

# 耗散电容支路的介观 RLC 并联电路中电流和电压的真 空量子涨落

## The Quantum Fluctuations of the Voltage and Current of the Mesoscopic Parallel RLC Circuit with Dissipative Capacitance Branch Circuit in Vacuum State

易施光, 杨庆怡\*, 贾 靖

YI Shi-guang, YANG Qing-yi\*, JIA Jing

(广西大学物理科学与工程技术学院, 广西南宁 530004)

(College of Physical Science and Engineering Technology, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

**摘要:** 借鉴阻尼谐振子的量子力学处理的研究思想, 对电容支路存在耗散的介观 RLC 并联电路进行量子化, 研究电路在真空态下各支路中电流和电压的量子涨落. 结果表明, 电路中各支路电流和电压的量子涨落均随时间而衰减, 涨落的衰减因子相同, 但是系数不同, 然而耗散电阻对各支路的量子涨落均有影响.

**关键词:** 量子光学 阻尼谐振子 介观电路 真空态 量子涨落

中图分类号: O431.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)04-0421-03

**Abstract** By referring to the idea of dealing with damped harmonic oscillator in quantum mechanics, the mesoscopic parallel RLC circuit with dissipative capacitance branch circuit is quantized. On this basis, the quantum fluctuations of the voltage and current of each branch circuit in vacuum state are studied. The result shows that the quantum fluctuations of the voltage and current of each branch circuit are related with the parameters of the circuit elements, and decay according to exponent along with time, and that the attenuations of the quantum fluctuations are the same, but their coefficients are different, and that the quantum fluctuations of the voltage and current of each branch circuit are affected by the dissipative resistance.

**Key words** quantum optics, damped harmonic oscillator, mesoscopic circuit, vacuum state, quantum fluctuation

随着超大规模集成电路的发展, 由于元件尺寸趋于介观尺度而需要考虑元件和电路的量子效应. 早在上世纪 70 年代 Louisell<sup>[1]</sup>对 LC 电路的量子化及相关的量子效应进行了研究. 近年来, 由于介观物理学的兴起, 使得介观电路的量子效应受到广泛的关注. 对电路量子效应的研究首先需要对电路进行量子化, 利用阻尼谐振子模型<sup>[2,3]</sup>和构造电路和拉格朗日函数<sup>[4,5]</sup>是对电路进行量子化的常用方法. RLC 电路是集成电路中基本而典型的电路, 学者们通过不同的量

子化手段对 RLC 电路进行量子化以及电路中的电流和电压等正则变量在各种量子态下的量子涨落进行了广泛地研究<sup>[3-10]</sup>. 对并联 RLC 电路来说, 在理想情况下电感支路和电容支路不存在耗散, 从而在两个支路中没有耗散电阻. 在实际情况下, 由于频率等因素的影响使得电感支路和电容支路中的电阻效应不能忽略. 电感支路中耗散电阻对电路量子效应产生的影响已得到考虑<sup>[8,9]</sup>. 电容支路中耗散电阻对电路量子效应产生的影响的研究未见报道. 在此, 我们利用阻尼谐振子模型并借鉴于彭桓武先生的量子力学处理方法<sup>[3]</sup>研究电容支路存在耗散的并联 RLC 电路的量子化及电路中的电流与电压在真空态下的量子涨落.

收稿日期: 2009-03-25

作者简介: 易施光 (1973-), 男, 硕士研究生, 主要从事量子光学和介观电路量子特性的研究.

\* 通讯作者.

# 1 耗散电容支路的介观 RLC 并联电路的量子化

电容支路存在耗散的介观 RLC 并联电路的电路图如图 1 所示,

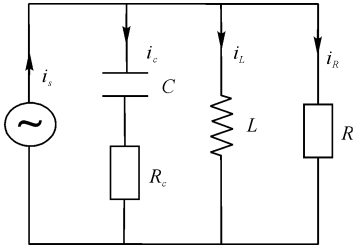


图 1 电容支路存在耗散的介观 RLC 并联电路

Fig. 1 The mesoscopic parallel RLC circuit with dissipative capacitance branch circuit

图 1 中,  $L$  为电感线圈的自感系数,  $i_L$  为电感支路的电流,  $R$  为并联阻尼电阻,  $i_R$  为电阻支路电流,  $C$  为并联电容器的电容,  $R_c$  为电容器支路的耗散电阻,  $i_c$  为电容支路电流,  $i_s(t)$  为信号源. 根据基尔霍夫定律得到电路的电流方程为

$$LC(1 + \frac{R_c}{R}) \frac{d^2 \dot{i}}{dt^2} + (R_c C + \frac{L}{R}) \frac{d\dot{i}}{dt} + \dot{i} = i_s(t) + R_c C \frac{di_s(t)}{dt}, \quad (1)$$

利用  $u = L di_L / dt$  可以将 (1) 式表示为

$$\dot{u} = - \frac{R R_c C + L}{LC(R + R_c)} u - \frac{R}{(R + R_c) C} \dot{i} + \frac{R}{(R + R_c) C} i_s(t) + \frac{R_c}{R + R_c} \frac{di_s(t)}{dt}. \quad (2)$$

由 (1) 式和 (2) 式得

$$\frac{\partial \dot{i}}{\partial \dot{i}} + \frac{\partial u}{\partial u} = - \lambda, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} [\dot{i}, u] = - \lambda [\dot{i}, u], \quad (4)$$

其中,  $\lambda = (R R_c C + L) / LC(R + R_c)$ .

