DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2010.01.013
广西科学 Guangxi Sciences 2010, 17(1): 43~ 47, 51

ND序列的中心极限定理*
Central Limit Theorems for Arrays of Negatively Dependent Random Variables

李春红,吴群英,付艳莉
LI Chun-hong, WU Qun-ying, FU Yan-li

(桂林理工大学数理系,广西桂林 541004)
(College of Science, Guilin University of Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 讨论同分布 ND序列的渐进正态问题,给出 ND序列的中心极限定理,在 NA的基础上得到了 ND条件下同样的结果,并通过加进数列有界的控制,使得中心极限定理的证明过程得到进一步简化.

关键词: NA序列 ND序列 中心极限定理
中图法分类号: O211.4 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2010)01-0043-05

Abstract This paper discusses the arrays of negatively dependent random variables, it is difficult to study sequences of ND because common moment inequality of ND have not been given. In this paper we suppose that the series of numbers has a marginal. Then we shall try to extend the limit theorem to sequences of ND. The same result is obtained and the certification process is also simplified.

Key words NA, ND, central limit theorems.

ND序列是蕴涵 NA负相依序列在内的一类随机变量列,到目前为止还未建立起一般的 ND序列部分和最大值的矩不等式,对这方面的研究显得较为困难,所得结果还未达到独立情形的完善结果.但是为了解决问题,我们就想办法避开利用 NA序列部分和最大值的矩不等式,寻求其他解决办法.本文研究 ND序列的中心极限定理,将文献 [1]中 NA条件下的定理 B推广到了 ND的情形.

1 预备知识

对独立同分布的随机变量序列在二阶矩存在的条件下有如下众所周知的中心极限定理,即

定理 A 设 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 是独立同分布的随机序列, $\mu = EX_n$, $0 < \sigma^2 = \operatorname{var} X_n < \infty$.则

$$P\{\frac{1}{n\sigma}(\sum_{k=1}^{n} X_n - n\mu) < x\} \xrightarrow{d} \Phi(x).$$

苏淳等[1] 将独立的结果推广到 NA条件下进行研究,得出结果如下:

定理 B 设 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 是 NA同分布序列,有 $EX_1 = 0$, $0 < EX_1^2 < \infty$ 及

i) $\liminf_{n\to\infty} \frac{ES_n^2}{n} = \sigma^2 > 0$;

ii) 存在自然数序列 $\{n_k\}$,对某 $0 < \tau \leqslant 1$,满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{m_k}{n_k})^{1+\tau/2} < \infty,$$

iii) $\forall j \in N$,随机变量 $S_{n_{j-1}, m_j} = \sum_{k=n_{j-1}+1}^{m_j} X_k$,设 S_{n_{j-1}, m_j} 相互独立,则必有

$$\frac{S_n}{\sqrt{ES_n^2}} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

其中 $n_0 = 0$, $1 < n_1 < n_2 < \cdots$, $S_{m,n} = \sum_{j=1}^{n} X_{j+m}$, $S_n = S_{0,n}$, $m_k = n_k - n_{k-1}$, $k \geqslant 1$.

文献 [2]研究了线性负相依 (LIND)随机序列的中心极限定理,得出下面的结果:

定理 C 设 $\{X_{ni}; 1 \leqslant i \leqslant m_k, n \geqslant 1\}$是线性负相依的 (LIND) 随机变量列, $EX_{ni} = 0$,

$$S_n'^2 = \operatorname{var}(\sum_{i=1}^{m_n} X_{ni}) \to \infty, \sum_{i=1}^{m_n} E(X_{ni}^2 I_{[|X_{ni}| > \varepsilon S_n'^2]}) =$$

收稿日期: 2009-04-08
修回日期: 2009-05-30
作者简介: 李春红 (1978),女,硕士研究生,主要从事概率论与数理统计研究。
* 国家自然科学基金 (10661006),广西“新世纪十百千人才工程”专项资金 (2005214)及广西自然科学基金 (桂科自 0832262)资助。

$o(S_n'^2)$,

$$\frac{1}{S_n'^2}\sum_{i<j}\sum \operatorname{cov}(X_{ni},X_{nj})\to 0, n\to\infty,$$

则

$$S_n'^{-}\sum_{i=1}^{m_n}X_{ni}\xrightarrow{d}N(0,1).$$

定义 **1.1** 称随机变量 $X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n,n\geqslant 2$ 是负相关(NA)的,若对 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任意两个非空不交子集 A_1 和 A_2,均有

$$\operatorname{cov}(f_1(X_i;i\in A_1),f_2(X_j;j\in A_2))\leqslant 0, \tag{1.1}$$

其中 f_1 和 f_2 是使(1.1)式有意义且对各变元不降的函数.

