DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2010.01.004
广西科学 Guangxi Sciences 2010, 17(1): 11～ 12, 21

5p阶亚循环群上连通 2度 Cayley有向图的正规性

On the Normality of Cayley Digraphs of Metacyclic Group of Order 5p of a Connected Valencies 2

覃建军[1],王　飞[2],周　玲[2]
QIN Jian-jun[1], WANG Fei[2], ZHOU Ling[2]

(1.南宁市第十五中学,广西南宁　530003; 2.新疆农业大学数理学院,新疆乌鲁木齐　830052)
(1. 15th Middle School of Nanning, Nanning, Guangxi, 530003, China; 2. College of Mathematics and Physics of Xinjiang Agricultural University, Urumchi, Xinjiang, 830052, China)

摘要: 利用群论方法,证明 5p阶亚循环群上连通 2度 Cayley有向图是正规性的.
关键词: Cayley有向图　亚循环群　正规性
中图法分类号: O157　　文献标识码: A　　文章编号: 1005-9164(2010)01-0011-02
Abstract The normality of Cayley digraphs of metacyclic group of order 5p of a connected valencies 2 is studied, and it is normal by the theories of group.
Key words Cayley digraphs, metacyclic group, normality

1995年,徐明曜[1]提出 Cayley有向图正规性的概念.但是后来同行们发现要决定 Cayley有向图何时正规,何时不正规,在绝大多数情况下很困难.尽管如此,对 Cayley有向图正规性的研究还是取得了一些成果: 王长群等[2]确定所有不连通的正规 Cayley有向图;李才恒[3]证明线性群 PSL$(2,q)$上所有 2度连通 Cayley有向图是正规性的; Baik等[4]证明交换群上绝大多数小度数连通 Cayley图是正规的.上述结果在对称图分类中已经得到应用,如徐明曜等[5]给出交换群上 4度连通 1-正则和弧传递 Cayley图的分类;冯衍全等[6,7]对正则 p-群上的 2度连通非正规 Cayley有向图进行了分类,确定 $2p^2$阶群上(p是素数)的 2度连通 Cayley有向图的正规性.我们对 $5p$阶亚循环群上 2度 Cayley有向图的正规性进行研究,并证明它是正规的.本文涉及的图都是有限、连通、简单、有向图.未定义而引用的群论及代数图论方面的概念可参阅文献[1].

1 预备知识

对一个图 X,其顶点集记作 $V(X)$,边集记作 $E(X)$. $V(X)$到自身并保持边不变的双射(即置换)全体关于映射的乘法构成一个群,称为图 X的全自同构群,记作 $\mathrm{Aut}(X)$.如果 $\mathrm{Aut}(X)$作用在 $V(X)$(或 $E(X)$)上传递,则称 X是点(或边)传递.

设 G是一个有限群,取 $S = G\backslash\{1\}$,则群 G关于其子集 S的 Coyly(有向)图 $X = \mathrm{Cay}(G,S)$定义为: (1) $V(X) = G$; (2) $E(X) = \{(g,sg) \mid g\in G, s\in S\}$.

由定义易知:

(1) G的单位元 1的邻域 $N(1) = S$;

(2) X连通当且仅当 $G=\langle S\rangle$;

(3) 由于 G的右正则表示 $R(G)\leqslant \mathrm{Aut}(X)$,所以 Coyly图都是点传递图;

(4) X是无向图当且仅当 $S^{-1} = S$.

定义 1.1 Cayley(有向)图 $X = \mathrm{Cay}(G,S)$叫做正规的,如果 $R(G)\trianglelefteq A = \mathrm{Aut}(X)$.

命题 1.1 (1) $N_A(R(G)) = R(G)\mathrm{Aut}(G,S)$,其中 $\mathrm{Aut}(G,S) = \{T\in \mathrm{Aut}(G) \mid S^T = S\}$. (2) $A = R(G)\mathrm{Aut}(G,S)$等价于 $R(G)\trianglelefteq A$.

命题 1.2 Cayley(有向)图 X正规当且仅当 $A_1 = \mathrm{Aut}(G, S)$,其中 A_1表示单位元 1在 A中的稳定子群.

$5p$阶亚循环群 G的构造如下:

$G=\langle a,b \mid a^5 = b^p = 1, a^{-1}ba = b^r, 1 < r < p, r^5 \equiv 1(\mathrm{mod}\,p)\rangle$.

若无特殊说明,以下所指的 $5p$阶亚循环群 G均形如上式.

