广西科学 Guangxi Sciences 2010,17(3):185～187

时标上二阶动力方程的 Lyapunov 不等式*

Lyapunov Inequalities for Second Order Dynamic Equations on Time Scales

孙太祥,彭小凤,余卫勇
SUN Tai-xiang,PENG Xiao-feng,YU Wei-yong

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)
(College of Mathematics and Information Science,Guangxi University,Nanning,Guangxi,530004,China)

摘要:研究任意时标 T 上的动力方程 $(r(t)x^{\triangle}(t))^{\triangle}+p(t)x^{\sigma}(t)=0$ 和 $(h(t)x^{\triangle}(t))^{\triangledown}+q(t)x(t)=0$ 的 Lyapunov 不等式,得到两个方程在区间 $[a,b]$ 上非共轭的充分条件.

关键词:动力方程 时标 Lyapunov 不等式 非共轭

中图法分类号:O175.15 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2010)03-0185-03

Abstract: Lyapunov inequalities of dynamic equations $(r(t)x^{\triangle}(t))^{\triangle}+p(t)x^{\sigma}(t)=0$ and $(h(t)x^{\triangle}(t))^{\triangledown}+q(t)x(t)=0$ were investigated, and sufficient conditions under which these equations are disconjugate on interval $[a,b]$ were obtained.

Key words:dynamic equation,time scales,Lyapunov inequalities,disconjugacy

为了统一微分和差分,1988 年 Hilger 教授[1,2]首次提出了时标上的微积分.时标指的是实数集的任一非空闭子集。对于定义在时标上的函数 y,我们通常考虑其所谓的 △-导数 $y^{\triangle}$,n 阶 △-导数 $y^{\triangle^n}$ 和高阶动力学方程 $f(t,y,y^{\triangle},\cdots,y^{\triangle^n})=0$. 当时标是实数时,动力学方程就是微分方程,当时标是整数时,动力学方程就是差分方程。

本文研究任意时标 T 上的动力方程

$$(r(t)x^{\triangle}(t))^{\triangle}+p(t)x^{\sigma}(t)=0 \tag{0.1}$$

和

$$(h(t)x^{\triangle}(t))^{\triangledown}+q(t)x(t)=0 \tag{0.2}$$

的 Lyapunov 不等式及共轭性,其中 $r,p:T\to(0,\infty)$ 是 rd 连续的,$h,q:T\to(0,\infty)$ 是 ld 连续的.限于篇幅,文中涉及到的各种定义,记号和公式,请参阅文献[3,4].

收稿日期:2010-03-09
修回日期:2010-06-06
作者简介:孙太祥(1963-),男,教授,主要从事动力系统与动力方程研究。
*国家自然科学基金项目(10861002),广西自然科学基金项目(2010GXNSFA013106)和广西教育厅科研基金项目(200911MS212)资助。

1 预备知识

当 $r(t)=1$ 时,方程(0.1)就是

$$(x^{\triangle}(t))^{\triangle}+p(t)x^{\sigma}(t)=0. \tag{1.1}$$

在文献[5]中,M. Bohner 等研究方程(1.1)的 Lyapunov 不等式及共轭性,得到下面的定理.

定理 1.1[5] 设 $a,b\in T,a<b,f(t)=(t-a)(b-t)$ 且 $f(d)=\max\{f(t),t\in(a,b)_T\}$.

(1) 若 x 是方程(1.1)在 $[a,b]_T$ 上的非平凡解,且有 $x(a)=x(b)=0$,则方程(1.1)的 Lyapunov 不等式

$$\int_a^b p(t)\triangle t\geqslant\frac{b-a}{f(d)} \tag{1.2}$$

成立.

(2) 若 $p(t)$ 满足

$$\int_a^b p(t)\triangle t<\frac{b-a}{f(d)}, \tag{1.3}$$

则方程(1.1)在 $[a,b]_T$ 上非共轭.

定义 1.1 设 $x:T\to R$.

(1) 若 $x^{\triangle}:T^{\kappa}\to R$ 是连续的,$(rx^{\triangle})^{\triangle}:T^{\kappa^2}\to R$ 是 rd 连续的,且 x 使方程(0.1)成立,则称 x 是方程(0.1)的一个解.

