DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2010.01.002
广西科学 Guangxi Sciences 2010, 17(1): 5~ 7

# 极大子群的 $\theta$-偶与群的可解性

# Theta-pairs for Maximal Subgroups and the Solvability of a Finite Groups

高 辉
GAO Hui

(大连水产学院理学院,辽宁大连 116023)
(Science Institute, Dalian Fisheries University, Dalian, Liaoning, 116023, China)

摘要: 利用有限群极大子群的极大 $\theta$ 偶的性质,在限制条件较相关文献弱的情形下,研究群的可解性.

关键词: 极大子群 $\theta$-偶 Sylow 塔 可解
中图法分类号: O152.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2010)01-0005-03

**Abstract** By using the properties of theta-pairs for maximal subgroups, the solvability of a finite subgroup is discussed under weaker conditions

**Key words** maximal subgroups, $\theta$-pairs, Sylow tower, solvability

1990年, N. P. Mukherjee等[1]引进极大子群的 $\theta$ 偶的概念,为研究群的结构提供了新的途径.此后,关于极大子群的 $\theta$-偶和极大子群的 $\theta$-偶对有限群结构影响的研究取得了丰富的成果[2,3].其中李世荣[3]证明: $G$是超可解的当且仅当对于 $G$的每个有合数指数的极大子群 $M$, $\theta(M)$ 中有一个极大元使得 $(C,D)$, $G = MC$,且 $|C/D|$ 无平方因子.

本文首先适当修改李世荣[3]的关于 $|C/D|$ 无平方因子的条件,得到关于群 $G$可解的一个结果;其次适当修改极大子群的 $\theta$-偶的条件,得到群 $G$为可解.

文中所用符号皆为标准的,涉及的群均是指有限群.

## 1 定义及基本结果

**定义 1**[1] 设 $M$是 $G$的极大子群, $G$的子群偶 $(C,D)$ 称为关于 $M$的 $\theta$-偶.

若 (i) $D \trianglelefteq G$, $D < C$; (ii) $\langle M, C\rangle = G$, $\langle M, D\rangle = M$; (iii) $C/D$不真含 $G/D$的异于 1的正规子群.记 $\theta(M) = \{(C,D) \mid (C,D)$ 为 $G$的关于 $M$的 $\theta$-偶$\}$.

若在 $\theta(M)$中定义偏序 $\leq$ $(C,D) \leq (C',D')$,若 $C \leqslant C'$.易知 $\theta$-偶集 $\theta(M)$ 非空且关于以上偏序必有极大元.

若 $(C,D) \in \theta(M)$ 且 $C \trianglelefteq\trianglelefteq G$,称 $(C,D)$ 为 $M$的一个次正规 $\theta$-偶.

**定义 2**[4] 设 $G$是有限群, $|G| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$.若存在 $G$的正规群列: $G = G_0 > G_1 > \cdots > G_s = 1$使得 $|G_{i-1}/G_i| = p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, \cdots, s$,则称群列 $G = G_0 > G_1 > \cdots > G_s = 1$为 $G$之一 Sylow 塔,而称 $G$为一具有 Sylow 塔的群.

**定义 3** 设 $M \lessdot G$, $g(G) = \{M \mid |G:M| =$ 合数,且 $Z(G:M)$ 含有平方因子$\}$.

**定义 4** 引入下列极大子群的集合: (1) $F^s(G)$[5] $= \{M \lessdot G \mid |G:M| =$ 合数$\}$, $L(G)$[5] $= \bigcap \{M \mid M \in F^s(G)\}$.若 $F^s(G) = \varnothing$,则定义 $L(G) = G$. 且 $L(G)$ 是超可解的. (2) $S(G)$[6] $= \{M \lessdot G \mid M$ 非幂零$\}$, $H_2(G)$[6] $= \bigcap \{M \mid M \in S(G)\}$, 且 $H_2(G)$[6] 是可解的.

