误差 e_i 为 ρ 混合序列在非线性模型下 M 估计的强相合性*

Strong Consistency of M-Estimator in Nonlinear Models under ρ Errors

陈　鑫,伍艳春,李红菊
CHEN Xin,WU Yan-chun,LI Hong-ju

(桂林理工大学数理系,广西桂林　541004)
(Department of Mathematics and Physics,Guilin Institute of University,Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:对于非线性模型 $y_i = f(x_i,\theta) + e_i, i = 1,2,\cdots,n$,当 $\{e_i, i = 1,2,\cdots,n\}$ 为 ρ 混合序列时,创造合适的条件,在此条件下证明了 θ 的 M 估计的强相合性.

关键词:非线性模型　ρ 混合序列　M 估计　强相合性

中图法分类号:O211.4　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2010)02-0108-03

Abstract: Under some appropriate conditions, ρ errors are consided the strong consistency of M-estimation of θ for the nonlinear regression models: $y_i = f(x_i,\theta) + e_i, i = 1,2,\cdots,n$. Here $\{e_i, i = 1,2,\cdots,n\}$.

Key words: nonlinear model, ρ-mixing, M-estimator, strong consistency

本文考虑非线性模型

$$y_i = f(x_i,\theta) + e_i, i = 1,2,\cdots,n,$$

其中 θ 为一 p 维未知参数,x_i 为 q 维已知向量,f 为已知函数,e_i 为不可观测的随机误差,y_i 为观察值. 设 Θ 为参数空间,$\Theta \subset R^P$,$x_i \in X, i = 1,2,\cdots$,$X$ 为 R^q 的有界闭子集,f 为一 $X \times \Theta$ 上的连续函数.

令 φ 为 R 上的非负连续函数,定义 θ 的 M 估计量为 $\hat{\theta}_n \in \Theta$,使得

$$Q_n(\hat{\theta}_n) = \min\{Q_n(r), r \in \bar{\Theta}\},$$

其中,$Q_n(r) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i - f(x_i,r))$,$\bar{\Theta}$ 为 Θ 的闭包.

本文创造合适的条件,在此条件下证明 θ 的 M 估计的强相合性.

1　定义及引理

定义 1　对随机序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$,如果 $\rho(n) \to 0, n \to \infty$,则称 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 为 ρ 混合序列. 且

$$\rho(n) = \sup_{k\in N} \sup_{X\in L_2(F_1^K), Y\in L_2(F_{k+n}^{\infty})} \frac{|E(X - EX)(Y - EY)|}{\sqrt{\mathrm{Var}X\mathrm{Var}Y}},$$

其中 $\alpha(n)$,$\rho(n)$ 为混合系数.

引理 1[1]　设 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 为 ρ 混合序列,$X \in L_p(F_{-\infty}^k)$,$Y \in L_p(F_{k+n}^{\infty})$,$p,q > 1$,$1/p + 1/q = 1$,则 $|EXY - EXEY| \leqslant 4(\rho(n))^{2/p\wedge 2/q}(E|X|^p)^{1/p} \cdot (E|Y|^q)^{1/q}$(“$\wedge$”表示去最小的意思).

引理 2[2]　设 $g(a,k)$ 是 $X_{a+1},\cdots,X_{a+k}$ 的联合分布的泛函($a \geqslant 0, k \geqslant 1$),满足 $E(S_{a+k} - S_a)^2 \leqslant g(a,k)$ 以及 $g(a,k) + g(a+k,m) \leqslant g(a,k+m)$,($m \geqslant 1$),则 $E\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_{a+j} - S_a|^2\} \leqslant (\frac{\log 2n}{\log 2})^2 g(a,n)$.