(2) 若 $x^{\triangle}:T^{\kappa}\to R$ 是连续的,$(hx^{\triangle})^{\triangledown}:T^{\kappa}_{\kappa}\to R$ 是

ld 连续的，且 x 使方程(0.2) 成立，则称 x 是方程(0.2) 的一个解.

定义 1.2 设 x 是方程(0.1)(或(0.2)) 的解，$t \in T$. 如果下列条件之一成立：

(1)$x(t) = 0$,

(2)$x(\rho(t))x(t) < 0$.

则称 x 在 t 处有广义零.

定义 1.3 若方程(0.1)(或(0.2)) 的每个非平凡解在区间$[a,b]_T$ 上至多有一个广义零，则称方程(0.1)(或(0.2)) 在区间$[a,b]_T$ 上非共轭.

记 $C^1_{\mathrm{prd}}([a,\sigma^2(b)]_T,R) = \{u \in C^0([a,\sigma^2(b)]_T,R): u^\triangle$ 是分段 rd 连续的$\}$,

$C^1_{\mathrm{pld}}([\rho(a),\sigma(b)]_T, R) = \{u \in C^0([\rho(a),\sigma(b)]_T,R): u^\nabla$ 是分段 ld 连续的$\}$,

$A = \{u \in C^1_{\mathrm{prd}}([a,\sigma^2(b)]_T,R): u(a) = u(\sigma^2(b)) = 0\}$,

$B = \{u \in C^1_{\mathrm{pld}}([\rho(a),\sigma(b)]_T, R): u(\rho(a)) = u(\sigma(b)) = 0\}$.

对任意 $u \in A$，定义

$$F_1(u) = \int_a^{\sigma^2(b)} \{r(t)[u^\triangle(t)]^2 - p(t)u^2(\sigma(t))\}\triangle t.$$

对任意 $u \in B$，定义

$$F_2(u) = \int_{\rho(a)}^{\sigma(b)} \{h(\rho(t))[u^\nabla(t)]^2 - q(t)u^2(t)\}\nabla t.$$

定理 1.2[3,4] (Jacobi 条件)(1) 方程(0.1) 在$[a,\sigma^2(b)]_T$ 上非共轭当且仅当 F_1 在 A 上是正定的.

(2) 方程(0.2) 在$[\rho(a),\sigma(b)]_T$ 上非共轭当且仅当 F_2 在 B 上是正定的.

2 主要结果及证明

引理 2.1 设 $u,v \in [a,b]_T$，且 $u < v$，$r(t)(x^\triangle(t))^2$ 在$[u,v]_T$ 上 $\triangle$ 可积，则

$$\int_u^v r(t)(x^\triangle(t))^2\triangle t \geqslant \frac{[(x(v) - x(u)]^2}{\int_u^v \frac{\triangle t}{r(t)}}. \quad (2.1)$$

证明 设 $A = [x(v) - x(u)]/\int_u^v \frac{\triangle t}{r(t)}$，我们有

$$\int_u^v (\sqrt{r(t)}x^\triangle(t) - \frac{A}{\sqrt{r(t)}})^2\triangle t \geqslant 0,$$

从而

$$\int_u^v r(t)(x^\triangle(t))^2\triangle t - 2A\int_u^v x^\triangle(t)\triangle t + \int_u^v \frac{A^2}{r(t)}\triangle t \geqslant 0.$$

将 $A = [x(v) - x(u)]/\int_u^v \frac{\triangle t}{r(t)}$ 代入上式整理后即得(2.1) 式.

定理 2.1 设 x 是方程(0.1) 在$[a,b]_T$ 上的非平凡解，且有 $x(a) = x(b) = 0$，则 Lyapunov 不等式

$$\int_a^b p(t)\triangle t \geqslant \frac{\int_a^b \frac{\triangle t}{r(t)}}{f(d)} \quad (2.2)$$

成立，其中 $f(t) = \int_a^t \frac{\triangle s}{r(s)}\int_t^b \frac{\triangle s}{r(s)}$，$f(d) = \max\{f(t), t \in (a,b)_T\}$.

