基于信用支付和时变需求的易变质物品库存模型*

Inventory Model for Deteriorating Items Based on Trade Credit and Time-varying Demand

周优军[1,2],曹　亮[1],潘义前[1]
ZHOU You-jun[1,2],CAO Liang[1],PAN Yi-qian[1]

(1.广西大学数学与信息科学学院,广西南宁　530004;2.柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州　545004)
(1. College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China; 2. Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545004, China)

摘要:研究在信用期条件下,需求率随时间增长、变质率为常数的易变质物品库存问题,建立优化补货周期的库存模型,证明模型最优解的存在性和唯一性,并对模型进行了数值实验和参数灵敏度分析.

关键词:库存模型　信用支付　时变需求　变质物品
中图法分类号:O227　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2010)02-0118-04

Abstract: The inventory model based on trade credit has been established in order to obtain optimal replenishment cycle. The demand rate grows with time and deterioration rate is constant. Then, the existence and unique of the optimal solution are discussed, and the numerical examples and the sensitivity analysis are presented.

Key words: inventory model, trade credit, time-varying demand, deteriorating items

在现实生活中,供应商在激烈的市场竞争中为增强竞争力,扩大市场份额,通常会提供给买方一段延迟支付采购货款的时间,即信用期.在信用期内,零售商无需支付任何费用.传统的经济订购批量(EOQ)模型中,零售商收到订购的物品后立即向供应商付款[1,2];文献[3]考虑了信用支付条件下易变质物品的库存模型.其后,A. M. Jamal 等[4]提出允许缺货情况下的信用支付模型;文献[5～8]研究需求率和变质率均为常数的信用支付模型;文献[9]研究允许缺货情况下,需求率和变质率均为常数的信用支付模型;文献[10]讨论需求率和变质率都时变的允许信用支付的库存模型,文献[11]讨论允许信用支付情况下,考虑了在有限计划期内需求率时变、变质率为常数的单一物品库存策略,但是对模型最优解的存在性和唯一性没有给予证明.

本文在文献[11]的基础上,研究在信用期条件下,需求率随时间增长、变质率为常数的易变质物品库存问题,建立优化补货周期的库存模型,给出模型最优解的存在性和唯一性的证明,并给出数值实例和灵敏度分析.

1　模型假设与符号说明

本文使用以下符号:(1) $D(t)$ 为需求率,$\forall\ t \in [0, +\infty)$,有 $D(t) > 0$,$D'(t) \geqslant 0$;(2)s 是固定的订购费用,与订购批量无关;(3)θ 为变质率,常数;(4)c 为单位物品采购价格;(5)p 为单位物品销售价格;(6)h 为单位时间单位物品的库存维持费;(7)I_c 为每年每单位货币的支付利率;(8)I_p 为每年每单位货币的收益利率;(9)T 为补货周期;(10)M 为供应商给零售商延期付款期限;(11)$I(t)$ 为 t 时刻库存水平($0 \leqslant t \leqslant T$);(12)$Q$ 为订货量,$Q = I(0)$.

为了建立模型,我们给出以下假设:

(1) 考虑单一物品,需求函数为时间的增函数;

(2) 物品发生变质,变质率为常数 θ;

(3) 瞬时补货,不允许缺货;

(4) 零售商单位物品的采购价格大于等于信用

收稿日期:2009-06-02
作者简介:周优军(1974-),男,讲师,主要从事供应链模型与优化,智能优化算法研究。
*广西青年科学基金(桂科青0832092)资助。

期内单位物品销售利息收入，即 $c \geqslant I_p pM$；

(5) 零售商在供应商给定信用期结束时(M 时刻)向供应商一次性支付所有购买物品的费用.