**引理 1**[3] 设 $M$为群 $G$的极大子群, $M$有一个极大 $\theta$-偶 $(C,D)$.定义 $C' = CM_G$,且设 $X$是群系,则下列结论成立:

(a) $M$有一个极大 $\theta$-偶 $(K, M_G)$,其中 $K \trianglelefteq G$,或者 $K = C' = CM_G$.

(b) 若 $C/D \in X$,则 $K/M_G \in X$.

**引理 2**[3] 设 $M \lessdot G$, $(C, M_G)$是 $M$的一个极大 $\theta$-偶,若 $N \leqslant M$且 $N \trianglelefteq G$,则 $(C/N, M_G/N)$ 是 $M/N$的极大 $\theta$-偶.

收稿日期: 2009-04-10
修回日期: 2009-06-11
作者简介: 高 辉(1978-),女,讲师,主要从事有限群研究.

**引理 3**[7] 令 $D$是 $G$的一个子群,$|D|_2\leqslant 2$且 $D$在 $G$中的指数为素数,则 $G$可解.

**引理 4**[7] 设 $G=AB$,子群 $A,B$的 Sylow 2-子群的阶不超过 2,那么 $G$是可解的.

**引理 5** 设 $G$非可解,且 $G$的每个核为 1的极大子群 $M$都存在一个极大 $\theta$-偶 $(C,M_G)=(C,1)$.若 $N$是 $G$的唯一极小正规子群,且 $N$非可解,而 $C$是有 Sylow塔,则 $C$是 $G$的极大子群.

**证明** 若 $C\trianglelefteq G$,则 $N\leqslant C$.由 $C$有 Sylow塔知,$N$可解,矛盾.因此 $C\ntrianglelefteq G$,令 $E=CN$,则 $C<E$.

情形 1 若 $C\cap N=1$,由 $N\ntriangleleft C$,及 $N$的唯一极小正规性知,$C_E=1$,故 $C$在 $E$中 $c$-正规.即 $E$有一个可解的极大子群 $C$,且 $C$在 $E$中 $c$-正规,于是 $E$可解,从而 $N$可解,矛盾.

情形 2 若 $C\cap N\neq 1$,令 $B=C\cap N$,则 $B\trianglelefteq C$,且 $B$是有 Sylow塔.令 $p$为 $|B|$ 的最大素因子,$P\in Syl_p(B)$,则 $P\trianglelefteq B$.由 $P$ char $B\trianglelefteq C$,故 $P\trianglelefteq C$,但是 $P\ntrianglelefteq N$.否则,$P\trianglelefteq N$,于是 $1\neq P\leqslant F(N)<N$.又 $F(N)$ char $N\trianglelefteq G$,可推出 $F(N)\trianglelefteq G$,与 $N$是 $G$的极小正规子群相矛盾.于是 $C\leqslant N_E(P)<E$,故 $C=N_E(P)$.从而 $N_N(P)=N_E(P)\cap N=C\cap N=B$,则 $P\in Syl_p(N)$.否则,$\exists P^*\in Syl_p(N)$使 $P<P^*$,于是 $P<N_{P^*}(P)=P^*\cap N_N(P)=P^*\cap B$,矛盾.故由 Frattini论断知,$G=N_G(P)N$.又 $N_G(P)<G$,即 $\exists H<G$使 $N_G(P)\leqslant H<G$,于是 $G=HN$.因 $C=N_E(P)\leqslant N_G(P)\leqslant H$,故 $C\leqslant H$.假设 $C<H$,因 $(C,1)$是 $M$的极大 $\theta$-偶,所以 $(H,1)$不是 $M$的极大 $\theta$-偶.由 $\theta$-偶的定义知,$H$中包含 $G$的非平凡正规子群.故 $N\leqslant H$,所以 $G=NH=H$,与 $H<G$相矛盾.因此 $C=H$,即 $C$是 $G$的极大子群.