证明 设 x 是方程(0.1) 在$[a,b]_T$ 上的非平凡解，且有 $x(a) = x(b) = 0$. 记

$$M = \max\{x^2(t), t \in [a,b]_T\}, \quad (2.3)$$

则 $M > 0$. 由 x 的连续性知：必存在 $c \in (a,b)_T$，使得 $x^2(c) = M$，结合引理 2.1，我们有

$$M\int_a^b p(t)\triangle t \geqslant \int_a^b p(t)(x^\sigma(t))^2\triangle t = -\int_a^b x^\sigma(t)(r(t)x^\triangle(t))^\triangle\triangle t = -\int_a^b \{[r(t)x^\triangle(t) \cdot x(t)]^\triangle - r(t)(x^\triangle(t))^2\}\triangle t = \int_a^b r(t)(x^\triangle(t))^2\triangle t = \int_a^c r(t)(x^\triangle(t))^2\triangle t + \int_c^b r(t)(x^\triangle(t))^2\triangle t \geqslant \frac{x^2(c)}{\int_a^c \frac{\triangle t}{r(t)}} + \frac{x^2(c)}{\int_c^b \frac{\triangle t}{r(t)}} = \frac{M}{\int_a^c \frac{\triangle t}{r(t)}} + \frac{M}{\int_c^b \frac{\triangle t}{r(t)}}.$$

从而

$$\int_a^b p(t)\triangle t \geqslant \frac{\int_a^b \frac{\triangle t}{r(t)}}{\int_a^c \frac{\triangle t}{r(t)}\int_c^b \frac{\triangle t}{r(t)}} \geqslant \frac{\int_a^b \frac{\triangle t}{r(t)}}{f(d)}.$$

定理 2.2 若 $p(t)$ 满足

$$\int_a^b p(t)\triangle t < \frac{\int_a^b \frac{\triangle t}{r(t)}}{f(d)}, \quad (2.4)$$

其中 $f(t) = \int_a^t \frac{\triangle s}{r(s)}\int_t^b \frac{\triangle s}{r(s)}$，$f(d) = \max\{f(t), t \in (a,b)_T\}$，则方程(0.1) 在$[a,b]_T$ 上非共轭.

证明 假设方程(0.1) 不是非共轭的，则由定理 1.2 知：存在一个非平凡的 $x \in A$，使得 $x(a) = x(b) = 0$ 且

$$F_1(x) = \int_a^b \{r(t)(x^\triangle(t))^2 - p(t)(x^\sigma(t))^2\}\triangle t \leqslant 0.$$

由 x 的连续性知：必存在 $c \in (a,b)$，使得

$$x^2(c) = M = \max\{x^2(t), t \in [a,b]_T\} > 0,$$

从而

$$M\int_a^b p(t)\triangle t \geqslant \int_a^b p(t)(x^\sigma(t))^2\triangle t \geqslant \int_a^b r(t)(x^\triangle(t))^2\triangle t \geqslant M\frac{\int_a^b \frac{\triangle t}{r(t)}}{f(d)}.$$

即$\int_a^b p(t)\triangle t \geqslant \frac{\int_a^b \frac{\triangle t}{r(t)}}{f(d)}$,这与(2.4)式矛盾.

引理 2.2 设 $u,v \in [a,b]_T$ 且 $u < v$,$h^\rho(t)(x^\nabla(t))^2$ 在$[u,v]_T$ 上 ∇ 可积,则

$$\int_u^v h^\rho(t)(x^\nabla(t))^2 \nabla t \geqslant \frac{[x(v)-x(u)]^2}{\int_u^v \frac{\nabla t}{h^\rho(t)}}. \quad (2.5)$$

证明 把式子

$$\int_u^v \{\sqrt{h^\rho(t)}x^\nabla(t) - \frac{[x(v)-x(u)]}{\sqrt{h^\rho(t)}\int_u^v \frac{\nabla t}{h^\rho(t)}}\}^2 \nabla t \geqslant 0$$

化简即得(2.5)式.

引理 2.3[3] 设 $x:T \to R$ 且 $x^\triangle:T^\kappa \to R$ 是连续的,则 x 在T_κ 上是 ∇ 可微的,且对一切 $t \in T_\kappa$,

$x^\nabla(t) = x^\triangle(\rho(t))$.

定理 2.3 设 x 是方程(0.2)的非平凡解,且有 $x(a)=x(b)=0$,则 Lyapunov 不等式

$$\int_a^b q(t)\nabla t \geqslant \frac{\int_a^b \frac{\triangle t}{h^\rho(t)}}{f(d)} \quad (2.6)$$

成立.其中 $f(t) = \int_a^t \frac{\nabla s}{h^\rho(s)}\int_t^b \frac{\nabla s}{h^\rho(s)}$,$f(d) = \max\{f(t), t \in (a,b)_T\}$.