引理 3　设 θ 为有界集,X 为 R^d 上的有界闭子集,f 为 $X \times \bar{\theta}$ 上的连续函数,Ψ 在 $R \times X \times \bar{\theta}$ 上连续且在 R 上是凸函数(若有偏导则有界),存在 R 上的函数 h,h 的导函数有界,且满足

$$\sup_{x\in X, r\in\theta} |\Psi(w,x,r)| \leqslant h(w), w \in R, \quad (1)$$

$$\sup_i E[h(e_i)]^{1+\delta} < \infty, \delta > 0 \text{ 为常数}, \quad (2)$$

$$|x| > c \text{ 时}, h(x) > ac, a > 0 \text{ 为常数}, \quad (3)$$

若 $\{e_i\}$ 为有概率密度函数的 ρ 序列,满足:

$$Ee_i < \infty, \text{混合系数满足} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{\frac{\delta}{2+\delta}}(n) < \infty, \quad (4)$$

收稿日期:2009-07-09
修回日期:2009-09-03
作者简介:陈　鑫(1982-),女,硕士研究生,主要从事极限理论及统计应用研究。
*广西自然科学基金项目(2010GXNSFA013121)资助。

则有$\sup_{r\in\bar{\Theta}}\frac{1}{n}|\sum_{i=1}^{n}[\Psi(e_i,x_i,r)-E\Psi(e_i,x_i,r)]|\to 0$，a. s.

证明 令 $\zeta_i=\Psi(e_i,x_i,r)-E\Psi(e_i,x_i,r)$，$i=1,2,\cdots,n$，则$\{\zeta_i,i=1,2,\cdots,n\}$，且$E\zeta_i=0$，且混合系数满足条件(4).

先证明

$$\frac{1}{n}|\sum_{i=1}^{n}\zeta_i|\to 0,\text{a. s.} \tag{5}$$

由引理1，取 $0<\delta\leqslant 2$ 得

$$|E\zeta_i\zeta_j-E\zeta_iE\zeta_j|\leqslant 4\cdot(\rho(j-i))^{\frac{\delta}{2+\delta}}\|\zeta_i\|_{\frac{\delta}{2+\delta}}\|\zeta_j\|_{\frac{2}{2+\delta}}.$$

由条件(1)，条件(2)及上式得

$$|E\zeta_i\zeta_j-E\zeta_iE\zeta_j|\leqslant C\cdot(\rho(j-i))^{\frac{\delta}{2+\delta}},$$

令 $S_{a,n}=\sum_{i=a+1}^{a+n}\zeta_i$，则

$$ES_{a,n}^2\leqslant\sum_{i=a+1}^{a+n}E\zeta_i^2+2\cdot\sum_{i=a+1}^{a+n}\sum_{j=i+1}^{a+n}|E\zeta_i\zeta_j|\leqslant\sum_{i=a+1}^{a+n}E\zeta_i^2+C\cdot n\sum_{i=a+1}^{a+n}(\rho(l))^{\frac{\delta}{2+\delta}},$$

令

$$g(F_{a,n})=\sum_{i=a+1}^{a+n}E\zeta_i^2+C\cdot n\sum_{i=a+1}^{a+n}(\rho(l))^{\frac{\delta}{2+\delta}},$$

则

$$g(F_{a,m})+g(F_{a+m,k})\leqslant g(F_{a,m+k}).$$

故由引理2及条件(4)，有

$$E(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_{a,k}|)^2\leqslant(\frac{\log 2n}{\log 2})^2\cdot g(F_{a,n})\leqslant C\cdot(\frac{\log 2n}{\log 2})^2\cdot n.$$

取 $b_n=n^{\frac{1}{2}}\log^2 n$，则由 chebyshev 不等式，有

$$P(|S_{a,2^k}|>\varepsilon\cdot b_{2^k})\leqslant\frac{E|S_{2^k}|^2}{\varepsilon^2\cdot b_{2^k}^2}\leqslant C\cdot\frac{1}{k^4},$$

$$P(\max_{1\leqslant n\leqslant 2^k}|S_{2^k,n}|>\varepsilon\cdot b_{2^k})\leqslant\frac{C\cdot(k+1)^2\cdot 2^k}{\varepsilon^2\cdot b_{2^k}^2}\leqslant C\cdot\frac{1}{k^2}.$$