**引理 6** $H\trianglelefteq\trianglelefteq G$且 $H$幂零,则 $H\leqslant F(G)$.

**证明** 因 $H\trianglelefteq\trianglelefteq G$,可设 $G$有次正规群列 $1\leqslant\cdots\leqslant H\leqslant H_1\leqslant H_2\leqslant\cdots\leqslant G$.由 $H$幂零,且 $H\trianglelefteq H_1$可推出,$H\leqslant F(H_1)$.又 $F(H_1)$ char $H_1\trianglelefteq H_2$,故 $F(H_1)\trianglelefteq H_2$.而 $F(H_1)$幂零,所以 $F(H_1)\leqslant F(H_2)$.依次类推 $H\leqslant F(H_1)\leqslant F(H_2)\leqslant\cdots\leqslant F(G)$,故 $H\leqslant F(G)$.

**引理 7**[4] 群 $G$是超可解的当且仅当对 $G$的每个有合数指数的极大子群 $M$,$Z(G:M)$无平方因子.

**引理 8**[4] 设 $H$为 $G$的极大子群,若 $H$幂零,且 $H$的 Sylow 2-子群的幂零类$\leqslant 2$,则 $G$可解.

## 2 主要结果

**定理 1** 令 $G$是一个群,假设对于 $G$的每个极大子群 $M\in\mathfrak{g}(G)$,$M$有一个极大 $\theta$-偶 $(C,D)$使得 $C/D$有 Sylow塔,$|C/D|_2\leqslant 2$并且 $G=MC$,那么 $G$可解.

**证明** 假设定理不成立,令 $G$是一个极小阶反例.首先证明 $\mathfrak{g}(G)\neq\varnothing$,且 $G$非单.假如 $\mathfrak{g}(G)=\varnothing$,则有 2种情况成立:(1)对于 $G$的每个极大子群 $M$,均有 $|G:M|=$素数;(2)对于 $G$的每个有合数的极大子群 $M$,$Z(G:M)$无平方因子.无论(1)或(2),都可以由 Huppert定理或引理 7,推出 $G$超可解,矛盾.若 $G$是单群,则 $\forall M\in\mathfrak{g}(G)$,$(G,1)$是 $M$的唯一的极大 $\theta$-偶,使 $G$有 Sylow塔,$G$可解,矛盾.其次令 $N$是 $G$的极小正规子群,证明 $G/N$可解.若 $\mathfrak{g}(G/N)=\varnothing$,则 $G/N$可解.故 $\mathfrak{g}(G/N)\neq\varnothing$,对于 $\forall M/N\in\mathfrak{g}(G/N)$,则有 $M\in\mathfrak{g}(G)$.由引理 1及题设知,$M$中存在一个极大 $\theta$-偶 $(C,M_G)$使得 $C/M_G$有 Sylow塔,$|C/M_G|_2\leqslant 2$并且 $G=MC$,因 $N\leqslant M$,故 $(C/N,M_G/N)$是 $M/N$的极大 $\theta$-偶,且满足定理条件.由 $G$是极小阶反例知,$G/N$可解.进而可以推出 $N$是 $G$的唯一极小正规子群,且 $N$非可解.

$N$非可解,因此 $N\nleqslant L(G)$.即 $\exists H\in F^*(G)$使 $N\nleqslant H$,则 $G=HN$,且 $H_G=1$.若 $Z(G:H)$无平方因子,因 $N\nleqslant H$,故 $Z(G:H)=o(N)$无平方因子,因此 $N$超可解,矛盾.于是 $Z(G:H)$含有平方因子,即 $H\in\mathfrak{g}(G)$.由题设知,$H$有一个极大 $\theta$-偶 $(C^*,1)$使得 $C^*$有 Sylow塔,$|C^*|_2\leqslant 2$且 $G=HC^*$.由 $N$非可解知,$N\nsubseteq C^*\neq G$,且 $C^*_G=1$.由引理 5知,$C^*$是 $G$的极大子群.

最后证明 $C^*\in\mathfrak{g}(G)$.否则,$C^*\notin\mathfrak{g}(G)$,即有 $|G:C^*|=$素数,或者 $|G:C^*|=$合数,且 $Z(G:C^*)$无平方因子.若 $|G:C^*|=$素数,由引理 3知,$G$可解,矛盾.故 $|G:C^*|=$合数,但 $Z(G:C^*)$无平方因子,而 $Z(G:C^*)=|N|$,于是 $N$可解,矛盾.所以 $C^*\in\mathfrak{g}(G)$.由题设知,$C^*$中存在一个极大 $\theta$-偶 $(D,1)$使得 $G=C^*D$,且 $|D|_2\leqslant 2$.又因为 $|C^*|_2\leqslant 2$,由引理 4知,$G$可解,矛盾.

