DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2010.01.006
广西科学 Guangxi Sciences 2010, 17(1): 16~ 18

与 $T(1,3,3)\cup T(1,1,n)$ 有相同匹配多项式图的刻划*

Characterization for Graphs with Matching Polynomial Same $T(1,3,3)\cup T(1,1,n)$

詹福琴,乔友付
ZHAN Fu-qin, QIAO You-fu

(河池学院数学系,广西宜州 546300)
(Department of Mathematics, Hechi College, Yizhou, Guangxi, 546300, China)

摘要: 利用图的匹配多项式及其最大实数根的性质,刻画了图 $T(1,3,3)\cup T(1,1,n)$ 的匹配等价图类.

关键词: 简单图 匹配多项式 匹配等价 匹配唯一 实数根
中图法分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2010)01-0016-03

Abstract The matching equivalent classes of $T(1,3,3)\cup T(1,1,n)$ are characterized by the properties of graph's matching polynomial and it's maximum roots.

Key words simple graph, matching polynomial, matching equivalence, matching uniqueness, real roots

本文仅考虑有限,无向简单图.设 G 是有 n 个顶点的图,G 的一个匹配是指 G 的一个生成子图,它的每个分支或是孤立点或是孤立边.t-匹配是指有 t 条边的匹配.文献[1]定义图 G 的匹配多项式为 $\mu(G,x)=\sum_{t\geqslant 0}(-1)^t a_t(G)x^{n-2t}$,其中 $a_t(G)$ 是 G 的 t-匹配的数目.对于两个图 G 和 H,若有 $\mu(G,x)=\mu(H,x)$,则称 G 和 H 匹配等价,记为 $G\sim H$.$[G]$ 表示与图 G 匹配等价的所有非同构图构成的集合.若与图 G 匹配等价的任何图 H,均有 $G\cong H$,则称图 G 是匹配唯一的.$M(G,x)$ 表示图 G 匹配多项式 $\mu(G,x)$ 的最大实数根.P_n,C_n 分别表示有 n 个点的路和圈;$D_{m,n}$ 表示圈 C_m 上的一个点与路 P_{n+1} 的一个 1 度点粘接后得到的图;$T(a,b,c)$ 表示从一点引出 3 条长分别为 $a,b,c(a\leqslant b\leqslant c)$ 的路所得到的图;$T(a,b,n,c,d)$ 表示从路 P_{n+1} 的两个 1 度点分别引出长为 a,b 和 c,d 的路所得到的图,特别地,当 $a=b=c=d=1$ 时,该图表示为 $I_n(n\geqslant 6)$;G^c 表示图 G 的补图;$G\cup H$ 表示图 G 和 H 的不交并;nG 表示 n 个图 G 的不交并.

为了方便,用 $\mu(G)$ 表示 $\mu(G,x)$;$M(G)$ 表示 $M(G,x)$;$M(a,b,c)$ 表示 $M(T(a,b,c))$.文中其他未特别说明的概念和术语均参见文献[1,2].本文利用图的匹配多项式及其最大实数根的性质,刻画了图 $T(1,3,3)\cup T(1,1,n)$ 的匹配等价图类.

收稿日期: 2009-07-09
修回日期: 2009-09-03
作者简介: 詹福琴(1980-),女,讲师,硕士,主要从事组合图论研究。
* 广西自然科学基金项目(桂科自 0991265),广西教育厅科研项目(200911LX402),河池学院科研项目(2009A-N004)资助。

1 相关引理

引理 1[1] 设图 G 有 k 个连通分支 $G_1,G_2,\cdots\cdots,G_k$,则 $\mu(G,x)=\prod_{i=1}^{k}\mu(G_i,x)$.

引理 2[1] 设 $e=uv$ 是图 G 的一条边,则 $\mu(G,x)=\mu(G-e,x)-\mu(G-\{u,v\},x)$,这里 $G-e$,$G-\{u,v\}$ 分别表示从 G 中删去边 e 和顶点 u,v 后得到的图.

引理 3[1] 设 $u\in V(G)$,$e\in E(G)$,且 G 连通,则 $M(G)>M(G-u)$;$M(G)>M(G-e)$.