2 模型建立

库存 $I(t)$ 受顾客需求和变质影响，用微分方程表示：

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \theta I(t) = -D(t), 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (1)$$

解微分方程(1)，由初始条件 $I(T) = 0$，有

$$I(t) = e^{-\theta t}\int_t^T e^{\theta x}D(x)\mathrm{d}x, 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (2)$$

由 $I(0) = Q$，则零售商订购量为：

$$Q = \int_0^T e^{\theta t}D(t)\mathrm{d}t. \quad (3)$$

因此，得到周期 $[0,T]$ 内的平均总成本：

$TVC =$ (采购成本 + 库存维持成本 + 利息支出 − 利息收入)/ 订货周期长度，

其中：采购成本 $= s + cQ = s + c\int_0^T e^{\theta t}D(t)\mathrm{d}t$；库存维持成本 $= h\int_0^T I(t)\mathrm{d}t = \frac{h}{\theta}\int_0^T D(t)(e^{\theta t} - 1)\mathrm{d}t$；由延期支付期限 M 与零售商采购周期 T 的关系，有以下两种情形：

(1) 当 $T \geqslant M$ 时，

利息收入 $= I_p p\int_0^M D(t)(M - t)\mathrm{d}t$，

利息支出 $= I_c c\int_M^T I(t)\mathrm{d}t =$

$$I_c c\int_M^T e^{-\theta t}\int_t^T e^{\theta x}D(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \frac{I_c c}{\theta}\int_M^T D(t)(e^{\theta(t-M)} - 1)\mathrm{d}t,$$

$$TVC_1(T) = \frac{1}{T\theta}\{s\theta + \int_0^T[(c\theta + h + I_c ce^{-\theta M})e^{\theta t} - (h + I_c c)]D(t)\mathrm{d}t - \int_0^M[I_c ce^{\theta(t-M)} + I_p p\theta(M - t) - I_c c]D(t)\mathrm{d}t\}; \quad (4)$$

(2) 当 $T \leqslant M$ 时，此时不需要为库存物品支付利息，即利息支出为零，则

利息收入 $= I_p p\int_0^T D(t)(M - t)\mathrm{d}t$，

$$TVC_2(T) = \frac{1}{T\theta}\{s\theta + \int_0^T[(c\theta + h)e^{\theta t} - h - I_p p\theta(M - t)]D(t)\mathrm{d}t\}. \quad (5)$$

综上，平均总成本函数 $TVC(T)$ 为

$$TVC(T) = \begin{cases} TVC_1(T), T \geqslant M; \\ TVC_2(T), T \leqslant M. \end{cases} \quad (6)$$

于是，库存模型为

$$\min TVC(T)$$
$$\text{s.t. } T > 0. \quad (7)$$

该库存模型的目的是确定最优的 T，使得零售商的平均总成本 $TVC(T)$ 最小.

3 模型分析与求解

3.1 解的存在性和唯一性分析

对平均总成本函数 $TVC(T)$ 求关于 $T(T > 0)$ 的一阶导数有：

$$TVC_1'(T) = f(T)/(T^2\theta), 0 \leqslant M \leqslant T; \quad (8)$$

$$TVC_2'(T) = g(T)/(T^2\theta), 0 < T \leqslant M; \quad (9)$$

其中

$$f(T) = [(c\theta + h + I_c ce^{-\theta M})e^{\theta T} - (h + I_c c)]TD(T) + \int_0^M[I_c ce^{\theta(t-M)} + I_p p\theta(M - t) - I_c c]D(t)\mathrm{d}t - \int_0^T[(c\theta + h + I_c ce^{-\theta M})e^{\theta t} - (h + I_c c)]D(t)\mathrm{d}t - s\theta; \quad (10)$$

$$g(T) = [(c\theta + h)e^{\theta T} - h - I_p p\theta(M - T)]TD(T) - \int_0^T[(c\theta + h)e^{\theta t} - h - I_p p\theta(M - t)]D(t)\mathrm{d}t - s\theta. \quad (11)$$

引理 1 当 $T \geqslant M$ 时，则 $f'(T) > 0$，即 $f(T)$ 在 $[M, +\infty)$ 上为单调递增函数.

证明 因为 $D(T) > 0$, $D'(T) \geqslant 0, T \geqslant M$，所以

$$f'(T) = \{[(c\theta + h + I_c ce^{-\theta M})e^{\theta T} - (h + I_c c)]D'(T) + \theta(c\theta + h + I_c ce^{-\theta M})e^{\theta T}D(T)\}T > [(c\theta e^{\theta T} + h + I_c c) - (h + I_c c)]D'(T)T = c\theta e^{\theta T}D'(T)T \geqslant 0,$$

因而 $f(T)$ 在 $[M, +\infty)$ 上为单调递增函数.

