DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2010.01.009
广西科学 Guangxi Sciences 2010, 17(1): 27~ 31

具有偏差变元的 Lienard型方程反周期解的存在唯一性

Existence and Uniqueness of Anti-Periodic Solutions for a Class of Lienard-type Equation with a Deviating Argument

罗芳琼
LUO Fang-qiong

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州 545004)
(Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545004, China)

摘要: 利用 Leray-Schauder度理论,获得具有偏差变元的 Lienard方程 $x''(t)+f_1(t,x(t))x'(t)+f_2(x(t))x'((t))^2+g(t,x(t-f(t)))=p(t)$ 反周期解存在唯一性的充分条件.

关键词: Lienard方程 偏差变元 反周期解 Leray-Schauder度
中图法分类号: O175.8 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2010)01-0027-05

Abstract By employing Leray-Schauder degree theorem, some new sufficient conditions of the existence and uniqueness of Anti-periodic solutions for Lienard-type equation with a deviating argument of the form $x''(t)+f_1(t,x(t))x'(t)+f_2(t,x(t))x'((t))^2+g(t,x(t-f(t)))=p(t)$ are obtained.

Key words Lienard-type equation, deviating arguments, anti-periodic solutions, Leray-Schauder degree

Lienard方程具有较广泛的应用背景,其周期解的存在性一直是大家感兴趣的课题[1~5].文献[6]研究一类 Lienard型方程

$$x''(t)+f_1(t,x(t))x'(t)+f_2(x(t))x'((t))^2+g(t,x(t-f(t)))=p(t) \qquad (1)$$

的周期解问题,其中 $f_2,f,p\in C(R,R)$,且 f,p 都是 T-周期函数,$f_1,g_1\in C(R^2,R)$,且关于第一变量 t是 T-周期函数,$T>0$,利用重合度理论,在 $f_1(t,x)\equiv f_1(t)$ 的情形下,获得了方程(1)周期解的存在唯一性.然而,反周期现象广泛存在于各种物理问题中,因此研究微分方程反周期解问题具有非常重要的现实意义.关于微分方程反周期解问题的研究也有许多结果[7~10].据作者所知,目前还未见有学者研究方程(1)的反周期解问题.本文继续研究方程(1)的反周期解问题,利用 Leray-Schauder度理论,获得方程(1)反周期解的存在性与唯一性的充分条件.

收稿日期: 2009-10-23
作者简介: 罗芳琼(1971-),女,讲师,主要从事神经网络及微分方程的研究.

1 预备知识

为了方便研究,我们引入下面的条件:

(H_0)假设存在非负常数 C_1和 C_2,使得 $|f_1(t,x)|\leqslant C_1,\forall t,x\in R$,以及 $f_2\in C^1(R,R)$,$f'_2(x)\leqslant 0$,$|f_2(x_1)-f_2(x_2)|\leqslant C_2|x_1-x_2|$,$f_2(0)=0,\forall x_1,x_2,x\in R$.

定义 1 假设 $T>0$为常数,$u: R\to R$是连续的,如果

$$u(t+T)=u(t),u(t+\frac{T}{2})=-u(t),\forall t\in R,$$

则称 $u(t)$是 R上的反周期解.

引理 1[10] 设 K是线性赋范空间 X的一个有界开集,$\tilde{f}$在 $\bar{K}$上是完全连续场,$p\in X\setminus\tilde{f}(\partial K)$,如果 Leray-Schauder度 $\deg\{\tilde{f},K,p\}\neq 0$,则方程 $\tilde{f}(x)=p$ 在 K上至少存在一个解.

为了后面叙述方便,引进如下记号:

$C_T^k=\{x\in C^k(R,R),x(t+T)=x(t)\},k\in\{0,$

1,2,⋯},

$|x|_q = (\int_0^T |x(t)|^q dt)^{\frac{1}{q}}$, $|x|_\infty = \max_{t\in[0,T]} |x(t)|$, $|x^{(k)}|_\infty = \max_{t\in[0,T]} |x^{(k)}(t)|$,

$C_T^{k,\frac12} = \{x\in C_T^k: x(t+\frac{T}{2}) = -x(t), \forall t\in R\}$,

$\|x\| = \max\{|x|_\infty, |x'|_\infty, \cdots, |x^{(k)}|_\infty\}, \forall x\in C_T^{k,\frac12}$.