引理 4[3] 若 G 是连通图,则

(i) $M(G)<2$ 当且仅当 $G\in K_1=\{K_1,P_n,C_n,T(1,1,n),T(1,2,i)(2\leqslant i\leqslant 4),D_{3,1}\}$;

(ii) $M(G)=2$ 当且仅当 $G\in K_2=\{K_{1,4},T(2,2,2),T(1,3,3),T(1,2,5),I_n,D_{3,2},D_{4,1}\}$.

引理 5[4] 设图 G 的匹配最大根 $M(G)<2$,则 G 是匹配唯一的当且仅当

$G=kK_1\cup m_2P_2\cup m_3P_3\cup[\bigcup_{i\geqslant 2}m_{2i}P_{2i}]\cup[\bigcup_{j\geqslant 3}n_jC_j]\cup dD_{3,1}\cup eT(1,2,3)\cup fT(1,2,4)$,且满足 $kn_j=m_in_{i+1}=m_2d=m_3d=n_3e=n_{15}e=n_3n_5f$

$= n_5 n_9 f = 0$,其中 k, m_i, n_j, d, e, f 都是非负整数.

引理 6[5] (i) $P_{2m+1} \sim P_m \cup C_{m+1} (m \geqslant 2)$; (ii) $T(1,1,n) \sim K_1 \cup C_{n+2}$; (iii) $T(1,2,2) \sim P_2 \cup D_{3,1}$; (iv) $K_1 \cup C_6 \sim P_3 \cup D_{3,1}$; (v) $K_1 \cup C_9 \sim C_3 \cup T(1,2,3)$; (vi) $K_1 \cup C_{15} \sim C_3 \cup C_5 \cup T(1,2,4)$.

引理 7[6] (i) $D_{3,2} \sim D_{4,1}$; (ii) $K_1 \cup D_{3,2} \sim I_6$; (iii) $T(2,2,2) \sim P_2 \cup D_{3,2}$; (iv) $T(1,3,3) \sim P_3 \cup D_{3,2}$; (v) $T(1,2,5) \sim P_4 \cup D_{3,2}$; (vi) $K_1 \cup I_6 \sim P_2 \cup K_{1,4}$; (vii) $P_{m-4} \cup I_n \sim P_{n-4} \cup I_m (m,n \geqslant 6)$; (viii) $I_{2n-3} \sim I_n \cup C_{n-3}$.

引理 8[5] 两个图匹配等价当且仅当它们的补图也匹配等价.

2 主要结果及其证明

定理 1 $T(1,3,3) \cup T(1,1,n)$ 的所有匹配等价图为:

(i) 当 $n \neq 1, 2, 4, 7, 13$ 时, $[T(1,3,3) \cup T(1,1,n)] = \{T(1,3,3) \cup K_1 \cup C_{n+2}, P_3 \cup D_{3,2} \cup T(1,1,n), P_3 \cup D_{3,2} \cup K_1 \cup C_{n+2}, P_3 \cup D_{4,1} \cup T(1,1,n), P_3 \cup D_{4,1} \cup K_1 \cup C_{n+2}, P_3 \cup I_6 \cup C_{n+2}, P_2 \cup I_7 \cup C_{n+2}\}$;

(ii) 当 $n = 1$ 时, $[T(1,3,3) \cup T(1,1,1)] = \{T(1,3,3) \cup K_1 \cup C_3, P_3 \cup D_{3,2} \cup T(1,1,1), P_3 \cup D_{3,2} \cup K_1 \cup C_3, P_3 \cup D_{4,1} \cup T(1,1,1), P_3 \cup D_{4,1} \cup K_1 \cup C_3, P_3 \cup I_6 \cup C_3, P_2 \cup I_7 \cup C_3, P_5 \cup I_7, P_3 \cup I_9\}$;