引理 2 当 $T \geqslant M$ 且 $T \geqslant (1 + I_c M)/\theta + s/[cD(M)]$ 时，则 $f(T) > 0$.

证明 由 $T \geqslant M, D(t) > 0, D'(t) \geqslant 0, D(T) \geqslant D(M)$，有

$$f(T) > [(c\theta + h + I_c ce^{-\theta M})e^{\theta T} - (h + I_c c)]TD(T) - \int_0^M I_c cD(t)\mathrm{d}t - \int_0^T[c\theta e^{\theta t} + (h + I_c ce^{-\theta M})e^{\theta T} - (h + I_c c)]D(T)\mathrm{d}t - s\theta = ce^{\theta T}D(T)(\theta T - 1) + cD(T) - \int_0^M I_c cD(t)\mathrm{d}t - s\theta > cD(M)(\theta T - 1) - I_c cMD(M) - s\theta = \{T - (1 + I_c M)/\theta - s/[cD(M)]\}c\theta D(M).$$

所以，当 $T \geqslant (1 + I_c M)/\theta + s/[cD(M)]$ 时，有 $f(T) > 0$.

引理 3 当 $T \leqslant M$ 时，则 $g'(T) > 0$，即 $g(T)$ 在 $(0, M]$ 内为单调递增函数.

证明 由假设 $c \geqslant I_p pM$，有 $(c\theta + h)e^{\theta T} - I_p p\theta M - h > c\theta - I_p p\theta M > 0$，因为

$$g'(T) = \{[(c\theta + h)e^{\theta T} - h - I_p p\theta(M - T)]D'(T) + [\theta(c\theta + h)e^{\theta T} + I_p p\theta]D(T)\}T,$$

且 $D'(T) \geqslant 0$，所以 $g'(T) > 0$.

定理 对给定的 M,存在唯一的 $T^*(T^*>0)$,使得 $TVC(T)$ 在 $T=T^*$ 处取得最小值.

证明 (1) 首先证明当 $T\geqslant M$ 时,有唯一的 T_1^* 使得 $TVC_1(T)$ 有最小值.分以下两种情况:

(i) $f(M)\geqslant 0$. 由引理1知 $f(T)>f(M)\geqslant 0(T\neq M)$,所以 $TVC'_1(T)=f(T)/(\theta T^2)>0(T\neq M)$,即 $TVC_1(T)$ 为单调递增函数,于是 $TVC_1(T)$ 在 $T_1^*=M$ 处取得唯一的最小值.

(ii) $f(M)<0$. 由引理1和引理2和介值定理知:$f(T)=0$ 在 $[M,(1+I_cM)/\theta+s/[cD(M)]]$ 上有唯一解 T_1^*,所以 $TVC'_1(T)=f(T)/(T^2\theta)=0$ 有唯一解 T_1^*.

而 $TVC_1'(T)$ 在 $T=T_1^*$ 处的导数为:

$$TVC_1''(T_1^*)=-\frac{2}{T_1^{*3}\theta}f(T_1^*)+\frac{1}{T_1^{*2}\theta}f'(T_1^*)=\frac{1}{T_1^{*2}\theta}f'(T_1^*) \tag{12}$$

由引理1有 $f'(T)>0$,所以 $TVC_1''(T_1^*)>0$,即 $TVC_1(T)$ 在 $T=T_1^*$ 有最小值.

(2) 再证明当 $T\leqslant M$ 时,存在唯一的 T_2^* 使得 $TVC_2(T)$ 有最小值.分以下两种情况:

(i) $g(M)\leqslant 0$. 由引理3有 $g(T)\leqslant g(M)\leqslant 0(T\neq M)$,所以 $TVC_2'(T)=g(T)/(\theta T^2)<0(T\neq M)$,即 $TVC_2(T)$ 为单调递减函数,于是 $TVC_2(T)$ 在 $T_2^*=M$ 处取得唯一的最小值.

(ii) $g(M)>0$. 因为 $\lim\limits_{T\to 0}g(T)=-s\theta<0$,所以当 $T(T>0)$ 充分小时,有 $g(T)<0$,由引理3及值定理知 $g(T)=0$ 在 $(0,M]$ 内有唯一解 T_2^*,所以 $TVC_2'(T)=g(T)/(T^2\theta)=0$ 在 $(0,M]$ 内有唯一解 T_2^*.