称随机变量列 $\{X_n;n\geqslant 2\}$ 是 NA的,如果对任意的 $n\geqslant 2,X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 NA的.

定义 **1.2** 称随机变量 X 和 Y 是负相依的(ND),若对 $\forall x,y\in R$,有

$$P[X\leqslant x,Y\leqslant y]\leqslant P[X\leqslant x]P[Y\leqslant y], \tag{1.2}$$

称随机变量列 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是两两负相依(PND)的,如果对任意两个不同的随机变量 X_i,X_j 满足(1.2)式.

注意到对 $\forall x,y\in R$,(1.2)式蕴涵

$$P[X>x,Y>y]\leqslant P[X>x]P[X>x]. \tag{1.3}$$

同时也可以验证(1.3)式蕴涵(1.2)式.因此,(1.2)式和(1.3)式是等价的.文献[3]指出(1.2)式和(1.3)式对于3个或3个以上的随机变量,(1.2)式和(1.3)式互不包含.现考虑两两独立随机变量 X_1,X_2 和 X_3,假设 (X_1,X_2,X_3) 取值为(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)和(0,0,0),且取到每组值的概率均为$\frac{1}{4}$.由于 X_1,X_2 和 X_3 两两独立,因此他们都使(1.2)式和(1.3)式成立.然而对所有的 x_1,x_2 和 x_3,可以验证

$$P[X_1>x_1,X_2>x_2,X_3>x_3]\leqslant P[X_1>x_1]P[X_2>x_2]P[X_3>x_3], \tag{1.4}$$

但是

$$P[X_1\leqslant 0,X_2\leqslant 0,X_3\leqslant 0]=\frac{1}{4}>\frac{1}{8}=P[X_1\leqslant 0]P[X_2\leqslant 0]P[X_3\leqslant 0].$$

再设 (X_1,X_2,X_3) 取值 $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$,取到每组值的概率均为$\frac{1}{4}$,当 $x_1=0,x_2=0,x_3=0$ 时并不满足(1.4)式,但是可以验证对于任意 x_1,x_2,x_3

$$P[X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,X_3\leqslant x_3]\leqslant P[X_1\leqslant x_1]P[X_2\leqslant x_2]P[X_3\leqslant x_3]$$

成立.因此,给出下面 ND随机变量的定义

定义 **1.3** 称随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 是 ND的,如果对所有的实数 $x_1,\cdots,x_n$,有

$$P\bigcap_{j=1}^{n}(X_j\leqslant x_j)\leqslant\prod_{j=1}^{n}P[X_j\leqslant x_j], \tag{1.5}$$

和

$$P\bigcap_{j=1}^{n}(X_j>x_j)\leqslant\prod_{j=1}^{n}[X_j>x_j]. \tag{1.6}$$

随机变量序列 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 称为 ND的,若其中的任意有限子序列 $X_1,\cdots,X_n$ 是 ND的.

Lehmann[4] 给出了 PND的定义,Bozorgnia等[5] 给出了 ND的定义,Joag-Dev等[6] 提出了 NA的概念.这些相依随机变量的概念在可靠性理论上有较广泛的应用.从定义易知 NA包含 ND,而 ND并不包含 NA.

定义 **1.4** 称 $\{X_i\}$ 是线性负相依的(LIND),如果对任意不相交的子集 A,B 和 $\lambda\in R,\sum_{k\in A}\lambda_kX_k$ 和 $\sum_{l\in B}\lambda_lX_l$ 均是负相依的.

比较 ND和 LIND的定义,下面的例子表明在线性条件下多个随机变量序列并不能保持 ND性.

例 **1** 设 X_i 是三元随机变量,且概率 $P(X_i=1)=0.5,i=1,2,3$.设 (X_1,X_2,X_3) 取值(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)和(1,1,1),且取到每个值的概率均是$\frac{1}{4}$.易知它们满足 ND的条件,但是

$$P(X_1+X_3\leqslant 1,X_2\leqslant 0)=\frac{4}{8}>P(X_1+X_3\leqslant 1)P(X_2\leqslant 0)=\frac{3}{8}.$$

从式子得 X_1+X_3 和 X_2 不是 ND的.