(ii) 当 $n = 2$ 时, $[T(1,3,3) \cup T(1,1,2)] = \{T(1,3,3) \cup K_1 \cup C_4, P_3 \cup D_{3,2} \cup T(1,1,2), P_3 \cup D_{3,2} \cup K_1 \cup C_4, D_{3,2} \cup K_1 \cup P_7, P_3 \cup D_{4,1} \cup T(1,1,2), P_3 \cup D_{4,1} \cup K_1 \cup C_4, D_{4,1} \cup K_1 \cup P_7, P_3 \cup I_6 \cup C_4, P_7 \cup I_6, P_2 \cup I_7 \cup C_4, P_2 \cup I_{11}\}$;

(iii) 当 $n = 4$ 时, $[T(1,3,3) \cup T(1,1,4)] = \{T(1,3,3) \cup K_1 \cup C_6, T(1,3,3) \cup P_3 \cup D_{3,1}, P_3 \cup D_{3,2} \cup T(1,1,4), P_3 \cup D_{3,2} \cup K_1 \cup C_6, P_3 \cup D_{3,2} \cup P_3 \cup D_{3,1}, P_3 \cup D_{4,1} \cup T(1,1,4), P_3 \cup D_{4,1} \cup K_1 \cup C_6, P_3 \cup D_{4,1} \cup P_3 \cup D_{3,1}, P_3 \cup I_6 \cup C_6, P_2 \cup I_7 \cup C_6\}$;

(iv) 当 $n = 7$ 时, $[T(1,3,3) \cup T(1,1,7)] = \{T(1,3,3) \cup K_1 \cup C_9, T(1,3,3) \cup C_3 \cup T(1,2,3), P_3 \cup D_{3,2} \cup T(1,1,7), P_3 \cup D_{3,2} \cup K_1 \cup C_9, P_3 \cup D_{3,2} \cup C_3 \cup T(1,2,3), P_3 \cup D_{4,1} \cup T(1,1,7), P_3 \cup D_{4,1} \cup K_1 \cup C_9, P_3 \cup D_{4,1} \cup C_3 \cup T(1,2,3), P_3 \cup I_6 \cup C_9, P_2 \cup I_7 \cup C_9\}$;

(v) 当 $n = 13$ 时, $[T(1,3,3) \cup T(1,1,13)] = \{T(1,3,3) \cup K_1 \cup C_{15}, T(1,3,3) \cup C_3 \cup C_5 \cup T(1,2,4), P_3 \cup D_{3,2} \cup T(1,1,13), P_3 \cup D_{3,2} \cup K_1 \cup C_{15}, P_3 \cup D_{3,2} \cup C_3 \cup C_5 \cup T(1,2,4), P_3 \cup D_{4,1} \cup T(1,1,13), P_3 \cup D_{4,1} \cup K_1 \cup C_{15}, P_3 \cup D_{4,1} \cup C_3 \cup C_5 \cup T(1,2,4), P_3 \cup I_6 \cup C_{15}, P_2 \cup I_7 \cup C_{15}\}$.

证明 令 $H \sim T(1,3,3) \cup T(1,1,n)$, 则 $M(H) = M(T(1,3,3) \cup T(1,1,n))$, 由引理 4 知 $M(H) = M(1,3,3) = 2$, 从而 H 中必有一连通分支 H_1 满足 $H_1 \in \mathrm{K}_2$, 令 $H = H_1 \cup H_2$.

(i) 若 $H_1 = K_{1,4}$, 则 $T(1,3,3) \cup T(1,1,n) \sim K_{1,4} \cup H_2$, 由 $T(1,3,3) \cup T(1,1,n) \cup P_2 \cup P_3 \sim P_2 \cup P_3 \cup K_{1,4} \cup H_2 \sim P_3 \cup K_1 \cup I_6 \cup H_2 \sim P_3 \cup K_1 \cup K_1 \cup D_{3,2} \cup H_2 \sim 2K_1 \cup T(1,3,3) \cup H_2$ 得 $T(1,1,n) \cup P_2 \cup P_3 \sim 2K_1 \cup H_2$, 再由 $T(1,1,n) \sim K_1 \cup C_{n+2}$ 得 $P_2 \cup P_3 \cup C_{n+2} \sim K_1 \cup H_2$. 由引理 5 和引理 6 知该情形不存在.

