很好地刻画金融资产的厚尾分布. 如, 文献 [4] 说明 Skewed-T 分布较好地拟合了金融资产的厚尾特性以及不同 GARCH 模型在 Skewed-T 分布下预测 VaR 更准确; 文献 [5] 应用 GARCH 模型在标准正态分布、student-T 分布、Skewed-T 分布、广义误差分布的假设下估计下一期的 VaR, 结果 GARCH 模型

收稿日期: 2009-02-26

修回日期: 2009-04-17

作者简介: 李志海 (1982-), 男, 硕士研究生, 主要从事金融统计研究.

在 Skewed-T 分布下更好地估计 VaR. GARCH 模型在 Skewed-T 分布条件下能够准确地估计下一期给定概率水平的 VaR, 但是文献 [2~ 5] 的研究都是在不包含趋势项的 GARCH 模型的基础上进行讨论和都没有计算 CVaR, 在实际中有许多金融数据序列会呈现出各种形式的相依性和趋势性, 所以本文将对包含趋势项的 GARCH 模型进行讨论, 也就是在 ARMA-GARCH 模型基础上讨论 VaR 和 CVaR 的估计.

**1 ARMA-GARCH 模型以及 VaR 与 CVaR 的计算公式**

ARMA( $q, g$ )-GARCH( $q, p$ ) 模型定义<sup>[4]</sup>为

$$r_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^g \theta_j a_{t-j} = u_t + a_t, \tag{1.1}$$

$$a_t = \epsilon_t X_t, \tag{1.2}$$

$$\epsilon_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^g \theta_j \epsilon_{t-j}^2. \tag{1.3}$$

(1.1) 式是  $n$  的相依趋势模型, 其形式为  $g$  阶的 ARMA 模型, (1.2) 式和 (1.3) 式是条件异方差 GARCH 模型, 其阶数为  $p, q, \omega, \alpha_i, i = 1, 2, \dots, q, \theta_j, j = 1, 2, \dots, g, \omega_0, \alpha_i, i = 1, 2, \dots, q, \theta_j, j = 1, 2, \dots, g$ , 称为 ARMA( $q, g$ )-GARCH( $q, p$ ) 模型的参数.

如果  $X$  表示证券组合在一定持有期内的对数收益率, 那么给定概率水平  $p$  (一般很小) 的 VaR 定义<sup>[2]</sup>为

$$VaR_p = - \inf\{u \mid P(X < u) \geq p\}. \tag{1.4}$$

概率水平为  $p$  的 CVaR 可表示为

$$CVaR_p = - E[X \mid X \leq - VaR_p], \tag{1.5}$$

其中  $VaR_p$  是给定概率水平为  $p$  的 VaR.

在已知  $t$  时刻信息条件下估计  $r_{t+1}$  在给定概率水平为  $p$  的  $VaR_{r_{t+1}}$ . 假设在给定  $K_t$  条件下随机误差  $X_t$  的条件密度函数为  $f(X_t \mid K_t)$ , 再相应给出概率水平为  $p$  的 VaR 为  $VaR_{r_{t+1}}$ . 由于

$$r_{t+1} = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t+1-i} + a_{t+1} - \sum_{j=1}^g \theta_j a_{t+1-j} = u_{t+1} + a_{t+1}, a_{t+1} = \epsilon_{t+1} X_{t+1},$$

则

$$P(r_{t+1} < VaR_{r_{t+1}} \mid K_t) = P\left(\frac{r_{t+1} - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}} < \frac{VaR_{r_{t+1}} - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}} \mid K_t\right) = P(X_{t+1} < \frac{VaR_{r_{t+1}} - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}} \mid K_t) = \int_{-\infty}^{\frac{VaR_{r_{t+1}} - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}}} f(X_{t+1} \mid K_t) dX_{t+1},$$

所以由  $P(r_{t+1} < VaR_{r_{t+1}} \mid K_t) = p$  得,  $\frac{VaR_{r_{t+1}} - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}}$

$$= VaR_{X_{t+1}}, \text{从而} \tag{1.6}$$

根据波动率方程可知,  $a_{t+1}$  的条件方差  $\epsilon_{t+1}$  可以由过去的条件方差和误差的平方估计,  $u_{t+1}$  可以根据均值方程由过去的信息算出. 由极大似然估计方法可以估计出  $X_{t+1}$  的条件密度函数中的参数, 从而求出  $VaR_{X_{t+1}}$ .