引理 2(Wirtinger不等式)[11] 设 $x\in C(R^2,R)$ 且 $x(t+T) = x(t)$,则

$$|x'(t)|_2 \leqslant \frac{T}{2\pi}|x''(t)|_2.$$

引理 3 如果条件 (H_0) 成立,且满足:

(H_1) 存在非负常数 b,使得

$$|g(t,x_1) - g(t,x_2)| \leqslant b|x_1 - x_2|, \forall t,x_1,x_2\in R;$$

(H_2) $C_1\frac{T}{2\pi} + b\frac{T^2}{4\pi} < 1$.

若 $x(t)$ 是方程(1)的任一反周期解,则

$$|x'|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\frac{[\max\{|g(t,0)|: 0\leqslant t\leqslant T\} + |p|_\infty]T}{1 - [C_1\frac{T}{2\pi} + b\frac{T^2}{4\pi}]} \triangleq D.$$

证明 设 $x(t)$ 是方程(1)任一反周期解,则

$$\int_0^T x(t)dt = \int_0^{\frac{T}{2}} x(t)dt + \int_{\frac{T}{2}}^T x(t)dt = \int_0^{\frac{T}{2}} x(t)dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t+\frac{T}{2})dt = 0,$$

于是存在常数 $\xi\in[0,T]$,使得 $x(\xi) = 0$,从而有

$$|x(t)| = |x(\xi) + \int_\xi^t x'(s)ds| \leqslant \int_\xi^t |x'(s)|ds, t\in[\xi,\xi+T], \quad (2)$$

$$|x(t)| = |x(t-T)| = |x(\xi) + \int_{t-T}^\xi x'(s)ds| \leqslant \int_{t-T}^\xi |x'(s)|ds, t\in[\xi,\xi+T]. \quad (3)$$

由(2)式和(3)式得

$$|x|_\infty = \max_{t\in[0,T]}|x(t)| = \max_{t\in[\xi,\xi+T]}|x(t)| \leqslant \max_{t\in[\xi,\xi+T]}\left\{\frac{1}{2}\left(\int_\xi^t |x'(s)|ds + \int_{t-T}^\xi |x'(s)|ds\right)\right\} \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T |x'(s)|ds \leqslant \frac{\sqrt{T}}{2}|x'|_2. \quad (4)$$

将方程(1)两边同乘以 $x''(t)$,并从0到 T 积分,由(4)式、(H_0)、(H)和Schwarz不等式得

$$|x''|_2^2 = -\int_0^T f_1(t,x(t))x'(t)x''(t)dt - \int_0^T f_2(x(t))(x'(t))^2 x''(t)dt - \int_0^T g(t,x(t-\tau(t)))x''(t)dt + \int_0^T p(t)x''(t)dt = -\int_0^T f_1(t,x(t))x'(t)x''(t)dt + \frac{1}{3}\int_0^T f_2'(x(t))(x'(t))^4 dt - \int_0^T g(t,x(t-\tau(t)))x''(t)dt + \int_0^T p(t)x''(t)dt \leqslant \int_0^T |f_1(t,x(t))||x'(t)||x''(t)|dt + \int_0^T |g(t,x(t-\tau(t)))||x''(t)|dt + \int_0^T |p(t)||x''(t)|dt \leqslant C_1\frac{T}{2\pi}|x''|_2^2 + \int_0^T [|g(t,x(t-\tau(t))) - g(t,0)| + |g(t,0)|]|x''(t)|dt + |p|_\infty\sqrt{T}|x''|_2 \leqslant C_1\frac{T}{2\pi}|x''|_2^2 + b|x|_\infty\sqrt{T}|x''|_2 + [\max\{|g(t,0)|: 0\leqslant t\leqslant T\} + |p|_\infty]\sqrt{T}|x''|_2 \leqslant [C_1\frac{T}{2\pi} + b\frac{T^2}{4\pi}]|x''|_2^2 + [\max\{|g(t,0)|: 0\leqslant t\leqslant T\} + |p|_\infty]\sqrt{T}|x''|_2. \quad (5)$$