引理 **1.1**[5] 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是 ND随机序列,$\{f_n;n\geqslant 1\}$ 是非升(或非降)的 Borel函数序列,则 $\{f_n(X_n);n\geqslant 1\}$ 仍是 ND的.

引理 **1.2**[1] 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是非负 ND随机序列,则 $E(X_1X_2\cdots X_n)\leqslant EX_1EX_2\cdots EX_n$.

引理 **1.3** 设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是 ND随机序列,$EX_n=0,E|X_n|^p<\infty,p\geqslant 2$.记 $B_n=\sum_{i=1}^{n}EX_i^2$,则

$$P(|S_n|\geqslant x)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(|X_i|\geqslant x/t)+2e^t(1+\frac{x^2}{tB_n})^{-t},\forall x,t>0, \tag{1.7}$$

$$E|S_n|^p\leqslant c_p\{\sum_{i=1}^{n}E|X_i|^p+(\sum_{i=1}^{n}EX_i^2)^{\frac{p}{2}}\}. \tag{1.8}$$

其中 $c_p>0$ 只依赖于 p.

证明　令 $T>0$,且记 $X_i'=\min(X_i,T),S_n'=$

$\sum_{i=1}^{n} X_i'$,由引理 1.1易知$\{X_i'; i\geqslant 1\}$也是 ND序列,注意到$(e^x-1-x)/x^2$是关于x的非降函数,且对任意的$t>0$,有$tX_i'\leqslant t\alpha$,$EX_i'\leqslant EX_i$,则

$$E(e^{tX_i'}) = 1+tEX_i'+E\left(\frac{e^{tX_i'}-1-tX_i'}{t^2X_i'^2}t^2X_i'^2\right)\leqslant 1+tEX_i+(e^{t\alpha}-1-t\alpha)\alpha^{-2}EX_i^2\leqslant \exp\{(e^{t\alpha}-1-t\alpha)\alpha^{-2}EX_i^2\}. \qquad (1.9)$$

这里最后一个不等式由$1+x\leqslant e^x, \forall x\in R$可得.记$B_n=\sum_{i=1}^{n} EX_i^2$,由于$\{X_n; n\geqslant 1\}$是 ND的.从(1.9)式和引理 1.2得,对任意的$x>0, h>0$,可得

$$e^{-hx}E(e^{hS_n'}) = e^{-hx}E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{hX_i'}\right)\leqslant e^{-hx}\prod_{i=1}^{n} Ee^{hX_i'}\leqslant \exp\{-hx+(e^{h\alpha}-1-h\alpha)\times\alpha^{-2}B_n\}, \qquad (1.10)$$

又令$h=\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{x\alpha}{B_n}+1\right)>0$,

$$(e^{h\alpha}-1-h\alpha)\alpha^{-2}B_n=\frac{x}{\alpha}-\frac{B_n}{\alpha^2}\ln\left(\frac{x\alpha}{B_n}+1\right)\leqslant\frac{x}{\alpha},$$

将之代入(1.10)式,可进一步得

$$e^{-hx}E(e^{hS_n'})\leqslant \exp\left\{\frac{x}{\alpha}-\frac{x}{\alpha}\ln\left(\frac{x\alpha}{B_n}+1\right)\right\}.$$

令$t=\frac{x}{\alpha}$代入上面不等式,得

$$P(S_n\geqslant x)\leqslant\sum_{i=1}^{n} P(X_i\geqslant x)+P(S_n'\geqslant x)\leqslant \sum_{i=1}^{n} P(X_i\geqslant x)+e^{-hx}Ee^{hS_n'}\leqslant\sum_{i=1}^{n} P\left(X_i\geqslant \frac{x}{t}\right)+\exp\left\{t-t\ln\left(\frac{x^2}{tB_n}+1\right)\right\}=\sum_{i=1}^{n} P\left(X_i\geqslant \frac{x}{t}\right)+e^t\left(1+\frac{x^2}{tB_n}\right)^{-t}.$$

在上式中用$-X_i$代替X_i,得

$$P(-S_n\geqslant x)\leqslant\sum_{i=1}^{n} P\left(-X_i\geqslant \frac{x}{t}\right)+e^t\left(1+\frac{x^2}{tB_n}\right)^{-t}.$$

有

$$P(|S_n|\geqslant x)=P(S_n\geqslant x)+P(S_n\leqslant -x)\leqslant\sum_{i=1}^{n} P(|X_i|\geqslant x/t)+2e^t\left(1+\frac{x^2}{tB_n}\right)^{-t}.$$

因此(1.7)式得证.