由前面可知  $X_{t+1}$  的条件密度函数为  $f(X_{t+1} \mid K_t)$ . 那么可求得

$$r_{t+1} = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t+1-i} + a_{t+1} - \sum_{j=1}^g \theta_j a_{t+1-j} = u_{t+1} + a_{t+1} = u_{t+1} + \epsilon_{t+1} X_{t+1}$$

的密度函数为  $\frac{1}{\epsilon_{t+1}} f\left(\frac{r_{t+1} - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}} \mid K_t\right)$ . 这是因为

$$P(r_{t+1} < x) = P\left(\frac{r_{t+1} - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}} < \frac{x - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}}\right) = P(X_{t+1} < \frac{x - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}}) = \int_{-\infty}^{\frac{x - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}}} f(X_{t+1} \mid K_t) dX_{t+1} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\epsilon_{t+1}} f\left(\frac{r_{t+1} - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}} \mid K_t\right) d r_{t+1} (\text{令 } X_{t+1} = \frac{r_{t+1} - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}}).$$

所以  $r_{t+1}$  的密度函数

$$f(r_{t+1}) = \frac{1}{\epsilon_{t+1}} f\left(\frac{r_{t+1} - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}} \mid K_t\right).$$

从而

$$CVaR_{r_{t+1}} = E(r_{t+1} \mid r_{t+1} < - VaR_{r_{t+1}}) = \frac{E(r_{t+1} \mid I_{r_{t+1}} < - VaR_{r_{t+1}})}{P(r_{t+1} < - VaR_{r_{t+1}})} = \frac{\int_{-\infty}^{-VaR_{r_{t+1}}} r_{t+1} \frac{1}{\epsilon_{t+1}} f\left(\frac{r_{t+1} - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}} \mid K_t\right) d r_{t+1}}{p} = \frac{\int_{-\infty}^{\frac{-VaR_{r_{t+1}} - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}}} (u_{t+1} + \epsilon_{t+1} X_{t+1}) f(X_{t+1} \mid K_t) d X_{t+1}}{p} = \frac{\int_{-\infty}^{\frac{-VaR_{r_{t+1}} - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}}} u_{t+1} f(X_{t+1} \mid K_t) d X_{t+1}}{p} + \frac{\int_{-\infty}^{\frac{-VaR_{r_{t+1}} - u_{t+1}}{\epsilon_{t+1}}} \epsilon_{t+1} X_{t+1} f(X_{t+1} \mid K_t) d X_{t+1}}{p} = u_{t+1} + \epsilon_{t+1} CVaR_{X_{t+1}} (\text{令 } r_{t+1} = u_{t+1} + \epsilon_{t+1} X_{t+1}),$$

因此

$$CVaR_{r_{t+1}} = u_{t+1} + \epsilon_{t+1} CVaR_{X_{t+1}}, \tag{1.7}$$

其中  $CVaR_{X_{t+1}}$  和  $CVaR_{r_{t+1}}$  分别是在  $t+1$  时刻  $X_{t+1}$  和  $r_{t+1}$  给定概率水平为  $p$  的 CVaR 的值.