因为 $TVC_2'(T)$ 在 $T=T_2^*$ 处的导数为:

$$TVC_2''(T_2^*)=-\frac{2}{T_2^{*3}\theta}g(T_2^*)+\frac{1}{T_2^{*2}\theta}g'(T_2^*)=\frac{1}{T_2^{*2}\theta}g'(T_2^*), \tag{13}$$

由引理3有 $g'(T)>0$,所以 $TVC_2''(T_2^*)>0$,即 $TVC_1(T)$ 在 $T=T_2^*$ 处有最小值.

综上所述,T_1^* 和 T_2^* 使 $TVC(T)$ 最小者即为最优解 T^*,即对于给定的 M,存在唯一的 T^* 使得 $TVC(T)$ 在 $T=T^*$ 处取得最小值.

3.2 模型求解步骤

库存模型求解步骤如下。

步骤1:由(10)式、(11)式计算出 $f(M)$,$g(M)$;

步骤2:若 $f(M)\geqslant 0$,则 $T_1^*=M$;否则,解 $f(T)=0$,得 $T_1^*=T$;

步骤3:若 $g(M)\leqslant 0$,则 $T_2^*=M$;否则,解 $g(M)=0$,得 $T_2^*=T$;

步骤4:由(4)式、(5)式计算 $TVC_1(T_1^*)$,$TVC_2(T_2^*)$,则最优为补货周期 T^* 满足:

$$TVC(T^*)=\min\{TVC_1(T_1^*),TVC_2(T_2^*)\},$$

由(3)式得到最优订货量 $Q^*=Q(T^*)$.

4 数值实验

数值例子:$D(t)=100e^{0.05t}$,$s=60$,$h=1$,$c=10$,$p=15$,$M=1$,$I_c=0.1$,$I_p=0.06$,$\theta=0.05$.计算结果为:$T_1^*=1.88$,$TVC_1(T_1^*)=152.0957$,$T_2^*=1$,$TVC_2(T_2^*)=165.8524$.所以,最佳订货策略为:$T^*=1.88$,$TVC(T^*)=152.0957$,$Q^*=20.6834$.

由表1观察可知,随着需求函数变大,销售商的最优订购周期变短,最小成本增加,订购数量减少.由表2可以看出,当供应商给销售商的信用期变化较大时,信用期对销售商的订购量没有起到明显促进作用——销售商的最优订购周期及订购数量相对稳定,变化趋势非常缓慢,此时,零售商可利用所得到的信用期降低成本,而供应商可在确保订货量的基础上通过缩减信用期长度加快应收货款的回流速度.由表3可以知道,固定订购成本的增加对最优订购策略有较大的影响,销售商可通过增大最优订购周期和订购数量来消减固定订购成本增加所带来的影响.

表1 需求率灵敏度分析

Table 1 Sensitivity analysis of the demand rate

需求函数参数 Parameter of demand function		计算结果 Results				最优策略 Optimal strategy		
a	b	T_1^*	$TVC_1(T_1^*)$	T_2^*	$TVC_2(T_2^*)$	T^*	$TVC(T^*)$	Q^*
10	0.05	1.88*	152.0957	1	165.8524	1.88	152.0957	20.6834
10	0.15	1.54*	163.4048	1	171.5914	1.54	163.4048	18.0350
10	0.25	1.34*	173.3951	1	177.7388	1.34	173.3951	16.4937
50	0.05	1	589.2621	0.89*	588.2199	0.89	588.2199	46.5403
50	0.15	1	617.9572	0.75*	610.4891	0.75	610.4891	40.4586
50	0.25	1	648.6941	0.66*	630.1479	0.66	630.1479	36.4937
100	0.05	1	1118.5	0.63*	1097.4	0.63	1097.4	65.0268
100	0.15	1	1175.9	0.54*	1127.8	0.54	1127.8	57.0239
100	0.25	1	1237.4	0.54*	1127.8	0.54	1127.8	51.6280