在海森堡表象中, 尽管运动方程 (2) 的形式不变, 但是 (3) 式表明在有耗散的情况下,  $i_L$  和  $u$  不构成共轭变量, 从而对 (2) 式进行量子化时首先需要将  $i_L$  和  $u$  转化为满足对易关系  $[X, Y] = j\hbar$  的物理量. 按照正则量子化方案, 考虑由非正则变量  $\dot{i}$  和  $u$  到正则共轭变量  $I$  和  $U$  的如下变换<sup>[3]</sup>

$$\dot{i} = I f^{-1} \exp(-\lambda t), \quad (5)$$

$$u = L i_L = (U - \lambda L I) f^{-1} \exp(-\lambda t), \quad (6)$$

其中,  $I$  和  $U$  分别为复正则电流和复正则电压,  $f$  为单位时间常数. 在进行 (5) 式、(6) 式变换的情况下, 变量  $I$  和  $U$  满足对易关系

$$[I, U] = j\hbar, \quad (7)$$

从而构成一对共轭变量, 实现由非正则变量  $i_L$  和  $u$

到正则共轭变量  $I$  和  $U$  的转换, 并且

$$I = \frac{U}{L}, \quad (8)$$

$$U = -Lk^2 I + \frac{f}{R + R_c} \left[ \frac{R}{C} i_s(t) + R_c \frac{di_s(t)}{dt} \right] \exp(\lambda t). \quad (9)$$

其中,  $k = \sqrt{(k_0^2 - \lambda^2)(R + R_c) / (R_c + R)}$ ,  $k_0^2 = 1/LC$ .

由 (8) 式和 (9) 式及正则哈密顿方程  $I = \partial H / \partial U$ ,  $U = -\partial H / \partial I$  可以得到 (1) 式对应的哈密顿量为

$$H = \frac{U^2}{2L} + \frac{1}{2} L k^2 I^2 - \frac{f I}{R + R_c} \left[ \frac{R}{C} i_s(t) + R_c \frac{di_s(t)}{dt} \right] \exp(\lambda t), \quad (10)$$

引入推广的湮灭和产生算符

$$A = \frac{1}{\sqrt{2Lk\hbar}} (LkI + jU), \quad A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2Lk\hbar}} (LkI - jU), \quad (11)$$

由 (7) 式和 (11) 式可以得

$$[A, A^\dagger] = 1, \quad (12)$$

则相应的哈密顿量为

$$H = \hbar k (A^\dagger A + \frac{1}{2}) - (A + A^\dagger) S(t), \quad (13)$$

其中,

$$S(t) = \frac{\hbar f}{2Lk} \left[ \frac{R}{R + R_c} i_s(t) + R_c \frac{di_s(t)}{dt} \right] \exp(-\lambda t). \quad (14)$$

从而实现电容支路中存在耗散的介观 RLC 并联电路的量子化.

## 2 耗散电容支路的介观 RLC 并联电路中电流和电压的真空量子涨落

### 2.1 电感支路

当系统处于真空态  $|0\rangle$  (即  $A|0\rangle = 0$ ) 时,  $S(t) = 0$ , 由 (5) 式、(6) 式及 (12) 式可以得到电感支路中的电流和电压分别为

$$i_L = \frac{\hbar}{2Lk} f^{-1} \exp(-\lambda t) (A + A^\dagger), \quad (15)$$

$$u = \frac{Lk\hbar}{2} f^{-1} \exp(-\lambda t) [j(A^\dagger - A) - \frac{\lambda}{k} (A^\dagger + A)]. \quad (16)$$

利用  $\langle (\Delta X)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$  可以求出电感支路中电流和电压在真空态下的量子涨落为

$$\langle (\Delta i_L)^2 \rangle = \frac{\hbar}{2Lk} f^{-2} \exp(-2\lambda t), \quad (17)$$

$$\langle (\Delta u)^2 \rangle = \frac{\hbar R}{2kC(R + R_c)} f^{-2} \exp(-2\lambda t). \quad (18)$$