收稿日期: 2009-08-11
作者简介: 覃建军(1963-),男,硕士,中学高级教师,主要从事代数图论研究

引理 1.1 设 G为 $5p$阶亚循环群,则有

(1) $b^y a^x = a^x b^{yr^x}$;

(2) $(a^{x_1}b^{y_1})(a^x b^y) = a^{x_1+x}b^{r^x y_1+y}$;

(3) $(a^x b^y)^k = a^{xk}b^{y\frac{r^{xk}-1}{r^x-1}}$;

(4) G中所有 5阶元组成的集合为 $\{a^k b^i | k = 1,2,3,4; i = 0,1,\cdots,p-1\}$.

证明 (1) 由 $a^{-1}ba = b^r$,则 $a^{-x}ba^x = b^{r^x}$,即 $ba^x = a^x b^{r^x}$,而 $b^y a^x = b^{y-1}ba^x = b^{y-1}a^x b^{r^x} = b^{y-2}a^x b^{2r^x} = \cdots = a^x b^{yr^x}$.

(2) 由 (1) 知,$b^{y_1}a^x = a^x b^{y_1 r^x}$,即得 (2).

(3) 对 k用数学归纳法.当 $k = 1$时 (3) 显然成立,进而

$$(a^x b^y)^{k+1} = (a^x b^y)(a^x b^y)^k = (a^x b^y)a^{xk}b^{y\frac{r^{xk}-1}{r^x-1}} = a^x(b^y a^{xk})b^{y\frac{r^{xk}-1}{r^x-1}} = a^{x+xk}b^{yr^{xk}}b^{y\frac{r^{xk}-1}{r^x-1}} = a^{x(k+1)}\cdot b^{y\frac{r^{xk+x}-r^{xk}+r^{xk}-1}{r^x-1}} = a^{x(k+1)}b^{y\frac{r^{x(k+1)}-1}{r^x-1}}.$$

(4) 由 (3) 知,$(a^x b^y)^5 = a^{5x}b^{y\frac{r^{5x}-1}{r^x-1}} = 1$,说明 $o(a^x b^y) = 5$.反之,$o(b^y)|p$.所以若 $o(a^x b^y) = 5$,必有 $x \equiv 1(\mathrm{mod}5)$.

引理 1.2[6] 设 G为有限群,$S = \{e,f\}$是 G的一个不包含单位元的二元生成子集.记 $X = \mathrm{Cay}(G,S)$且 $A = \mathrm{Aut}(X)$.设 A_1^* 是 A中固定 $1,e,f$的子群,则 $X = \mathrm{Cay}(G,S)$正规当且仅当 $A_1^* = 1$.

2 主要结果

定理 2.1 设 G是 $5p$阶亚循环群,即 $G = \langle a,b | a^5 = 1, b^p = 1, a^{-1}ba = b^r\rangle$,其中 $1 < r < p$,$r^5 \equiv 1(\mathrm{mod}p)$,则 G的连通 2度 Cayley有向图是正规的.

证明 (1) 设 $X = \mathrm{Cay}(G,S)$,由 X的连通性可知,S中至少有一个 5阶元.不妨设这个 5阶元为 e,即 $o(e) = 5$,设 e$\in A_1^*$,显然 f的阶是 5或 p.

若 $o(f) = p$时,不妨设 $S = \{a,b\}$,其中 $e = a$,$f = b$.则可以证明过点 1的有向 5-圈只有一个,即 $(1,a,a^2,a^3,a^4,a^5)$.设 $(1,s_1,s_2s_1,s_3s_2s_1,s_4s_3s_2s_1,s_5s_4s_3s_2s_1)$ (这里 $s_j = a$或 b,$1 \leqslant j \leqslant 5$) 是过点 1的有向 5-圈,则必有 $s_5s_4s_3s_2s_1 = 1$.当 s_j ($1 \leqslant j \leqslant 5$)中有 b出现时,必有 $o(b) = 5$,矛盾.故 $s_j = a$ ($1 \leqslant j \leqslant 5$),即过点 1只有一个有向 5-圈,即 $(1,a,a^2,a^3,a^4,a^5)$.这样 e固定集合 $X_1(a)$中每个点.再由于 X的点传递性,过每个点 X有唯一有向 5-圈.因为 e固定 b,从而固定过 b的有向 5-圈 $(b,ab,a^2b,a^3b,a^4b,a^5b = b)$,故 e固定这个有向 5-圈上的每一个点,进而固定集合 $X_1(b)$中每个点.由 X的连通性,e固定 X的所有点,从而 e$= 1$,$A_1^* = 1$.由引理 1.2知 X正规.