结合(5)式和条件 (H_2) 得

$$|x''|_2 \leqslant \frac{[\max\{|g(t,0)|: 0\leqslant t\leqslant T\} + |p|_\infty]\sqrt{T}}{1 - [C_1\frac{T}{2\pi} + b\frac{T^2}{4\pi}]}. \quad (6)$$

由 $x(0) = x(T)$ 可知,存在常数 $\eta\in[0,T]$ 使得 $x'(\eta) = 0$,类似(4)式的证明可得

$$|x'|_\infty \leqslant \frac{\sqrt{T}}{2}|x''|_2. \quad (7)$$

由(6)式和(7)式得

$$|x'|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\frac{[\max\{|g(t,0)|: 0\leqslant t\leqslant T\} + |p|_\infty]T}{1 - [C_1\frac{T}{2\pi} + b\frac{T^2}{4\pi}]} \triangleq D.$$

引理 4 如果条件 (H_0) 和 (H_1) 成立,下面条件满足:

(H_3) $f_1(t,x) \equiv f_1(x)$,且存在常数 $C_3 > 0$,使得 $|f_1(x_1) - f_1(x_2)| \leqslant C_3|x_1 - x_2|, \forall x_1,x_2\in R$;

(H_4) $C_1\frac{T}{2\pi} + C_3 D\frac{T^2}{4\pi} + C_2 D^2\frac{T^2}{4\pi} + b\frac{T^2}{4\pi} + C_2 D^2\frac{T^2}{2\pi} < 1$.

则方程(1)至多存在一个反周期解.

证明 假设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是方程(1)的两个反周期解,令 $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$,则

$$z''(t) + f(x_1(t))x_1'(t) - f(x_2(t))x_2'(t) + f_2(x_1(t))(x_1'(t))^2 - f_2(x_2(t))(x_2'(t))^2 + g(t,x_1(t-\tau(t))) - g(t,x_2(t-\tau(t))) = 0. \quad (8)$$

注意到 $z(t)$ 也是方程(1)的反周期解,则

$$\int_0^T z(t)dt = \int_0^{\frac{T}{2}} z(t)dt + \int_{\frac{T}{2}}^T z(t)dt = \int_0^{\frac{T}{2}} z(t)dt + \int_0^{\frac{T}{2}} z(t+\frac{T}{2})dt = 0,$$

于是存在常数 $\tau\in[0,T]$,使得 $z(\tau)=0$.类似(4)式的证明可得

$$|z|_\infty\leqslant\frac{\sqrt{T}}{2}|z'|_2. \tag{9}$$

将(8)式两边同乘以 $z''(t)$,并从0到 T 积分,由(9)式、(H0)、(H1)、(H3)、Schwarz不等式和引理3得

$$\begin{aligned}|z''|_2^2\leqslant&\int_0^T|f_1(x_1(t))||x_1'(t)-x_2'(t)|\cdot|z''(t)|\,dt+\int_0^T|f_1(x_1(t))-f_1(x_2(t))||x_2'(t)|\cdot|z''(t)|\,dt+\\&\int_0^T|f_2(x_1(t))||(x_1'(t))^2-(x_2'(t))^2|\cdot|z''(t)|\,dt+\int_0^T|f_2(x_1(t))-f_2(x_2(t))|\cdot(x_2'(t))^2|z''(t)|\,dt+\\&\int_0^T|g(t,x_1(t-\tau(t)))-g(t,x_2(t-\tau(t)))||z''(t)|\,dt\leqslant C_1|z'|_2|z''|_2+\\&C_3D|z|_\infty\sqrt{T}|z''|_2+C_2|x_1|_\infty\int_0^T|(x_1'(t)+x_2'(t))||x_1'(t)-x_2'(t)||z''(t)|\,dt+\\&C_2D^2|z|_\infty\sqrt{T}|z''|_2+(b_1+b_2)|z|_\infty\sqrt{T}|z''|_2\leqslant\\&(C_1\frac{T}{2\pi}+C_3D\frac{T^2}{4\pi}+C_2D^2\frac{T^2}{4\pi}+b\frac{T^2}{4\pi})|z''|_2^2+\\&2C_2D|x_1|_\infty\frac{T}{2\pi}|z''|_2^2.\end{aligned} \tag{10}$$

由(4)式得

$$|x_1|_\infty\leqslant\frac{1}{2}\int_0^T|x'(s)|\,ds\leqslant\frac{T}{2}|x_1'|_\infty\leqslant\frac{T}{2}D,$$