**2 数值模拟结果与分析**

在已经知道  $X$  的分布和时间序列  $\{r_n, n = 1, 2, \dots, t\}$  以及 ARMA-GARCH 模型的阶数 (模型的参数未知) 的前提下, 检验 ARMA-GARCH 模型估计给定概率水平为  $p$  的 VaR 与 CVaR 值的准确性. 本

文进行如下数值模拟。

**真值:** 假设已经知道  $X$  的分布和 ARMA-GARCH模型的参数,如果给出相应的初值,就可以算出一组时间序列,记为  $\{r_n, n = 1, 2, \dots, t\}$ ,这时根据 (1.6)式和 (1.7)式就可以算出给定概率水平的 VaR与 CVaR的值。

**估计值:** 由于已经知道  $X$  的分布和时间序列  $\{r_n, n = 1, 2, \dots, t\}$ ,可以用极大似然估计法<sup>[3]</sup>(用 Eview5软件操作)来估计 ARMA-GARCH模型的参数,然后在模型新的参数前提下根据 (1.6)式和 (1.7)式算出给定概率水平的 VaR与 CVaR的值。

**相对误差:** 在确定  $X$  的分布和 ARMA-GARCH模型前提下,由估计值和真值算出相对误差(估计值和真值的差再除以真值),因为相对误差体现估计值和真值的接近程度,相对误差绝对值越小,说明估计值和真值越接近,相对误差为 0结果最好,此时表明估计值和真值相同。所以相对误差绝对值的大小可以判断给定概率水平的 VaR与 CVaR的准确性,如果相对误差绝对值很小甚至接近 0,就可以确定 ARMA-GARCH模型能较准确地估计给定概率水平的 VaR与 CVaR。

为了方便数值模拟,选取 ARMA(1, 0)-GARCH(1, 1)模型:

$$r_t = 0.001 + 0.3r_{t-1} + a_t,$$

$$a_t = \epsilon_t X_t,$$

$$\epsilon_t^2 = a_0 + 0.5a_{t-1}^2 + 0.45\epsilon_{t-1}^2,$$

其中  $X$  分别来自标准正态分布(标准  $t$  分布), student T分布, Skewed-T分布(偏斜  $t$  分布),广义误差分布。这里取  $\epsilon_1$ 和  $r_1$ 初值分别为 0.045和 0.05,根据递推式得到一个时间序列  $\{r_n, n = 1, 2, \dots, t\}$ ,  $t = 500$ 。

由表 1的结果可以看出,相对误差绝对值控制在 1.0%和 2.5%范围内,最小为 1.0%。

表 1  $\epsilon_t$ 服从标准正态分布时 VaR和 CVaR的模拟结果  
Table 1 VaR and CVaR simulation results for  $\epsilon_t$  in standard normal distribution

概率水平 Probability level(%)	真值 True value		估计值 Estimate value		相对误差 Relative error(%)	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR
1	0.138	0.156	0.135	0.153	-2.2	-1.9
2	0.121	0.144	0.118	0.140	-2.5	-2.8
3	0.111	0.133	0.109	0.131	-1.8	-1.5
5	0.097	0.120	0.095	0.118	-2.0	-1.6
10	0.075	0.102	0.074	0.101	-1.3	-1.0

由表 2结果可以看出:(1)估计给定概率水平的 VaR,相对误差的绝对值随着概率水平的增大而增

大,最小为 0.5%,最大为 5.0%。(2)估计给定概率水平的 CVaR,相对误差的绝对值随都都很小,在 0与 2.0%之间。

表 2  $\epsilon_t$ 服从自由度为 4的标准分布时, VaR与 CVaR的模拟结果

Table 2 VaR and CVaR simulation results for  $\epsilon_t$  in standard normal distribution of freedom 4

概率水平 Probability level(%)	真值 True value		估计值 Estimate value		相对误差 Relative error(%)	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR
1	0.202	0.276	0.201	0.279	0.5	1.0
2	0.165	0.228	0.162	0.229	-2.0	0.4
3	0.145	0.203	0.141	0.203	-3.3	0
5	0.121	0.175	0.116	0.173	-4.2	-1.0
10	0.091	0.140	0.087	0.136	-5.0	-2.0