## 2.2 阻尼电阻支路

在阻尼电阻支路中,  $u_R = u$ ,  $i_R = u_R / R = u / R$ . 类似于电感支路的处理方法可以得到电流与电压在真空态下的量子涨落为

$$\langle (\Delta i_R)^2 \rangle = \frac{\hbar}{2kCR(R_C + R)} f^2 \exp(-2\lambda t), \quad (19)$$

$$\langle (\Delta u_R)^2 \rangle = \frac{\hbar R}{2kC(R_C + R)} f^2 \exp(-2\lambda t). \quad (20)$$

## 2.3 电容支路

同样可以得到电容支路中电流与电压在真空态下的量子涨落为

$$\langle (\Delta i_C)^2 \rangle = \frac{\hbar R}{2kL(R_C + R)} f^2 \exp(-2\lambda t), \quad (21)$$

$$\langle (\Delta u_C)^2 \rangle + \langle (\Delta u_{R_C})^2 \rangle = \frac{\hbar k_0^2 [L(R_C + R) + R_C^2 CR]}{2k(R_C + R)} f^2 \exp(-2\lambda t), \quad (22)$$

从这里可以看到: (1) 各支路中电流与电压的量子涨落均随时间衰减, 并且衰减因子相同, 而衰减因子  $\exp(-2\lambda t)$  与电路的结构有关; (2) 各支路中电流与电压的量子涨落系数与支路的构成有关; (3) 电容支路中的耗散电阻  $R_C$  对各支路量子涨落中的衰减因子及其系数都产生影响, 并且对衰减因子产生的影响相同, 对其系数产生的影响不同.

## 3 结论

本文对电容支路存在耗散的介观 RLC 并联电路进行了量子化, 并讨论了各支路的电流和电压在真空态下的量子涨落以及分析了耗散电阻  $R_C$  对电感支路和电容支路的量子涨落所产生的影响. 结果表明, 耗散电阻对 3 个支路中电流和电压的量子涨落均产生

影响并随时间衰减, 并且量子涨落的衰减因子相同, 但是衰减因子前的系数不同. 根据电路的量子涨落特性可以通过调节元件的参数来控制电路的量子噪声, 这对介观电路的设计具有一定的理论指导意义.

参考文献:

- [1] Louisell W. H. Quantum statistical properties of radiation [M]. New York: John Wiley, 1973: 270-314.
- [2] Dekker H. Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator [J]. Phys Rev A, 1989, 39(22): 5515-5522.
- [3] 彭桓武. 阻尼谐振子的量子力学处理 [J]. 物理学报, 1980, 29(7): 1084-1089.
- [4] 杨庆怡, 韦联福. 利用外源驱动介观 RLC 电路来制备压缩态光场 [J]. 光子学报, 2001, 30(3): 271-275.
- [5] 刘清, 邹丹, 嵇英华. 交流源作用下介观 RLC 电路系统量子态随时间的演化 [J]. 物理学报, 2006, 55(4): 1596-1601.
- [6] 汪仲清. 介观 RLC 电路在热真空态下的量子涨落 [J]. 物理学报, 2002, 51(8): 11808-11810.
- [7] 顾永建. 压缩真空态下介观 RLC 电路中电荷和电流的量子涨落 [J]. 物理学报, 2000, 49(5): 0965-0968.
- [8] 嵇英华, 叶志清, 雷敏生. 介观含源 RLC 并联电路的量子涨落 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2002, 26(2): 150-152.
- [9] 韩玖荣, 姜玉梅, 李淑玲, 等. 介观生物细胞等效电路的量子化 [J]. 量子电子学报, 2003, 20(3): 0198-0202.
- [10] 梁麦林, 袁兵. 关于介观有源 RLC 电路的量子化及其量子涨落 [J]. 量子电子学报, 2002, 19(1): 53-56.

(责任编辑: 邓大玉)

## 科学家成功绘制人体细菌分布图

科学研究人员对 9 名健康志愿者身上 27 个部位的细菌群落进行了长达 3 个月的深入观察分析. 在 3 个月内, 科学研究人员在志愿者洗澡 1~2h 后分别对每名志愿者进行 4 次细菌采样, 运用最新电脑技术及基因序列, 绘制出人体不同部位细菌分布的概况和轮廓. 人体细菌分布图显示, 不仅人与人之间菌群分布有别, 同一个体不同部位菌群分布也不相同, 而且人体同一部位在不同时间菌群分布也有变化. 尽管如此, 菌群分布还是呈现一定模式. 人体腋窝及脚底菌群分布变化不大, 研究人员推测可能是这两处潮湿避光环境所致. 头部几个部位, 如额头、鼻孔、耳朵及头发等部位主要由一种特殊类型的细菌占主导, 躯体和四肢则由另一种不同菌群“霸占”. 口腔菌群分布变化最小.

绘制出人体细菌群落分布图, 就可以找出健康人体菌群分布的正常状态, 为进一步研究人体在疾病状态下菌群分布提供基准, 探索从特定区域寻找与疾病相关的变化. 人体细菌群落分布图对未来临床医学研究具有重大意义.

(据科学网)