再令$t=p$,由$E|X|^p=p\int_0^{+\infty}x^{p-1}P(|X|\geqslant x)\mathrm{d}x$,可得

$$E|S_n|^p = p\int_0^{+\infty}x^{p-1}P(|S_n|\geqslant x)\mathrm{d}x\leqslant p\sum_{i=1}^{n}\int_0^{+\infty}x^{p-1}P\left(|X_i|\geqslant\frac{x}{p}\right)\mathrm{d}x+2pe^p\int_0^{+\infty}x^{p-1}\left(1+\frac{x^2}{pB_n}\right)^{-p}\mathrm{d}x = p^p\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p+pe^p(pB_n)^{\frac{p}{2}}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\frac{p}{2}-1}}{(1+u)^p}\mathrm{d}u = p^p\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p+p^{\frac{p}{2}+1}e^pB\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)B_n^{\frac{p}{2}}\leqslant c_p\left\{\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p+\left(\sum_{i=1}^{n} EX_i^2\right)^{\frac{p}{2}}\right\},$$

其中$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}(1+x)^{-(\alpha+\beta)}\mathrm{d}x$,$\alpha,\beta>0$是 Beta函数,

$$c_p=\max\left(p^p, p^{1+\frac{p}{2}}e^pB\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)\right).$$

因此(1.8)式得证.

定义 1.5 假设f是R上的实函数,对某$\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$满足下列条件

$$\|f\|_\alpha\triangleq\sup\{|f(x)-f(y)|/|x-y|^\alpha; x\in R, y\in R\},$$

$$\Lambda_\alpha=\{f; R\to R, \|f\|_\alpha<\infty\}.$$

引理 1.4[7] 设$X_1,\cdots,X_n$是独立随机变量,$EX_j=0$,对某$\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$和$j(j=1,\cdots,n)$.假设函数$f$在$R$上二阶可导,并满足$\|f''\|_\alpha<\infty$.则

$$\left|Ef(S_n/s_n)-\int f\,\mathrm{d}\Phi\right|\leqslant \|f''\|_\alpha s_n^{-2-\alpha}\sum_{j=1}^{n} E|X_j|^{2+\alpha},$$

其中$s_n=(ES_n^2)^{1/2}=\left(\sum_{j=1}^{n} EX_j^2\right)^{1/2}$,$\Phi$是标准正态分布.

2 主要结果

定理 1 设$\{X_i; i\in N\}$是 ND同分布序列,$EX_1=0$,$0<EX_1^2<\infty$及

i) $\liminf_{n\to\infty}\frac{ES_n^2}{n}=\sigma^2>0$;

ii) 存在严格上升的自然数列$\{n_k\}$,满足$m_k=n_k-n_{k-1}$,$k\geqslant 1$,且存在$M>0(M\in R)$,满足$\sup m_k\leqslant M<\infty$;

iii) $S_{n_{j-1}m_j}$是独立序列,其中$S_{n_{j-1}m_j}=\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}X_k$,

则

$$\frac{S_n}{\sqrt{ES_n^2}}\xrightarrow{d}N(0,1), \qquad (2.1)$$

其中$n_0=0$,$1<n_1<n_2<\cdots$,$S_{m,n}=\sum_{j=1}^{n}X_{j+m}$,$S_n=S_{0,n}$.

先来为证明定理 1做些准备.

第一,在定理 1的条件 i)之下,对充分大的n,都有$ES_n^2\geqslant cn$.对任意的$\varepsilon>0$,有

$$P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant m_k}|S_{n_{k-1}j}|>\varepsilon\sqrt{n_{k-1}}\right)\leqslant P\left(\sum_{j=1}^{m_k}|S_{n_{k-1}j}|>\right.$$

$\varepsilon\sqrt{n_{k-1}})\leqslant \dfrac{E(\sum_{j=1}^{m_k}|S_{n_{k-1},j}|)^2}{\varepsilon^2 n_{k-1}}$.