(ii) 若 $H_1 = T(2,2,2)$, 则 $T(1,3,3) \cup T(1,1,n) \sim T(2,2,2) \cup H_2$, $T(1,3,3) \cup T(1,1,n) \cup P_3 \sim P_3 \cup T(2,2,2) \cup H_2 \sim P_3 \cup P_2 \cup D_{3,2} \cup H_2 \sim P_2 \cup T(1,3,3) \cup H_2$, 得 $T(1,1,n) \cup P_3 \sim P_2 \cup H_2$. 由引理 6 知该情形不存在.

(iii) 若 $H_1 = T(1,3,3)$, 则 $T(1,3,3) \cup T(1,1,n) \sim T(1,3,3) \cup H_2$, 从而可得 $H_2 \sim T(1,1,n)$.

当 $n \neq 4, 7, 13$ 时, 由引理 6 知 $H_2 \sim T(1,1,n) \sim K_1 \cup C_{n+2}$;

当 $n = 4$ 时, 由引理 6 知 $H_2 \sim T(1,1,4) \sim K_1 \cup C_6 \sim P_3 \cup D_{3,1}$;

当 $n = 7$ 时, 由引理 6 知 $H_2 \sim T(1,1,7) \sim K_1 \cup C_9 \sim C_3 \cup T(1,2,3)$;

当 $n = 13$ 时, 由引理 6 知 $H_2 \sim T(1,1,13) \sim K_1 \cup C_{15} \sim C_3 \cup C_5 \cup T(1,2,4)$.

(iv) 若 $H_1 = T(1,2,5)$, 则 $T(1,3,3) \cup T(1,1,n) \sim T(1,2,5) \cup H_2$, 由 $T(1,3,3) \cup T(1,1,n) \cup P_3 \sim P_3 \cup T(1,2,5) \cup H_2 \sim P_3 \cup P_4 \cup D_{3,2} \cup H_2 \sim P_4 \cup T(1,3,3) \cup H_2$ 得 $P_4 \cup H_2 \sim P_3 \cup T(1,1,n) \sim P_3 \cup K_1 \cup C_{n+2}$. 由引理 6 知该情形不存在.

(v) 若 $H_1 = I_m$, 则 $T(1,3,3) \cup T(1,1,n) \sim I_m \cup H_2$, 由 $I_m \cup H_2 \sim T(1,3,3) \cup T(1,1,n) \sim P_3 \cup D_{3,2} \cup T(1,1,n) \sim P_3 \cup D_{3,2} \cup K_1 \cup C_{n+2} \sim P_3 \cup I_6 \cup C_{n+2}$ 得 $P_3 \cup I_6 \cup C_{n+2} \sim I_m \cup H_2$.

若 $n \neq 1, 2$, 由 $P_{m-4} \cup I_n \sim P_{n-4} \cup I_m$ 可得 $I_m \cup H_2 \sim P_3 \cup I_6 \cup C_{n+2} \sim P_2 \cup I_7 \cup C_{n+2}$, 从而有 $m = 6$ 时, $H_2 \sim P_3 \cup C_{n+2}$; $m = 7$ 时, $H_2 \sim P_2 \cup C_{n+2}$.

若 $n = 1$, 由 $I_6 \cup C_3 \sim I_9$ 及 $P_{m-4} \cup I_n \sim P_{n-4} \cup I_m$ 可得 $I_m \cup H_2 \sim P_3 \cup I_6 \cup C_3 \sim P_2 \cup I_7 \cup C_3 \sim$

$P_5\cup I_7\sim P_3\cup I_9$.

从而有 $m=6$时, $H_2\sim P_3\cup C_3$; $m=7$时, $H_2\sim P_2\cup C_3\sim P_5$; $m=9$时, $H_2\sim P_3$.

若 $n=2$,由 $P_3\cup C_4\sim P_7$及 $P_{m-4}\cup I_n\sim P_{n-4}\cup I_m$ 可得 $I_m\cup H_2\sim P_3\cup I_6\cup C_4\sim P_2\cup I_7\cup C_4\sim P_7\cup I_6\sim P_2\cup I_{11}$.