表 3模拟  $X$ 服从自由度为 5偏斜度为 0.5的偏斜  $t$ 分布的情况。表 4模拟参数为 1.7的广义误差分布时的情况。由表 3可以看出:(1)估计给定概率水平的 VaR,相对误差的绝对值较小,最小为 1.2%,最大为 4.0%。(2)估计给定概率水平的 CVaR,相对误差都都很小,在 0.5%与 2.3%之间。

表 3 VaR和 CVaR的模拟结果  
Table 3 VaR and CVaR simulation results

概率水平 Probability level(%)	真值 True value		估计值 Estimate value		相对误差 Relative error(%)	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR
1	0.800	1.069	0.810	1.051	1.3	-1.6
2	0.651	0.892	0.670	0.887	3.0	-0.5
3	0.570	0.797	0.580	0.780	2.0	-2.1
5	0.473	0.685	0.490	0.677	4.0	-1.2
10	0.348	0.544	0.355	0.531	2.5	-2.3

表 4 VaR和 CVaR的模拟结果  
Table 4 VaR and CVaR simulation results

概率水平 Probability level(%)	真值 True value		估计值 Estimate value		相对误差 Relative error(%)	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR
1	0.234	0.268	0.242	0.276	3.4	2.9
2	0.206	0.244	0.211	0.250	2.4	2.4
3	0.189	0.228	0.187	0.230	-1.0	0.8
5	0.167	0.208	0.172	0.203	3.0	-2.4
10	0.133	0.178	0.138	0.181	3.7	1.7

表 1~ 4的结果表明, ARMA-GARCH模型能够准确地估计给定概率水平为  $p$ 的 VaR与 CVaR。从整体上讲,估计 CVaR的相对误差绝对值比估计 VaR的相对误差绝对值略低,估计效果更好。

### 3 实例验证分析

取上证 A股大同煤业股票的日收盘价(光大证券),时间从 2007年 5月 25日到 2008年 9月 2日共 230个数据。以这些数据来拟合模型并估计下一期给定概率水平的 VaR与 CVaR。经过计算,收益率  $r_t, t$

= 1, 2, ..., 229, 总共有 229 个, 其中股票收盘价的对数之差定义为股票收盘格变化所带来的收益率。

时间序列  $\{r_t, t = 1, 2, \dots, 229\}$  模型主要由均值方程和波动率方程确定。由于  $\{r_t, t = 1, 2, \dots, 229\}$  自相关和偏自相关 (图 1) 都具有一阶截尾性, 因此均值方程用 ARMA(1, 1) 来拟合。由于误差平方自相关和偏自相关 (图 2) 都具有一阶截尾性, 因此波动率方程用 GARCH(1, 1) 模型来拟合。

所以可用以下 ARMA(1, 1)-GARCH(1, 1) 模型为时间序列  $\{r_t, t = 1, 2, \dots, 229\}$  建模:

$$r_t = Q + Qr_{t-1} - \theta_1 a_{t-1} + a_t,$$

$$a_t = \varphi X_t,$$

$$\varphi_t^2 = a_0 + \tau_1 a_{t-1}^2 + U_t \varphi_{t-1}^2,$$

其中  $Q, Q, \theta_1, a_0, \tau_1, U_t$  为待估计的参数。

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.174	0.174	7.0221	0.008	
2	-0.087	-0.121	8.7785	0.012	
3	0.025	0.066	8.9260	0.030	
4	0.063	0.036	9.8480	0.043	
5	0.051	0.043	10.465	0.063	
6	-0.081	-0.095	12.039	0.061	
7	-0.076	-0.038	13.417	0.063	
8	-0.017	-0.020	13.485	0.096	
9	-0.039	-0.044	13.849	0.128	
10	0.023	0.048	13.975	0.174	
11	0.027	0.020	14.149	0.225	
12	0.035	0.040	14.449	0.273	

图 1  $\{r_t, t = 1, 2, \dots, 229\}$  自相关和偏自相关

Fig. 1 Autocorrelation and partial autocorrelation of  $\{r_t, t = 1, 2, \dots, 229\}$