因此 $\{X_i; i\in N\}$ 是 ND同分布序列,且满足 $0<EX_1^2<\infty$, $\sup m_k\leqslant M<\infty$,得

$$\frac{E(\sum_{j=1}^{m_k}|S_{n_{k-1},j}|)^2}{\varepsilon^2 n_{k-1}}\leqslant \frac{cm_k^4EX_1^2}{\varepsilon^2 n_{k-1}}\ll c\frac{1}{n_{k-1}}\to 0,k\to\infty.$$

由此知为了证明(2.1)式,现在仅需证明

$$\frac{S_{n_k}}{\sqrt{ES_{n_k}^2}}\xrightarrow{d}N(0,1).\qquad(2.2)$$

第二,假设 $X_1,\cdots,X_n$ 是同分布序列,有 $EX_1=0$ 和 $0<EX_1^2<\infty$,对 $j\in N$.令

$$\tilde{X}_j=-\sqrt{j}I_{(X_j<-\sqrt{j})}+X_jI_{(|X_j|\leqslant\sqrt{j})}+\sqrt{j}I_{(X_j>\sqrt{j})},\ Y_j=\tilde{X}_j-E\tilde{X}_j,\ Z_j=X_j-Y_j.$$

则 $\tilde{X}_j,Y_j,Z_j$ 都是 X_j 的非降函数,因此由引理 1.1知 $\{\tilde{X}_j\},\{Y_j\},\{Z_j\}$都分别仍是 ND序列,且有 $EY_j=0$, $EZ_j=EX_j-EY_j=0$, $Z_j=X_j-\tilde{X}_j+E\tilde{X}_j=(X_j-\tilde{X}_j)-E(X_j-\tilde{X}_j)$.

因此,由 ND性

$$\frac{1}{n}E(\sum_{j=1}^{n}Z_j)^2\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}EZ_j^2\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E(X_j-\tilde{X}_j)^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E(X_j-\tilde{X}_j)^2(I_{(|X_j|\leqslant\sqrt{j})}+I_{(|X_j|>\sqrt{j})})\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[EX_j^2I_{(|X_j|>\sqrt{j})}+jP(|X_j|>\sqrt{j})]=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[EX_1^2I_{(|X_1|>\sqrt{j})}+jP(|X_1|>\sqrt{j})]\leqslant\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}EX_1^2I_{(|X_1|>\sqrt{j})}.$$

于是由 $EX_1^2<\infty$,立知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}E(\sum_{j=1}^{n}Z_j)^2=0.$$

从而对 $\forall\varepsilon>0$,均有

$$P(\frac{1}{\sqrt{n}}|\sum_{j=1}^{n}Z_j|>\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2n}E(\sum_{j=1}^{n}Z_j)^2\to 0.\qquad(2.3)$$

又由于

$$\frac{1}{n}E(\sum_{j=1}^{n}Y_j)^2=\frac{1}{n}E(\sum_{j=1}^{n}(X_j-Z_j))^2=\frac{1}{n}ES_n^2+\frac{1}{n}E(\sum_{j=1}^{n}Z_j)^2-\frac{2}{n}E[S_n(\sum_{j=1}^{n}Z_j)].\qquad(2.4)$$

由 Hölder不等式,得

$$\frac{1}{n}E[S_n(\sum_{j=1}^{n}Z_j)]\leqslant(\frac{1}{n}ES_n^2)^{1/2}(\frac{1}{n}E(\sum_{j=1}^{n}Z_j)^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant(EX_1^2)^{1/2}(\frac{1}{n}E(\sum_{j=1}^{n}Z_j)^2)^{\frac{1}{2}}\to 0.\qquad(2.5)$$

因此,得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{E(\sum_{j=1}^{n}Y_j)^2}{n}=\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}ES_n^2=\sigma^2>0.\qquad(2.6)$$

综合上面证明,即知要证明(2.2)式,只需证明

$$\frac{(\sum_{j=1}^{n_k}Y_j)}{\sqrt{E(\sum_{j=1}^{n_k}Y_j)^2}}\xrightarrow{d}N(0,1),k\to\infty.\qquad(2.7)$$

第三, $\frac{1}{m_k}E(\sum_{j=1}^{m_k}Z_{n_{k-1}+j})^2\leqslant\frac{1}{m_k}[\sum_{j=1}^{m_k}EX_1^2I_{(|X_1|>\sqrt{n_{k-1}+j})}+(n_{k-1}+j)P(|X_1|>\sqrt{n_{k-1}+j})]\leqslant 2EX_1^2I_{(|X_1|>\sqrt{n_{k-1}})}\to 0,k\to\infty$.

因此,得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{m_k}E(\sum_{j=1}^{m_k}Y_{n_{k-1}+j})^2=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{m_k}E(\sum_{j=1}^{m_k}X_{n_{k-1}+j})^2=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{m_k}ES_{n_{k-1},m_k}^2=\sigma^2,k\to\infty.$$

以上 3点为定理 1的证明起到了简化作用.