从而有 $m=6$时, $H_2\sim P_3\cup C_4\sim P_7$; $m=7$时, $H_2\sim P_2\cup C_4$; $m=11$时, $H_2\sim P_2$.

(vi) 若 $H_1=D_{3,2}$,则 $T(1,3,3)\cup T(1,1,n)\sim D_{3,2}\cup H_2$,由 $T(1,3,3)\cup T(1,1,n)\cup P_3\sim P_3\cup D_{3,2}\cup H_2\sim T(1,3,3)\cup H_2$得 $H_2\sim P_3\cup T(1,1,n)$.

当 $n\neq 2,4,7,13$时,由引理 6知 $H_2\sim P_3\cup T(1,1,n)\sim P_3\cup K_1\cup C_{n+2}$;

当 $n=2$时,由引理 6知 $H_2\sim P_3\cup T(1,1,2)\sim P_3\cup K_1\cup C_4\sim K_1\cup P_7$;

当 $n=4$时,由引理 6知 $H_2\sim P_3\cup T(1,1,4)\sim P_3\cup K_1\cup C_6\sim P_3\cup P_3\cup D_{3,1}$;

当 $n=7$时,由引理 6知 $H_2\sim P_3\cup T(1,1,7)\sim P_3\cup K_1\cup C_9\sim P_3\cup C_3\cup T(1,2,3)$;

当 $n=13$时,由引理 6知 $H_2\sim P_3\cup T(1,1,13)\sim P_3\cup K_1\cup C_{15}\sim P_3\cup C_3\cup C_5\cup T(1,2,4)$.

(vii) 若 $H_1=D_{4,1}$,则 $T(1,3,3)\cup T(1,1,n)\sim D_{4,1}\cup H_2$,由 $D_{4,1}\sim D_{3,2}$及 (vi)可得 $H_2\sim P_3\cup T(1,1,n)$.

当 $n\neq 2,4,7,13$时,由引理 6知 $H_2\sim P_3\cup T(1,1,n)\sim P_3\cup K_1\cup C_{n+2}$;

当 $n=2$时,由引理 6知 $H_2\sim P_3\cup T(1,1,2)\sim P_3\cup K_1\cup C_4\sim K_1\cup P_7$;

当 $n=4$时,由引理 6知 $H_2\sim P_3\cup T(1,1,4)\sim P_3\cup K_1\cup C_6\sim P_3\cup P_3\cup D_{3,1}$;

当 $n=7$时,由引理 6知 $H_2\sim P_3\cup T(1,1,7)\sim P_3\cup K_1\cup C_9\sim P_3\cup C_3\cup T(1,2,3)$;

当 $n=13$时,由引理 6知 $H_2\sim P_3\cup T(1,1,13)\sim P_3\cup K_1\cup C_{15}\sim P_3\cup C_3\cup C_5\cup T(1,2,4)$.

综合以上讨论及引理 4可得定理 1成立.

定理 2 $(T(1,3,3)\cup T(1,1,n))^c$ 的所有匹配等价图为:

(i) 当 $n\neq 1,2,4,7,13$时, $[(T(1,3,3)\cup T(1,1,n))^c]=\{(T(1,3,3)\cup K_1\cup C_{n+2})^c,(P_3\cup D_{3,2}\cup T(1,1,n))^c,(P_3\cup D_{3,2}\cup K_1\cup C_{n+2})^c,(P_3\cup D_{4,1}\cup T(1,1,n))^c,(P_3\cup D_{4,1}\cup K_1\cup C_{n+2})^c,(P_3\cup I_6\cup C_{n+2})^c,(P_2\cup I_7\cup C_{n+2})^c\}$;

(ii) 当 $n=1$时, $[(T(1,3,3)\cup T(1,1,1))^c]=\{(T(1,3,3)\cup K_1\cup C_3)^c,(P_3\cup D_{3,2}\cup T(1,1,1))^c,(P_3\cup D_{3,2}\cup K_1\cup C_3)^c,(P_3\cup D_{4,1}\cup T(1,1,1))^c,(P_3\cup D_{4,1}\cup K_1\cup C_3)^c,(P_3\cup I_6\cup C_3)^c,(P_2\cup I_7\cup C_3)^c,(P_5\cup I_7)^c,(P_3\cup I_9)^c\}$;