表2 信用期灵敏度分析

Table 2 Sensitivity analysis of the credit

M		计算结果 Results				最优策略 Optimal strategy		
		T_1^*	$TVC_1(T_1^*)$	T_2^*	$TVC_2(T_2^*)$	T^*	$TVC(T^*)$	Q^*
$a=100$	0.5	0.63	1143.3	0.5	1148.4	0.63	1143.3	65.0268
b=0.05	1	1	1118.5	0.63	1097.4	0.63	1097.4	65.0268
	1.5	1.5	1130.6	0.63	1051.7	0.63	1051.7	65.0268
	3	3	1218.8	0.64	914.5425	0.64	914.5425	66.0924
$a=50$	0.5	0.87	611.67	0.5	634.1873	0.87	611.67	45.4483
$b=0.05$	1	1	589.2621	0.89	588.2199	0.89	589.2621	46.5403
	3	3	619.3936	0.90	496.1810	0.90	496.1810	47.0871
	5	5	699.5706	0.91	404.1128	0.91	404.1128	47.6345

表3 固定订购成本灵敏度分析

Table 3 Sensitivity analysis of the fixed ordering costs

s ($a=100, b=0.05$)	计算结果 Results				最优策略 Optimal strategy		
	T_1^*	$TVC_1(T_1^*)$	T_2^*	$TVC_2(T_2^*)$	T^*	$TVC(T^*)$	Q^*
30	1	1088.5	0.45	1042.1	0.45	1042.1	46.0279
60	1	1118.5	0.63	1097.4	0.63	1097.4	65.0268
180	1.07	1237.6	1	1238.5	1.07	1237.6	112.9343
360	1.48	1378.2	1	1418.5	1.48	1378.2	159.5129

5 结束语

本文建立了基于信用支付和需求随时间增长的易变质物品库存模型,证明模型最优解的存在性和唯一性,给出了一种确定最优订购量和最优补货周期的求解方法,并进行了数值实验和参数灵敏度分析.进一步的研究方向,可以考虑斜坡型需求函数或与库存水平等有关的需求函数,还可以考虑供应商提供价格折扣、数量折扣的库存模型.

参考文献:

[1] Mukhopadhyay S, Mukherjee R N, Chaudhuri K S. Joint pricing and ordering policy for a deteriorating inventory [J]. Computers and Industrial Engineering, 2004, 47: 339-349.

[2] Jung Hoon, Klein Cerry M. Optimal inventory policies for profit maximizing EOQ models under various cost functions[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 174: 689-705.

[3] Aggarwal S P, Jaggi C K. Ordering policies of deteriorating items under permissible delay in payments [J]. European Journal of Operational Research, 1995, 46: 658-662.

[4] Jamal A M M, Sarker B R, Wang S. An ordering policy for deteriorating items with allowable shortage and permissibel delay in payment [J]. European Journal of Operational Research, 1997, 48: 826-833.

[5] Chu P, Chung K J, Lan S P. Economic order quantity of deteriorating items under permissible delay in payments [J]. Computers and Operations Research, 1998, 25: 817-824.

[6] Jamal A M M, Sarker B R, Wang S. Optimal payment time for a retailer under permitted delay of payment by the wholesaler [J]. International Journal of Production Economics, 2000, 66: 59-66.

[7] Ouyang Liang-Yuh, Wu Kun-Shan, Yang Chih-Te. A study on an inventory model for non-instantaneous deteriorating items with permissible delay in payments [J]. Computers & Industrial Engineering, 2006, 51(4): 637-651.

[8] Liao J J. On an EPQ model for deteriorating items under permissible delay in payments[J]. Applied Mathematical Modelling, 2007, 31: 393-403.

[9] Sarker B R, Jamal A M M, Wang S. Supply chain model for perishable products under inflation and permissible delay in payment [J]. Computers and Operations Research, 2000, 27: 59-75.

[10] Chang C T, Ouyang L Y, Teng J T. An EOQ model for deteriorating items under supplier credits linked to ordering quantity[J]. Applied Mathematical Modelling, 2003, 27: 983-996.

[11] 古福文,周思宇.允许延期付款时变质性物品的库存策略[J].物流技术,2007,26(9):48-51.

[12] Chang C T. An EOQ model with deteriorating items under inflation when supplier credits linked to order quantity [J]. International Journal of Production Economics, 2004, 88: 307-316.

(责任编辑:韦廷宗)