证明 设方程(0.2)存在非平凡解 x,且有 $x(a) = x(b) = 0$. 再设 $M = \max\{x^2(t), t \in [a,b]_T\}$,则 $M > 0$. 由 x 的连续性知:必存在 $c \in (a,b)_T$,使得 $x^2(c) = M$,结合引理 2.2 和引理 2.3,我们有

$$M\int_a^b q(t)\nabla t \geqslant \int_a^b q(t)x^2(t)\nabla t =$$

$$-\int_a^b x(t)(h(t)x^\triangle(t))^\nabla \nabla t =$$

$$-\int_a^b \{[(h(t)x^\triangle(t)x(t))]^\nabla - x^\nabla(t)(h(t)x^\triangle(t))^\rho\} \cdot$$

$$\nabla t = \int_a^b x^\nabla(t)h^\rho(t)x^{\triangle\rho}\nabla t = \int_a^b h^\rho(t)(x^\nabla(t))^2\nabla t =$$

$$\int_a^c h^\rho(t)(x^\nabla(t))^2\nabla t + \int_c^b h^\rho(t)(x^\nabla(t))^2\nabla t \geqslant$$

$$\frac{x^2(c)}{\int_a^c \frac{\nabla t}{h^\rho(t)}} + \frac{x^2(c)}{\int_c^b \frac{\nabla t}{h^\rho(t)}} = \frac{M}{\int_a^c \frac{\nabla t}{h^\rho(t)}} + \frac{M}{\int_c^b \frac{\nabla t}{h^\rho(t)}}.$$

从而

$$\int_a^b q(t)\nabla t \geqslant \frac{\int_a^b \frac{\nabla t}{h^\rho(t)}}{\int_a^c \frac{\nabla t}{h^\rho(t)}\int_c^b \frac{\nabla t}{h^\rho(t)}} \geqslant \frac{\int_a^b \frac{\nabla t}{h^\rho(t)}}{f(d)}.$$

定理 2.4 若 $q(t)$ 满足

$$\int_a^b q(t)\nabla t < \frac{\int_a^b \frac{\nabla t}{h^\rho(t)}}{f(d)}, \quad (2.7)$$

其中 $f(t) = \int_a^t \frac{\nabla s}{h^\rho(s)}\int_t^b \frac{\nabla s}{h^\rho(s)}$,$f(d) = \max\{f(t), t \in (a,b)_T\}$,则方程(0.2)在$[a,b]_T$ 上非共轭.

证明 假设方程(0.2)不是非共轭的,则由定理 1.2 知:存在一个非平凡的 $x \in B$,使得 $x(a) = x(b) = 0$ 且

$$F_2(x) = \int_a^b \{h^\rho(t)(x^\nabla(t))^2 - q(t)x^2(t)\}\nabla t \leqslant 0.$$

由 x 的连续性知:存在 $c \in \{(a,b)_T\}$,使得

$x^2(c) = M = \max\{x^2(t), t \in [a,b]_T\} > 0$,

从而

$$M\int_a^b q(t)\nabla t \geqslant \int_a^b q(t)x^2(t)\nabla t \geqslant$$

$$\int_a^b h^\rho(t)(x^\nabla(t))^2\nabla t \geqslant M\frac{\int_a^b \frac{\nabla t}{h^\rho(t)}}{f(d)}.$$

即

$$\int_a^b q(t)\triangle t \geqslant \frac{\int_a^b \frac{\nabla t}{h^\rho(t)}}{f(d)},$$

这与(2.7)式矛盾.

参考文献:

[1] Hilger S. Ein ma kettenkalkul mit anwendung auf zentrumsmannigfaltigkeiten[M]. PhD Thesis, University Wurzburg, 1988.

[2] Hilger S. Analysis on measure chains-a unified approach to continuous and discrete calculus[J]. Results Math, 1990, 18:18-56.

[3] Messer K R. Linear dynamic equations on time scales [M]. PhD Thesis, Lincoln, University Nebraska, 2003.

[4] Bohner M, Peterson A. Dynamic equations on time scales: an introduction with applications [M]. Boston: Birkhauser Boston inc, 2001.

[5] Bohner M, Clark S, Ridenhour J. Lyapunov inequalities on time scales[J]. J Inequal Appl, 2002(7):61-77.

(责任编辑:尹 闯)