结合(10)式得

$$|z''|_2^2\leqslant(C_1\frac{T}{2\pi}+C_3D\frac{T^2}{4\pi}+C_2D^2\frac{T^2}{4\pi}+b\frac{T^2}{4\pi}+C_2D^2\frac{T^2}{2\pi})|z''|_2^2. \tag{11}$$

注意到 $z(t),z'(t)$ 和 $z''(t)$ 都是 T-周期的连续函数,根据条件(H4)、(9)式和(11)式得

$$z(t)\equiv z'(t)\equiv z''(t)\equiv 0,\forall t\in R.$$

因此,$x_1(t)\equiv x_2(t)$,那么方程(1)至多存在一个反周期解.

引理5 如果条件(H0)和(H1)成立,且 $f_1(t,x)\equiv f_1(t)$,当下面条件满足:

(H5) $C_1\frac{T}{2\pi}+C_2D^2\frac{T^2}{4\pi}+b\frac{T^2}{4\pi}+C_2D^2\frac{T^2}{2\pi}<1.$

则方程(1)至多存在一个反周期解.

2 主要结果

定理1 假设条件(H0)、(H1)、(H3)和(H4)成立,并且满足:

(H6) 对 $\forall t,x\in R$,有

$f_1(-x)=f_1(x),f_2(-x)=-f_2(x),g(t+\frac{T}{2},-x)=-g(t,x),\tau(t+\frac{T}{2})=\tau(t),p(t+\frac{T}{2})=-p(t)$,

则方程(1)存在唯一一个反周期解.

证明 考虑辅助方程

$$x''(t)=-\lambda f_1(x(t))x'(t)-\lambda f_2(x(t))x'((t))^2-\lambda g(t,x(t-\tau(t)))+\lambda e(t)\triangleq\lambda Q_1(t,x(t),x'(t)),\lambda\in(0,1]. \tag{12}$$

显然 $Q_1(t,x(t),x'(t))$ 连续.

由引理4知方程(1)至多有一个反周期解.下面只须证明方程(1)至少存在一个反周期解即可.

为了应用引理1,首先证明方程(12)所有反周期解有界.

设 $x(t)\in C_T^{1,\frac{1}{2}}$ 是方程(12)的任一反周期解,将(12)式两边同乘以 $x''(t)$,并从0到 T 积分,根据(4)式、(H0)、(H1)和Schwarz不等式,类似(5)式的估计得

$$\begin{aligned}|x''|_2^2\leqslant& C_1\frac{T}{2\pi}|x''|_2^2+b|x|_\infty\sqrt{T}|x''|_2+[\max\{|g(t,0)|:0\leqslant t\leqslant T\}+|p|_\infty]\sqrt{T}|x''|_2\leqslant\\&[C_1\frac{T}{2\pi}+b\frac{T^2}{4\pi}]|x''|_2^2+[\max\{|g(t,0)|:0\leqslant t\leqslant T\}+|p|_\infty]\sqrt{T}|x''|_2.\end{aligned} \tag{13}$$

结合(13)式和条件(H5)知,存在两个正常数 D_1 和 D_2,使得

$$|x''|_2\leqslant D_1, \tag{14}$$

$$|x'|_2<D_2,|x|_\infty<D_2. \tag{15}$$

由 $x(0)=x(T)$ 可知,存在常数 $\gamma\in[0,T]$ 使得 $x'(\gamma)=0$,于是

$$|x'(t)|=|x'(\gamma)+\int_\gamma^t x''(s)\,ds|\leqslant\sqrt{T}|x''|_2<\sqrt{T}D_1,\forall t\in[0,T]. \tag{16}$$

结合(15)式和(16)式可得,存在常数 $M_1>\sqrt{T}D_1+D_2$ 使得

$$\max\{|x|_\infty,|x'|_\infty\}<M_1. \tag{17}$$

取 $M=M_1+1$, $K=\{x\in C_T^{1,\frac{1}{2}}=X:\max\{|x|_\infty,|x'|_\infty\}<M\}$,则对 $\lambda\in(0,1]$,方程(12)在 ∂K 上没有反周期解.