定理 1的证明 记 $U_k=\sum_{j=1}^{m_k}Y_{n_{k-1}+j}$, $T_k=\sum_{j=1}^{k}U_j=\sum_{j=1}^{n_k}Y_j$,

$$G_k(u)=P(\frac{T_k}{\sqrt{ET_k^2}}<u),u\in R.\qquad(2.8)$$

因此,由上面的准备工作和定理 1条件 iii)得, $\{U_k;k\in N\}$为独立随机变量序列,且 $EU_k=0$, $E|U_k|^p<\infty$, $\forall p>0$.因此,为证明(2.2)式的结论,只需证明 $\forall u\in R$,有

$$\lim_{k\to\infty}G_k(u)=\Phi(u),\qquad(2.9)$$

其中 $\Phi(u)$ 为标准正态分布函数.

取定 $u\in R$,对每个 $\varepsilon\in(0,1]$,构造函数

$f_\varepsilon,g_\varepsilon:R\to R$,

使它们均 3次可导,并且

(1) $0\leqslant f_\varepsilon(x)\leqslant 1$, $0\leqslant g_\varepsilon(x)\leqslant 1$;

(2) $f_\varepsilon(x)=\begin{cases}1,x\leqslant u\\0,x\geqslant u+\varepsilon\end{cases}$ $g_\varepsilon(x)=\begin{cases}1,x\leqslant u-\varepsilon\\0,x\geqslant u\end{cases}$;

(3) 对定理 1条件 ii)中的 $0<\tau\leqslant 1$,有 $\|f''_\varepsilon\|_\tau\leqslant c\varepsilon^{2-\tau}$, $\|g''_\varepsilon\|_\tau\leqslant c\varepsilon^{2-\tau}$,

事实上，对 $\varepsilon=1$，易知满足上述条件的函数存在，对 $0<\varepsilon<1$，只要令

$$f_\varepsilon(x)=f_1\left(u+\frac{x-u}{\varepsilon}\right),\ g_\varepsilon(x)=g_1\left(u+\frac{x-u}{\varepsilon}\right).$$

不难看出，对任何 $0<\varepsilon<1$，都有

$$Eg_\varepsilon\left[\frac{T_k}{\sqrt{ET_k^2}}\right]\leqslant G_k(u)\leqslant Ef_\varepsilon\left[\frac{T_k}{\sqrt{ET_k^2}}\right],$$

$$Eg_\varepsilon\left[\frac{T_k}{\sqrt{ET_k^2}}\right]-\Phi(u)\leqslant G_k(u)-\Phi(u)\leqslant Ef_\varepsilon\left[\frac{T_k}{\sqrt{ET_k^2}}\right]-\Phi(u).$$

因此有

$$|G_k(u)-\Phi(u)|\leqslant\sum_{j=1}^{2}I_j(\varepsilon,k)+\sum_{j=1}^{2}J_j(\varepsilon),$$

其中 $I_1(\varepsilon,k)=\left|Ef_\varepsilon\left(\frac{T_k}{\sqrt{ET_k^2}}\right)-\int f_\varepsilon d\Phi\right|$，$I_2(\varepsilon,k)=\left|Eg_\varepsilon\left(\frac{T_k}{\sqrt{ET_k^2}}\right)-\int g_\varepsilon d\Phi\right|$，

$$J_1(\varepsilon)=\left|\int f_\varepsilon d\Phi-\Phi(u)\right|,\ J_2(\varepsilon)=\left|\int g_\varepsilon d\Phi-\Phi(u)\right|.$$

显然有

$$J_1(\varepsilon)+J_2(\varepsilon)\leqslant\int_u^{u+\varepsilon}|f_\varepsilon|d\Phi+\int_{u-\varepsilon}^{u}|g_\varepsilon|d\Phi\leqslant\int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon}d\Phi(u)\leqslant\frac{4\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}.$$

因此只要 $\varepsilon>0$ 足够小，就可以使 $J_1(\varepsilon)+J_2(\varepsilon)$ 小到任何需要的程度．于是为证结论，只需对任何取定的足够小的 $\varepsilon>0$ 证明 $\lim I_j(\varepsilon,k)=0$，$j=1,2$．二者证明类似，故仅证 $j=1$ 的情形，由引理1.4，得

$$I_1(\varepsilon,k)\leqslant c\|f''_\varepsilon\|_\delta(ET_k^2)^{-1-\delta/2}\sum_{j=1}^{k}E|U_j|^{2+\delta}. \tag{2.10}$$