由 b_n 的非降性，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|S_{a,n}|>b_n\cdot\varepsilon)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}P(|S_{a,2^k}|>b_{2^k}\cdot\frac{\varepsilon}{2})+\sum_{k=1}^{\infty}P(\max_{2^k<n\leqslant 2^{k+1}}|S_{a,n}-S_{a,2^k}|>b_n\cdot\frac{\varepsilon}{2})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}P(|S_{a,2^k}|>b_{2^k}\cdot\frac{\varepsilon}{2})+\sum_{k=1}^{\infty}P(\max_{1<n\leqslant 2^k}|S_{2^k,n}|>b_{2^k}\cdot\frac{\varepsilon}{2})\leqslant C\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}+C\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty,$$

故由 Borell-Cantelli 引理知

$$\frac{1}{n}|S_{a,n}|=o(1),\text{a. s.}$$

当 $a=0$ 时，(5) 式成立.

由以上证明过程知，对 $\zeta_i=h(e_i)-Eh(e_i)$，自然(5)式也成立.

$$\sup_{r\in\bar{\Theta}}\frac{1}{n}|\sum_{i=1}^{n}\{\Psi(e_i,x_i,r)-E\Psi(e_i,x_i,r)\}|\leqslant\sup_{r\in\bar{\Theta}}\frac{1}{n}|\sum_{i=1}^{n}\{\Psi(e_i,x_i,r)-E\Psi(e_i,x_i,r)\}I[|e_i|\leqslant C]|+\sup_{r\in\bar{\Theta}}\frac{1}{n}|\sum_{i=1}^{n}\{\Psi(e_i,x_i,r)-E\Psi(e_i,x_i,r)\}I[|e_i|>C]|\triangleq I_1+I_2,$$

$[-K,K]\times X\times\bar{\Theta}$ 为有界闭集，故 Ψ 在 $[-K,K]\times X\times\bar{\Theta}$ 上一致连续. 因此，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \lambda(\varepsilon)>0$，使得当 $|e_i|\leqslant K$，$x_i\in X$，$\|r_1-r_2\|<\lambda$ 时，

$$|\Psi(e_i,x_i,r_1)-\Psi(e_i,x_i,r_2)|<\varepsilon,$$

因为 $\bar{\Theta}$ 为有界闭集，故存在 $r_1,r_2,\cdots,r_m\in\bar{\Theta}$(并且要求它们依欧式范数单调递增)，使得 $\bar{\Theta}\subset\bigcup_{j=1}^{m}\{\|r-r_j\|<\lambda\}$，其中 $\|\cdot\|$ 表示欧式范数，所以

$$I_1\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant m}\frac{1}{n}|\sum_{i=1}^{n}\{\Psi(e_i,x_i,r_j)-E\Psi(e_i,x_i,r_j)\}I[|e_i|\leqslant K]|+\max_{1\leqslant j\leqslant m}\sup_{j-1<r\leqslant r_j}\frac{1}{n}|\sum_{i=1}^{n}\{|\Psi(e_i,x_i,r)-\Psi(e_i,x_i,r_j)]-E[\Psi(e_i,x_i,r)-\Psi(e_i,x_i,r_j)]\}I[|e_i|\leqslant K]|\to 0+2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性得：$I_1\to 0$.