其次,证明方程(1)反周期解的存在性.任取 $x(t)\in C_T^{k,\frac{1}{2}}$,则 $x(t)$ 可以展开成Fourier级数形式

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}[a_{2i+1}\cos\frac{2\pi(2i+1)t}{T}+b_{2i+1}\sin\frac{2\pi(2i+1)t}{T}].$$

定义算子 $L:C_T^{1,\frac{1}{2}}\to C_T^{2,\frac{1}{2}}$ 为

$$(Lx)(t)=\int_0^t x(s)\,ds-\frac{T}{2\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{b_{2i+1}}{2i+1}=$$

$$\frac{T}{2\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{a_{2i+1}}{2i+1}\sin\frac{2\pi(2i+1)t}{T}-\frac{b_{2i+1}}{2i+1}\cos\frac{2\pi(2i+1)t}{T}\right].$$

显然 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Lx)(t)=x(t)$.

由算子 L 的定义知

$$|(Lx)(t)|\leqslant\int_0^T|x(s)|\mathrm{d}s+\frac{T}{2\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|b_{2i+1}|}{2i+1}\leqslant T\|x\|+\frac{T}{2\pi}\left(\sum_{i=0}^{\infty}b_{2i+1}^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^2}\right)^{\frac12}.$$

注意到

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^2}\right)^{\frac12}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

并利用 Parseval 恒等式

$$\int_0^T|x(s)|^2\mathrm{d}s=\frac{T}{2}\sum_{i=0}^{\infty}[a_{2i+1}^2+b_{2i+1}^2],$$

可得

$$|(Lx)(t)|\leqslant T\|x\|+\frac{T}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2}{T}\int_0^T|x(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac12}\leqslant\left(T+\frac{T}{4}\right)\|x\|,\ \forall t\in[0,T],$$

即 $\|(Lx)(t)\|\leqslant\left(T+\frac{T}{4}\right)\|x\|$.

因此算子 L 为连续算子.

对任意的 $x(t)\in C_T^{1,-\frac12}$,由条件(H_6)知

$$Q_1\left(t+\frac{T}{2},x\left(t+\frac{T}{2}\right),x'\left(t+\frac{T}{2}\right)\right)=-Q_1(t,x(t),x'(t)).$$

所以,算子 $Q_1\in C_T^{0,-\frac12}$.定义算子 $F_\lambda:\bar{\Omega}\to C_T^{2,-\frac12}\subset X$ 为

$$F_\lambda(x)=\lambda L(L(Q_1(x)))=\lambda L^2(Q_1(x)),\lambda\in[0,1].$$

由 Arzela-Ascoli 定理易证,F_λ 为紧同伦.显然,F_1 在 $\bar{\Omega}$ 上的不动点即为方程(1)的反周期解,为此,我们只须证明 F_1 的不动点存在.

定义同伦连续场 $H_\lambda(x):\bar{\Omega}\times[0,1]\to C_T^{1,-\frac12}$ 为 $H_\lambda(x)=x-F_\lambda(x)$.由(17)式知 $H_\lambda(\partial\Omega)\neq0,\lambda\in[0,1]$.由 Leray-Schauder 度的紧同伦不变性知

$$\deg\{x-F_1x,\Omega,0\}=\deg\{x,\Omega,0\}\neq0.$$

故由引理 1 知,方程 $x-F_1x=0$ 在 Ω 内至少存在一个解,即算子 F_1 在 Ω 内至少存在一个不动点,从而方程(1)至少存在一个反周期解.再结合引理 4 知,方程(1)存在唯一反周期解.

定理 2 假设条件(H_0)、(H_1)和(H_5)成立,若 $f_1(t,x)\equiv f_1(t)$,并且满足:

(H_7) 对 $\forall\ t,x\in R$,有

$$f_1\left(t+\frac{T}{2}\right)=f_1(t),f_2(-x)=-f_2(x),g\left(t+\frac{T}{2},-x\right)=-g(t,x),$$

$$\tau\left(t+\frac{T}{2}\right)=\tau(t),p\left(t+\frac{T}{2}\right)=-p(t).$$

则方程(1)存在唯一一个反周期解.

注 本文的方法可用于证明具有多个偏差变元的 Lienard 型方程

$$x''(t)+f_1(t,x(t))x'(t)+f_2(x(t))(x'(t))^2+\sum_{i=1}^{n}g_i(t,x(t-\tau_i(t)))=p(t)$$

的反周期解的存在唯一性.