由 $U_k=\sum_{j=1}^{m_k}Y_{n_{k-1}+j}$ 和 $EY_{n_k}=0$ 知 $\{U_k\}$ 是 ND 序列．由引理1.3知

$$E|U_k|^{2+\delta}\leqslant c_\delta\left(\sum_{j=1}^{m_k}E|Y_{n_{k-1}+j}|^{2+\delta}+\left(\sum_{j=1}^{m_k}EY^2_{n_{k-1}+j}\right)^{1+\delta/2}\right)\leqslant c_\delta\left(\sum_{j=1}^{m_k}E|Y_{n_{k-1}+j}|^{2+\delta}+(m_kEX_1^2)^{1+\delta/2}\right). \tag{2.11}$$

且由 $\sup m_k\leqslant M<\infty$ 和 $EX_1^2<\infty$，得 $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{m_kEX_1^2}{n_k}\right)^{1+\delta/2}<\infty$．又由 Kronecker 引理，得

$$\lim_{k\to\infty}n_k^{-1-\delta/2}\sum_{j=1}^{k}(m_jEX_1^2)^{1+\delta/2}=0. \tag{2.12}$$

又 $Y_j=\tilde X_j-E\tilde X_j$，由 c_r 不等式得

$$E|Y_j|^{2+\delta}\leqslant c_{2+\delta}(E|\tilde X_j|^{2+\delta}+(E|\tilde X_j|)^{2+\delta})\leqslant c_{2+\delta}(E|\tilde X_j|^{2+\delta}+E|\tilde X_j|^{2+\delta})=2c_{2+\delta}E|\tilde X_j|^{2+\delta}.$$

进而得

$$\sum_{j=1}^{\infty}j^{-1-\delta/2}E|\tilde X_j|^{2+\delta}=\sum_{j=1}^{\infty}j^{-1-\delta/2}E|\tilde X_j|^{2+\delta}(I_{(|X_j|\leqslant\sqrt j)}+I_{(|X_j|>\sqrt j)})=\sum_{j=1}^{\infty}j^{-1-\delta/2}E|X_j|^{2+\delta}I_{(|X_j|\leqslant\sqrt j)}+\sum_{j=1}^{\infty}P(|X_j|>\sqrt j).$$

由 $\{X_i;i\in N\}$ 的同分布性和 $EX_1^2<\infty$，知

$$A_2=\sum_{j=1}^{\infty}P(|X_j|>\sqrt j)=\sum_{j=1}^{\infty}P(X_1^2>j)<\infty.$$

并且有

$$A_1=\sum_{j=1}^{\infty}j^{-1-\delta/2}E|X_j|^{2+\delta}I_{(|X_j|\leqslant\sqrt j)}=\sum_{j=1}^{\infty}j^{-1-\delta/2}E|X_1|^{2+\delta}I_{(|X_1|\leqslant\sqrt j)}=\sum_{j=1}^{\infty}j^{-1-\delta/2}\sum_{l=1}^{j}E|X_1|^{2+\delta}I_{(l-1<X_1^2\leqslant l)}=$$
$$\sum_{l=1}^{\infty}E|X_1|^{2+\delta}I_{(l-1<X_1^2\leqslant l)}\sum_{j=l}^{\infty}j^{-1-\delta/2}\leqslant c\sum_{l=1}^{\infty}l^{-\delta/2}E|X_1|^{2+\delta}I_{(\sqrt{l-1}<|X_1|\leqslant\sqrt l)}\leqslant c\sum_{l=1}^{\infty}E|X_1|^{2}I_{(l-1<X_1^2\leqslant l)}=EX_1^2<\infty.$$

因此

$$\sum_{j=1}^{\infty}j^{-1-\delta/2}E|\tilde X_j|^{2+\delta}\triangleq A_1+A_2<\infty.$$

由 Kronecker 引理，得

$$\lim_{k\to\infty}n_k^{-1-\delta/2}\sum_{j=1}^{n_k}E|Y_j|^{2+\delta}=0. \tag{2.13}$$

综上所述，由(2.11)式，(2.12)式和(2.13)式得

$$\lim_{k\to\infty}n_k^{-1-\delta/2}\sum_{j=1}^{k}E|U_j|^{2+\delta}=0. \tag{2.14}$$