**定理 2** 假设 $G$是一个有限群,则 $G$可解当且仅当对于 $G$的任意极大子群 $M\in\mathfrak{g}(G)$,$M$有一个次正规极大 $\theta$-偶 $(C,D)$,使 $C/D$幂零.

**证明** 充分性:假设命题不成立,令 $G$是一个极小阶反例,设 $\mathfrak{g}(G)\neq\varnothing$.若 $G$是单群,对于 $G$的每个极大子群 $M\in\mathfrak{g}(G)$,$(G,1)$是 $M$的唯一的次正规极大 $\theta$-偶使 $G=G/1$幂零,从而 $G$可解,矛盾.令 $N$是 $G$的极小正规子群,我们可以断言 $G/N$可解.若 $\mathfrak{g}(G/N)=\varnothing$,则 $G/N$可解.若 $\mathfrak{g}(G/N)\neq\varnothing$,对 $\forall M/N\in\mathfrak{g}(G/N)$,则 $M\in\mathfrak{g}(G)$.由题设及引理 1知,$M$有一个次正规极大 $\theta$-偶 $(C,M_G)$使 $C/M_G$幂零.又 $N\leqslant M_G$,故 $G/N$满足定理的假设.由 $G$的极小

性得 $G/N$ 可解,且 $N$ 是 $G$ 的唯一极小正规子群.

$G$ 非可解,故 $N$ 非可解,于是 $N \nleq L(G)$.即 $\exists H \in F'(G)$ 使 $N \nleq H$,则 $G = HN$,且 $H_G = 1$.若 $|G:H|$ 无平方因子,因 $N \nleq H$,故 $|G:H| = o(N)$ 无平方因子,因此 $N$ 超可解,矛盾.于是 $|G:H|$ 含有平方因子,即 $H \in g(G)$.由题设知,$H$ 有一个次正规极大 $\theta$-偶 $(C_1, 1)$ 使 $C_1$ 幂零.由引理 6 知,$1 \neq C_1 \leq F(G) \neq G$,故 $N \leq F(G)$.从而推出 $N$ 可解,矛盾.

反之,假设 $G$ 可解,对 $G$ 的任一极大子群 $M$,存在主因子 $H/M_G$ 为 Abel 群,并且使得 $H \nleq M$, $M_G \leq M$,则 $(H, M_G)$ 为 $M$ 的正规 $\theta$-偶.因此 $(H, M_G)$ 也为 $M$ 的次正规极大 $\theta$-偶,并且满足定理条件.

**定理 3** $N$ 是 $G$ 的正规子群,对于任意不包含 $N$ 的非幂零极大子群 $M$,$M$ 中存在一个极大 $\theta$-偶 $(C, D)$ 使 $C/D$ 幂零,且 Sylow 2-子群的幂零类 $\leq 2$,则 $N$ 可解.

证明 假设定理不成立,令 $G$ 是一个极小阶反例.若 $S(G) = \varnothing$,则 $H_2(G) = G$ 可解,从而 $N$ 可解,矛盾.所以 $S(G) \neq \varnothing$,若 $G$ 是单群,则对于 $G$ 的任意的非幂零极大子群 $M$,$(G, 1)$ 是 $M$ 的唯一的极大 $\theta$-偶,则 $G$ 可解,矛盾.故 $G$ 非单.令 $R$ 是 $G$ 的极小正规子群,则 $NR/R \trianglelefteq G/R$.分 3 种情形证明 $NR/R$ 可解.

情形 1 若 $S(G/R) = \varnothing$,则 $H_2(G/R) = G/R$ 可解,从而 $NR/R$ 可解.