若 $o(f) = 5$时,设 $S = \{a, a^ib\}$,其中 $e = a$,$f = a^ib$.则可以证明过点 1的有向 5-圈只有两个,即 $(1,a,a^2,a^3,a^4,a^5)$和 $(1,a^ib,(a^ib)^2,(a^ib)^3,(a^ib)^4,(a^ib)^5)$.设 $(1,s_1,s_2s_1,s_3s_2s_1,s_4s_3s_2s_1,s_5s_4s_3s_2s_1)$ (这里 $s_j = a$或 a^ib,$1 \leqslant j \leqslant 5$) 是过点 1的有向 5-圈,则必有 $s_5s_4s_3s_2s_1 = 1$.这时 e和 f出现的数目必为一奇一偶.当 e和 f出现的数目有一个是 1而另一个是 4时,必有 $e = f^{-4}$或 $f = e^{-4}$.这样 $G = \langle e,f\rangle = \langle e\rangle$或$\langle f\rangle$,与 G是交换群矛盾;当 e出现的数目是 2,f是 3时,有下面情形: $e^2 = f^{-3}$,$fefef = f^2efe = efef^2 = ef^2ef = fef^2e = 1$,可推出 $(ef)^2 = f^{-1}$,$(fe)^2 = f^{-1}$,$f^3 = e^{-2}$.再证明这些式子均不成立.

若 $(ef)^2 = f^{-1}$,则 $(aa^ib)^2 = (a^ib)^{-1}$,即 $a^{2(i+1)}\cdot b^{r^{i+1}+1} = b^{-1}a^{-i}$.当 $i = 1$时,由引理 1.1得,$a^4b^{r^2+1} = b^{-1}a^4$,即,$a^{-1}b^{r^2+1}a = b^{-1}$,从而 $b^{r(r^2+1)} = b^{-1}$,最后得 $b^{r^3+r^2+1} = 1$.因为 $b^{r^4+r^3+r^2+r+1} = 1$,所以 $b^{r^4+1} = 1$,$r^4+r \equiv 0(\mathrm{mod}p)$,$r^3+1 \equiv 0(\mathrm{mod}p)$,$r^3 \equiv -1(\mathrm{mod}p)$,$r \equiv -1(\mathrm{mod}p)$,与 $1 < r < p$矛盾;当 $i = 2$时,由引理 1.1有 $ab^{r^3+1} = b^{-1}a^{-2}$,即 $bab^{r^3+1} = a^{-2}$,$ab^{r^3+r+1} = a^{-2}$,$b^{r^3+r+1} = a^{-3}$,矛盾;当 $i = 3$时,由引理 1.1有 $a^3b^{r^4+1} = b^{-1}a^2$,即 $ba^3b^{r^4+1} = a^2$,$a^3b^{r^3}b^{r^4+1} = a^4$,$b^{r^4+r^3+1} = a$,矛盾: 当 $i = 4$时,有 $b^{r^5+1} = b^{-1}a$,$b^3 = a$,矛盾.

若 $(fe)^2 = f^{-1}$,则 $(a^iba)^2 = (a^ib)^{-1}$,由引理 1.1得 $a^{2(i+1)}b^{r(r^{i+1}+1)} = b^{-1}a^{-i}$.当 $i = 1$时,由引理 1.1得 $a^4b^{r^3+r} = b^{-1}a^{-1}$,即 $a^{-1}b^{r^3+r}a = b^{-1}$,从而 $b^{r(r^3+r)} = b^{-1}$,最后得 $b^{r^4+r^2+1} = 1$,$b^{r^4+r^3+r^2+r+1} = 1$,所以 $b^{r^3+r} = 1$,$r^3+r \equiv 0(\mathrm{mod}p)$,$r^2+1 \equiv 0(\mathrm{mod}p)$,$r^5 \equiv -1(\mathrm{mod}p)$,$r \equiv -1(\mathrm{mod}p)$,与 $1 < r < p$矛盾;当 $i = 2$时,由引理 1.1有 $ab^{r^4+r} = b^{-1}a^{-2}$,$bab^{r^4+r} = a^{-2}$,$ab^{r^4+2r} = a^{-2}$,$b^{r^4+2r} = a^{-3}$,矛盾;当 $i = 3$时,由引理 1.1有 $a^3b^{r^5+r} = b^{-1}a^{-3}$,即 $ba^3b^{r^5+r} = a^{-3}$,$a^3b^{r^5+r^3+r} = a^{-3}$,$b^{r^5+r^3+r} = a^{-1}$,矛盾;当 $i = 4$时,有 $b^{r^6+r} = b^{-1}a$,$b^{r^6+r+1} = a$,矛盾.

若 $f^3 = e^{-2}$,则 $(a^ib)^3 = a^{-2}$,由引理 1.1得 $b^{r^{2i}+r^i+1} = a^{3(1-i)}$.当 $i = 1$时,有 $b^{r^2+r+1} = 1$.因为 $b^{r^4+r^3+r^2+r+1} = 1$,所以 $b^{r^4+r^3} = 1$,$r^4+r^3 \equiv 0(\mathrm{mod}p)$,$r \equiv -1(\mathrm{mod}p)$,与 $1 < r < p$矛盾;当 $i = 2$时,$b^{r^4+r^2+1} = a^{-3}$.矛盾;当 $i = 3$时,$b^{r^6+r^3+1} = a^4$,矛盾;当 $i = 4$时,$b^{r^8+r^4+1} = a$,矛盾.当 e出现的数目是 3,f是 2时,可以推出 $(ef)^2 = e^{-1}$,$(fe)^2 = e^{-1}$,$e^3 = f^{-2}$.同理可证,这些式子均不成立.