由(2.6)式知 $\liminf\limits_{k\to\infty}ET_k^2/n=\liminf\limits_{k\to\infty}E\left(\sum_{j=1}^{n_k}Y_j\right)^2/n_k=\sigma^2>0$，　(2.15)

且 $\|f''_\varepsilon\|_\delta$ 与 k 无关，综合(2.14)式和(2.15)式，得

$$I_1(\varepsilon,k)\leqslant c\|f''_\varepsilon\|_\delta(ET_k^2)^{-1-\delta/2}\sum_{j=1}^{k}E|U_j|^{2+\delta}\to0.$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}I_1(\varepsilon,k)=0$．

同样可证得 $\lim\limits_{k\to\infty}I_2(\varepsilon,k)=0$．综上定理1得证．

(下转第51页 Continue on page 51)

混沌系统精确同步.数值模拟结果表明,该方法适合于共轭 Lorenz型系统中任何系统的自同步控制和共轭 Lorenz型族系统与 Lorenz型系统之间任何两系统的异结构同步控制.

参考文献:

[1] 刘爱民,张康明.洛伦兹超混沌系统的同步控制[J].广西科学,2009,16(2):164-166.

[2] 刘洋,彭良玉.超混沌 chen系统的同步控制[J].微计算机信息,2008(2-1):14-15.

[3] 陈志盛,孙克辉,张泰山.Liu混沌系统的非线性反馈同步控制[J].物理学报,2005,54(6):2580-2583.

[4] 陈关荣,吕金虎.Lorenz系统族的动力学分析、控制与同步[M].北京:科学出版社,2003.

[5] 黄润生,黄浩.混沌控制及其应用[M].武汉:武汉大学出版社,2003.

[6] Yang Q G, Chen G R, Huang K F. Chaotic atrratctors of the conjugate Lorenz-type system[J]. Int J Bifur Chaos, 2007, 17(11): 3929-3949.

[7] Liao H H, Zhou T S, Tang Y. The chaotic region of Lorenz-type system in the parametric space[J]. Chaos, Solitions and Fractal, 2004, 21(1): 185-192.

(责任编辑:尹 闯)

(上接第 47页 Continue from page 47)

参考文献:

[1] 苏淳,迟翔.非平稳 NA序列中心极限定理的一些结果[J].应用数学学报,1998,21(1):9-21.

[2] Ronald F. Patterson Wendy D, Smith Robert L, et al. Limit theorems for negatively dependent random variables[J]. Nonlinear Analysis, 2001, 47: 1283-1295.

[3] Ebrahimi N, Ghosh M. Multivariate negative dependence[J]. Comm Statist Theory Methods, 1981, A10: 307-337.

[4] Lehmann E L. Some concepts of dependence[J]. Ann Math Statitacs, 1966, 43: 1137-1153.

[5] Bozorgnia A, Patterson R F, Taylor R L. Limit theorems for NDr v's[R]. Technical Report: University of Georgia, 1993.

[6] Joag-Dev K, Proschan F. Negative association of random variables with applications[J]. Ann Statist, 1983, 11(1): 286-295.

[7] Joag-Dev K, Proschan F. Ngative associate of random variables with applications[J]. Ann Statist, 1983, 11: 268-295.

[8] Amini M. Some contribution to limit theorems for negatively dependent random variable[D]. Mashhad Ferdowsi University, 2000.

[9] Bozorgnia A, Patterson R F, Taylor R L. Weak laws of large numbers for negatively dependent random variables in Banach spaces[C]//Brunner E, Denker M. Research developments in probability and statistics: Festschrift in honor of Madan L Puri on the occasion of his 65th birthday. Netherlands: VSP International Science publ, 1996: 11-22.

[10] Ebrahimi N, Ghosh M. Multivariate negative dependence[J]. Comm Statist Theory Methods, 1981, 10: 307-337.

[11] Fakoor V, Azarnoosh H A. Probability inequalities for sums of negatively dependent random variables[J]. Pak Pak J Statist, 2005, 21(3): 257-264.

[12] Joag-Dev K, Proschan F. Negative association of random variables with applications[J]. AnnStatist, 1983, 11(1): 286-295.

[13] Nili Sani H R, Amini M, Bozorgnia A. Strong laws for weighted sums of negative dependent random variables[J]. Journal of Sciences, 2005, 16(3): 261-265.

[14] Oleg K, Andrew R, Andrei I V. On the almost sure growth rate of sums of lower negatively dependent nonnegative random variables[J]. Statist Probab Lett, 2005, 71: 193-202.

(责任编辑:韦廷宗)