3 举例

例 设 $g(t,x)=\frac{1+\sin^4t}{12\pi}\sin x$,则 Lineard 型方程

$$x''(t)+\frac18x'(t)-\frac18(\arctan x(t))(x'(t))^2+g(t,x(t-\sin^2t))=\frac{1}{40\pi}\cos t\qquad(18)$$

存在唯一反 2π-周期解.

证明 由(18)式知,$f_1(t,x)=\frac18$,$f_2(x)=-\frac18\arctan x$,$p(t)=\frac{1}{40\pi}\cos t$,则 $b=\frac{1}{6\pi}$,$T=2\pi$.取 $C_1=C_2=\frac18$,$C_3=1$,则

$$D=\frac12\frac{[\max\{|g(t,0)|:0\leqslant t\leqslant T\}+|p|_\infty]T}{1-\left[C_1\frac{T}{2\pi}+b\frac{T^2}{4\pi}\right]}=\frac12\frac{\frac{1}{40\pi}\times2\pi}{1-\left[\frac18+\frac16\right]}=\frac{3}{85},$$

$$C_1\frac{T}{2\pi}+C_3D\frac{T^2}{4\pi}+C_2D^2\frac{T^2}{4\pi}+b\frac{T^2}{4\pi}+C_2D^2\frac{T^2}{2\pi}=\frac18+\frac{3\pi}{85}+\frac18\left(\frac{3}{85}\right)^2\pi+\frac16+\frac18\left(\frac{3}{85}\right)^22\pi<1.$$

容易验证,定理 1 的条件(H_6)成立,从而由定理 1 知,方程(18)存在唯一反 2π-周期解.

参考文献:

[1] Villari G. Periodic solutions of Lienard equation[J]. J Math Anal Appl, 1982, 86: 376-386.

[2] Villari G. On the existence of periodic solutions of the Lienard equation[J]. Nonlinear Anal, 1983, 7: 71-78.

[3] Mawhin J L, Ward J R. Periodic solutions of some forced Lienard differential equation at resonance [J]. Arch Math, 1983, 41: 337-351.

[4] 彭世国.时滞的 Lienard 型方程的周期解[J].工程数学学报, 2004, 21(3): 463-466.

[5] 李永昆.具偏差变元的 Lienard 型方程的周期解[J].数

学研究与评论, 1998, 18(4): 565-570.

[6] Aizicivici S, McKibben M, Reish S. Anti-periodic solutions to nonmonotone evolution equations with discontinuous nonlinearities [J]. Nonlinear Anal, 2001, 43: 233-251.

[7] Liu Bingwen. Anti-periodic solutions for forced Rayleigh-type equations [J]. Nonlinear Analysis: Real Word Applications, 2009, 10: 2850-2856.

[8] Chen Y, Nieto J J, O'Regan D. Anti-periodic solutions for fully nonlinear first-order differential equations [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2007, 46: 1183-1190.

[9] 陈太勇, 刘文斌, 张建军, 等. Lienard方程反周期解的存在性 [J]. 数学研究, 2007, 40(2): 187-195.

[10] Deimling K. Nonlinear functional analysis [M]. New York: Springer-Verlag, 1985.

[11] Mawhin J. An extension of the theorem of A C Lazer on forced nonlinear Oscillations [J]. J Math Anal Appl, 1972, 40: 20-29.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 26页 Continue from page 26)

[5] Bainov D D, Simeonov P. Systems with impulse effect, stability, theory and applications [M]. Chichester: Ellis Horwood, 1989.

[6] Bainov D D, Simeonov P. Impulsive differential equations: periodic solutions and applications [M]. New York: Logman Scientific and Technical, 1993.

[7] Stamov G T. Impulsive cellular neural networks and almost periodicity [J]. Proc Japan Acad, 2004, 80: 198-203.

[8] Lakshimikantham V, Bainov D D, Simeonov P. Theory of impulsive differential equation [M]. Singapore: World Scientific Series in Modern Applied Mathematics, 1989.

[9] 郭大均. 非线性泛函分析 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2002.

[10] Krasnoselskii M A. Positive solutions of operator equations [M]. Gomingen: Noordholf, 1964.

(责任编辑: 尹 闯)