由条件(2)，有

$$Eh(e_i)\leqslant(E(h(e_i))^{2+\delta})^{\frac{1}{2+\delta}}<\infty,i=1,2,\cdots,n.$$

由条件(3)知，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists$ 充分大的 K，使得

$$Eh(e_i)I[|e_i|>K]\leqslant Eh(e_i)I[h(e_i)>aK]<\varepsilon,$$

$i=1,2,\cdots,n$，

所以

$$I_2\leqslant\sup_{r\in\bar{\Theta}}\frac{1}{n}\{\sum_{i=1}^{n}(|\Psi(e_i,x_i,r)|I[|e_i|>K]+|E\Psi(e_i,x_i,r)|I[|e_i|>K])\}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{h(e_i)I[|e_i|>K]+Eh(e_i)I[|(e_i)|>K]\}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|h(e_i)I[|e_i|>K]-Eh(e_i)I[|(e_i)|>K]|+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\{|Eh(e_i)I[|e_i|>K]|\}<\frac{1}{n}|\sum_{i=1}^{n}h(e_i)-Eh(e_i)|+2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性及(5)式，可得 $I_2\to 0$，因此，对整个 $R\times X\times\bar{\Theta}$ 有

$$\sup_{r\in\bar{\Theta}}\frac{1}{n}|\sum_{i=1}^{n}\{\Psi(e_i,x_i,r)-E\Psi(e_i,x_i,r)\}|\to 0,$$

a. s.

2 主要结论

令 $\delta(x,r)=f(x,\theta)-f(x,r)$，如有一点 x_0，使得存在一 $r\in\Theta$，但是 $r\neq\theta$，而 $\delta(x_0,r)=0$，则在点 x_0，非线性模型 $y_i=f(x_i,\theta)+e_i, i=1,2,\cdots,n$ 是不可辨别的. 若 x_i 集中在 x_0 点附近(例如 $x_i\to x_0$)，则我们无法正确估计 θ. 因此 x_i 作如下的假定：

存在一个整常数 $m>0$ 及 X 的不相交闭子集 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 满足，使得对任一 $r\in\Theta, r\neq\theta$，至少存在一 X_t 使得

$$\{x:\delta(x,r)=0\}\cap X_t=\phi, \tag{6}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\&(x_i\in X_t,i\leqslant n)}{n}>0, \tag{7}$$

此处 $\&(x_i\in X_t,i\leqslant n)$ 表示落在闭子集 X_t 中的 x_i 的个数. 条件(7) 意味着 x_i 不宜过于集中. 给定 f，满足条件(6) 和条件(7) 的 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 很容易找到，在很多场合下 x_i 的值为试验者随机选取，则可以取 x_i 使得条件(6)，条件(7) 对某一组 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 成立.

定理 设 Θ 为有界集，f 在 $X\times\bar{\Theta}$ 上连续. φ 为 R 上的非负连续函数. 条件(1) ~ (3) 对 $\Psi(e_i,x_i,r)=\varphi(e_i+d(x_i,r))$ 成立 $\{e_i\}$ 满足条件(4). 又设条件(6) 和条件(7) 满足，且对于 $e_i\in R, b\in R$ 且 $b\neq 0$，有

$$E[\varphi(e_i+b)]>E[\varphi(e_i)], i=1,2,\cdots,n,$$

则对任一固定的 n，$\hat{\theta}_n$ 存在且 $\hat{\theta}_n\to\theta$, a. s.

证明 由条件(1) ~ (4) 可知引理 3 的结果成立，即

$$\sup_{r\in\theta}\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}[\Psi(e_i,x_i,r)-E\Psi(e_i,x_i,r)]\right|\to 0, \text{a.s.}$$

因为

$$\Psi(e_i,x_i,r)=\varphi(e_i+\delta(x_i,r)), Q_n(r)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(y_i-f(x_i,r)), y_i=f(x_i,\theta)+e_i, i=1,2,\cdots,n,$$

从而

$$P[\lim_{n\to\infty}\sup_{r\in N(\varepsilon,c)}|Q_n(r)-Q_n(\theta)-E[Q_n(r)-Q_n(\theta)]|=0]=1$$

成立，注意到

$$\inf_{r\in N(\varepsilon,c)}[Q_n(r)-Q_n(\theta)]\geqslant\inf_{r\in N(\varepsilon,c)}E[Q_n(r)-Q_n(\theta)]-\sup_{r\in N(\varepsilon,c)}|Q_n(r)-Q_n(\theta)-E[Q_n(r)-Q_n(\theta)]|,$$