(ii) 当 $n=2$时, $[(T(1,3,3)\cup T(1,1,2))^c]=\{(T(1,3,3)\cup K_1\cup C_4)^c,(P_3\cup D_{3,2}\cup T(1,1,2))^c,(P_3\cup D_{3,2}\cup K_1\cup C_4)^c,(D_{3,2}\cup K_1\cup P_7)^c,(P_3\cup D_{4,1}\cup T(1,1,2))^c,(P_3\cup D_{4,1}\cup K_1\cup C_4)^c,(D_{4,1}\cup K_1\cup P_7)^c,(P_3\cup I_6\cup C_4)^c,(P_7\cup I_6)^c,(P_2\cup I_7\cup C_4)^c,(P_2\cup I_{11})^c\}$;

(iii) 当 $n=4$时, $[(T(1,3,3)\cup T(1,1,4))^c]=\{(T(1,3,3)\cup K_1\cup C_6)^c,(T(1,3,3)\cup P_3\cup D_{3,1})^c,(P_3\cup D_{3,2}\cup T(1,1,4))^c,(P_3\cup D_{3,2}\cup K_1\cup C_6)^c,(P_3\cup D_{3,2}\cup P_3\cup D_{3,1})^c,(P_3\cup D_{4,1}\cup T(1,1,4))^c,(P_3\cup D_{4,1}\cup K_1\cup C_6)^c,(P_3\cup D_{4,1}\cup P_3\cup D_{3,1})^c,(P_3\cup I_6\cup C_6)^c,(P_2\cup I_7\cup C_6)^c\}$;

(iv) 当 $n=7$时, $[(T(1,3,3)\cup T(1,1,7))^c]=\{(T(1,3,3)\cup K_1\cup C_9)^c,(T(1,3,3)\cup C_3\cup T(1,2,3))^c,(P_3\cup D_{3,2}\cup T(1,1,7))^c,(P_3\cup D_{3,2}\cup K_1\cup C_9)^c,(P_3\cup D_{3,2}\cup C_3\cup T(1,2,3))^c,(P_3\cup D_{4,1}\cup T(1,1,7))^c,(P_3\cup D_{4,1}\cup K_1\cup C_9)^c,(P_3\cup D_{4,1}\cup C_3\cup T(1,2,3))^c,(P_3\cup I_6\cup C_9)^c,(P_2\cup I_7\cup C_9)^c\}$;

(v) 当 $n=13$时, $[(T(1,3,3)\cup T(1,1,13))^c]=\{(T(1,3,3)\cup K_1\cup C_{15})^c,(T(1,3,3)\cup C_3\cup C_5\cup T(1,2,4))^c,(P_3\cup D_{3,2}\cup T(1,1,13))^c,(P_3\cup D_{3,2}\cup K_1\cup C_{15})^c,(P_3\cup D_{3,2}\cup C_3\cup C_5\cup T(1,2,4))^c,(P_3\cup D_{4,1}\cup T(1,1,13))^c,(P_3\cup D_{4,1}\cup K_1\cup C_{15})^c,(P_3\cup D_{4,1}\cup C_3\cup C_5\cup T(1,2,4))^c,(P_3\cup I_6\cup C_{15})^c,(P_2\cup I_7\cup C_{15})^c\}$.

证明 由定理 1及引理 8可得定理 2成立.

参考文献:

[1] Godsil C D. Algebraic combinatorics[M]. New York: Chapman and Hall, 1993.

[2] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications[M]. Amsterdam: North-Holland, 1976.

[3] 马海成.匹配根对图的刻画[J].曲阜师范大学学报, 2001, 27(1): 33-36.

[4] 马海成.匹配最大根小于 2的图的匹配等价类[J].系统科学与数学, 2003(3): 337-342.

[5] 马海成.两类图的匹配等价类[J].数学研究, 2000, 33(2): 218-222.

[6] 马海成.I 形图的匹配等价类[J].数学研究, 2002, 35(1): 65-71.

(责任编辑: 尹 闯)