情形 2 若 $S(G/R) \neq \varnothing$,但 $NR/R$ 包含在 $G/R$ 的所有的非幂零极大子群中,则有 $NR/R \leq H_2(G/R)$.由 $H_2(G/R)$ 可解知,$NR/R$ 可解.

情形 3 若 $S(G/R) \neq \varnothing$,但 $G/R$ 中存在一个非幂零极大子群 $M/R$,使 $NR/R \nleq M/R$,所以 $N \nleq M \in S(G)$.由引理 1 及题设知,$M$ 中存在一个极大 $\theta$-偶 $(C, M_G)$ 使 $C/M_G$ 幂零,且 Sylow 2-子群幂零类 $\leq 2$.因 $R \leq M$,故 $(C/R, M_G/R)$ 是 $M/R$ 的极大 $\theta$-偶,且满足定理条件.由 $G$ 是极小阶反例知,$NR/R$ 可解.因此无论何种情形,均可以证明 $NR/R$ 可解.

若 $N \cap R = 1$,则 $NR/R \cong N$,于是 $N$ 可解,矛盾.因此 $R \cap N \neq 1$,所以 $R \leq N$,从而 $N/R$ 可解.因 $N$ 非可解,所以可推出 $R$ 是 $G$ 的唯一极小正规子群,且 $R$ 非可解.

因 $R$ 非可解,于是 $R \nleq H_2(G)$,即 $\exists L \in S(G)$ 使 $R \nleq L$,所以 $L_G = 1$.又 $R \leq N$,故 $N \nleq L$.于是由题设知,$L$ 有一个极大 $\theta$-偶 $(C_1, 1)$ 使 $C_1$ 幂零,且 Sylow 2-子群的幂零类 $\leq 2$.若 $R \leq C_1$,则 $R$ 可解,矛盾.故 $R \nleq C_1 \neq G$,且 $C_{1G} = 1$.取 $C_1 < H \leq G$,由引理 8 知,$H$ 可解.因 $(C_1, 1)$ 是 $L$ 的极大 $\theta$-偶,故 $(H, 1) \notin \theta(L)$.由 $\theta$-偶的定义知,$H$ 中包含 $G$ 的非平凡的正规子群.由 $R$ 的唯一极小正规性知,$R \leq H$.于是 $R$ 可解,矛盾.

参考文献:


[1] Mukherjee N P, Bhattacharya P. On theta pairs for a maximal subgroup[J]. Proc Amer Math Soc, 1990, 109: 589-596.

[2] 赵耀庆.有限群极大子群的 $\theta$-子群偶[J].数学学报,1997, 40(1), 67-72.

[3] Li Shirong. A note on theta pairs for maximal subgroups [J]. Communications In Algebra, 1998, 26(12): 4277-4284.

[4] 徐明耀,黄建华,李慧陵,等.有限群导引[M].北京:科学出版社,1999.

[5] Bhatia H C. A generalized Frattini subgroup of a finite group[D]. East Lansing: Michigan State Univ, 1972.

[6] 郭秀云.正规补 $p$-与幂零群的特征[J].数学杂志,1987, 7(4): 403-406.

[7] 钟祥贵.关于有限群极大子群的极大完备[J].广西科学,2002, 9(3): 161-163.


(责任编辑:邓大玉)

## 我国研制出新型人造纤维

在清晨薄雾散去之后,常常会有晶莹的露珠挂在蜘蛛网上。中国科学院和北京航空航天大学等机构的研究人员利用光学显微镜和电子显微镜观察研究蜘蛛网发现,在由两根纤维形成的“主干”蜘蛛丝上分布着许多由纳米级纤维构成的纺锤状微小凸起,当空气中的水分凝结到蜘蛛丝表面后,会在这些微小凸起地方汇集形成大滴的露珠。研究人员仿照蜘蛛丝这种独特的结构,利用尼龙纤维等材料制造出了类似的“吸水蜘蛛丝”。把这种新型的“吸水蜘蛛丝”材料置于空气中,空气中的水分能在这种材料表面凝结成水珠。这种新型的“吸水蜘蛛丝”材料有望将来用于从空气中获取水分,以及用于工业过滤等。

(据科学网)