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.189	0.189	8.2297		
2	0.065	0.030	9.1962		
3	0.147	0.134	14.234	0.000	
4	0.024	-0.030	14.370	0.001	
5	-0.013	-0.023	14.411	0.002	
6	0.081	0.073	15.963	0.003	
7	-0.019	-0.047	16.050	0.007	
8	-0.011	0.003	16.078	0.013	
9	-0.020	-0.039	16.171	0.024	
10	-0.061	-0.044	17.052	0.030	
11	-0.096	-0.075	19.282	0.023	
12	-0.062	-0.032	20.218	0.027	

图 2 误差平方自相关和偏自相关

Fig. 2 Square error autocorrelation and partial autocorrelation

表 5 中 Jarque-Bera 统计量结果和 probability 值表明收益数列遵循正态分布的假设被拒绝, 从 skewness 系数可以知道, 收益数列具有负的偏斜度, kurtosis 的值为 3.1708, 大于 3, 具有比标准正态分布更高的峰度。由图 3 可以看出收益数列分布具有厚尾性质。因此  $X_t$  的分布用偏斜  $t$  分布来拟合。

表 5 收益率数列的描述统计量

Table 5 Description statistic of return sequence

mean	median	max	min	sta. dev	skewness	kurtosis	JB	p
-0.0017	0.0007	0.0955	-0.1055	0.0436	-0.1755	3.1708	1.454	0.483

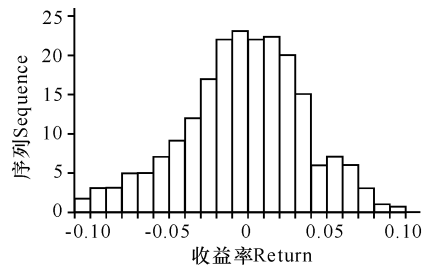


图 3 收益率序列

Fig. 3 Return sequence

用极大似然估计模型的参数, 最终得到模型:

$$r_t = -0.09683 - 0.6910r_{t-1} + 0.806a_{t-1} + a_t,$$

$$a_t = \varphi X_t,$$

$$\varphi_t^2 = 0.0004 + 0.01a_{t-1}^2 + 0.9\varphi_{t-1}^2.$$

估计得到偏斜  $t$  分布的自由度为 3, 偏斜度为 0.02

估计  $r_t$  下一期给定概率水平的 VaR 与 CVaR 值

见表 6。

表 6 不同概率水平下 VaR 值和 CVaR 值

Table 6 VaR value and CVaR value in different probability level

P (%)	VaR	CVaR
1	0.155	0.286
2	0.099	0.240
3	0.071	0.165
5	0.041	0.120
10	0.005	0.070

从表 6 结果可以看出: (1) 随着给定概率水平  $p$  的减少, VaR 与 CVaR 的值增大。投资者可以根据不同的概率对应不同的风险准备相应的资金避免大同煤业股票价格下跌带来的风险。(2) 估计给定同一概率水平的 VaR 与 CVaR, CVaR 的值总比 VaR 的值大。说明如果以 CVaR 来衡量大同煤业股票的风险, 则需要投入更多的资金。(3) VaR 与 CVaR 都是风险度量, 但是 CVaR 比 VaR 更能体现风险度量, 我们更倾向于根据 CVaR 的值准备相应的基金来避免投资大同煤业股票带来的风险。

参考文献:

- [1] 王耀. GARCH 模型在计算上海股市风险价值中的应用研究 [J]. 经济问题探索, 2007(8): 153-157.
- [2] 刘艳春, 高立群, 王珂. 基于 garch 的 VaR 计算 [C]. 中国控制与决策学术论文集, 2005 1617-1619.
- [3] 徐炜, 黄炎龙. GARCH 模型与 VaR 的度量研究 [J]. 数量经济技术经济研究, 2008(1): 120-132.
- [4] 罗付岩, 唐邵玲. 基于 fatted garch 的 VaR 模型 [J]. 系统工程, 2005, 23(11): 29-33.

(责任编辑: 尹 闯 邓大玉)