及

$$E[Q_n(r)-Q_n(\theta)]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda(\sigma_i,x_i,r),$$

其中 $\lambda(\sigma_i,x_i,r)=E[\varphi(\sigma_iu_i+\delta(x_i,r)-\varphi(\sigma_iu_i))]\geqslant 0$. 因此只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\inf\inf_{r\in N(\varepsilon,c)}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda(\sigma_i,x_i,r)>0.$$

假设上式不成立，则存在子列 $n_k, k=1,2,\cdots$

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{r\in N(\varepsilon,c)}\frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}\lambda(\sigma_i,x_i,r)=0. \tag{8}$$

由条件(1)，条件(2) 及 φ 的连续性推出 $\lambda(\sigma,x,r)$ 为 σ,x,r 之连续函数，由于 $N(\varepsilon,c)$ 为闭集，则由(8) 式得出存在 $r_0\in N(\varepsilon,c)$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}\lambda(\sigma_i,x_i,r_0)=0, \tag{9}$$

令 $n_k(i)=\&\{x_i\in X_i,i\leqslant n_k\}$，则

$$\frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}\lambda(\sigma_i,x_i,r_0)\geqslant\frac{1}{n_k}\sum_{t=1}^{m}\frac{n_k(t)}{n_k(t)}\sum_{x_i\in X_i,i\leqslant n_k}\lambda(\sigma_i,x_i,r)\geqslant[\min_{t<m}\frac{n_k(t)}{n}]\sum_{t=1}^{m}[\min_{x_i\in X_i,\sigma_0\leqslant\sigma_i\leqslant\sigma_\infty}\lambda(\sigma_i,x_i,r_0)],$$

由条件(7) 知

$$\liminf_{k\to\infty}[\min_{i<m}\frac{n_k(t)}{n}]>0,$$

故由(9) 式得

$$\lim_{k\to\infty}[\min_{x_i\in X_i,\sigma_0\leqslant\sigma_i\leqslant\sigma_\infty}\lambda(\sigma_i,x_i,r_0)]=0, i=1,\cdots,m.$$

由于 $[\sigma_0,\sigma_\infty]$，X_t 为有界闭集，存在 $\omega_t\in X_t, \tau_t\in[\sigma_0,\sigma_\infty]$，

$$\lambda(\tau_t,\omega_t,r_0)=0, t=1,\cdots,m,$$

但是由函数 λ 的定义及已知条件 $E[\varphi(au_1+b)]>E[\varphi(au_1)]$ 知 $\delta(x,r)=0, \lambda(\tau,\omega,r)>0$，故得

$$\delta(\omega_t,r_0)=0, t=1,\cdots,m,$$

这与条件(6) 矛盾. 所以

$$P[\liminf_{n\to\infty}\inf_{r\in N(\varepsilon,c)}[Q_n(r)-Q_n(\theta)]>0]=1$$

成立，又因为 $Q_n(\hat{\theta}_n)\leqslant Q_n(\theta)$，

$$P[\lim_{n\to\infty}\sup\|\hat{\theta}_n-\theta\|\geqslant 2\varepsilon]\leqslant P[\|\hat{\theta}_n-\theta\|\geqslant\varepsilon \text{对无限个} n \text{成立}]\leqslant P[\lim_{n\to\infty}\inf\inf_{r\in N(\varepsilon)}[Q_n(r)-Q_n(\theta)]\leqslant\theta]=0,$$

由 ε 的任意性即得所需要的结论. 定理证明完毕.

参考文献：

[1] 苏淳，赵林城，王岳宝. NA 序列的矩不等式与弱收敛[J]. 中国科学，1996，26(12)：1091-1099.

[2] Stout W F. Almost sure convergence[M]. New York：Academic Press，1974.

[3] 邵军. 非线性模型中 M-估计量的大样本性质[J]. 应用概率统计，1994，10(2)：125-131.

(责任编辑：韦廷宗)