这样 e和 f在 $s_5s_4s_3s_2s_1$中出现的数目只能一个是

(下转第 21页 Continue on page 21)

$-81 \prec -4323 \prec 3040 \prec 1608 \prec -1722 \prec 3123 \prec 3964 \prec -993 \prec -3399 \prec -3203$.

此后没有更长的 A_0链,故有 $l(1329) = 15$.用回溯法计算以 M 中其他各元为起点的 A_0链,其长度均不超过 15,即 $\forall a \in M \Rightarrow l(a) \leqslant 15$.根据引理 6引理 2和引理 1就得到

$[B] = 16 \Rightarrow R(19, 19) \geqslant 9277$.

再引用递推公式(1)即得 $R(20, 20) \geqslant 18557$.这就证明了定理 1.

这个结果尚未见有文献报道.我们据算法 1设计程序,在 CPU 为 AMD2400+ 的电脑上完成整个运算过程大约用了 122h.

参考文献:

[1] Graham R L, Rothschild B L, Spencer J H. Ramsey theory[M]. New York: John Wiley & Sons, 1990.

[2] Greenwood R E, Gleason A M. Combinatorial relations and chromatic graphs [J]. Canadian Journal of Mathematics, 1955, 7: 1-7.

[3] Kalbfleisch J G. Construction of special edge-chromatic graphs[J]. Canadian Mathematical Bulletin, 1965, 8: 575-584.

[4] Burling J P, Reyner S W. Some lower bounds of the Ramsey numbers [J]. Journal of Combinatorial Theory: Series B, 1972, 13: 168-169.

[5] Mathon R. Lower bounds for Ramsey numbers and Association schemes [J]. Journal of Combinatorial Theory: Series B, 1987, 42: 122-127.

[6] Shearer J B. Lower bounds for small diagonal Ramsey numbers[J]. Journal of Combinatorial Theory: series A, 1986, 42: 302-304.

[7] Radziszowski S P. Small Ramsey numbers[J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2009, DS1, 12: 1-72.

[8] 苏文龙,罗海鹏,李乔.多色经典 Ramsey数 $R(q, q, \cdots, q)$ 的下界 [J].中国科学(A辑), 1999, 29(5): 408-413.

[9] Godsil G, Royle G. Algebraic graph theory[M]. New York: Spring-verlag, 2001: 221-222.

(责任编辑: 韦廷宗)

(上接第 12页 Continue from page 12)

0,另一个是 5,即 $s_5 = s_4 = s_3 = s_2 = s_1 = a$或 $a^i b$.因此过点 1的有向 5-圈只有两个,即$(1, a, a^2, a^3, a^4, a^5)$和$(1, a^i b, (a^i b)^2, (a^i b)^3, (a^i b)^4, (a^i b)^5)$.设 e$\in A_1^*$,则 e固定 1, a和 $a^i b$.故 e固定这两个有向圈上的每一个点.特别地 e固定 a^2, $(a^i b)^2$,这样 e固定集合 $X_1(a)$, $X_1(a^i b)$中每一个点.由 X的连通性,e固定 X上所有点,从而 e$= 1$, $A_1^* = 1$.由引理 1.2知 X正规.

参考文献:

[1] 徐明耀,黄建华,李慧陵,等.有限群导引(下册)[M].北京:科学出版社,1999.

[2] Wang C Q, Wang R J, Xu M Y. On the normality Cayley graphs of finite group[J]. Science in China(A), 1998, 28: 131-139.

[3] Li C H. On isomorphisms of connected Cayley graphs[J]. Bull Austral Math Soc, 1998, 58: 137-145.

[4] Baik Young-Gheel, Feng Yanquan, Hyo-Seob Sim, et al. On the normality of Cayley graph of abelian groups[J]. Aslgebra Colloq, 1998, 5: 297-304.

[5] Xu M Y, Xu Sh J. Arc-transitive Cayley graphs of valency at most four on abelian group [J]. Southeast Asian Bulletin of Math, 2001, 25: 355-363.

[6] 冯衍全,王殿军,陈景林.一类非正规 Cayley有向图 [J].数学学报, 2003, 46(1): 103-108.

[7] 聂淑凡,冯衍全. $4p$阶群上 2度 Cayley有向图的正规性[J].北京交通大学学报, 2006, 30(3): 81-92.

(责任编辑: 尹 闯)