广西科学 Guangxi Sciences 2010,17(3):194～196

F^*-子群与有限群的 p-幂零性*

F^*-Subgroups and p-Nilpotency of Finite Groups

何家文，钟祥贵，韦铸娥
HE Jia-wen, ZHONG Xiang-gui, WEI Zhu-e

(广西师范大学数学科学学院，广西桂林 541004)
(College of Mathematical Science, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要：利用 Sylow 子群的极大子群和 2-极大子群，研究 F^*-子群对有限群的 p-幂零性的影响，得到有限群 p-幂零性的若干充分条件.

关键词：F^*-子群　2-极大子群　p-幂零性

中图法分类号：O152.1　**文献标识码**：A　**文章编号**：1005-9164(2010)03-0194-03

Abstract: Using maximal or 2-maximal subgroups of Sylow subgroups, we investigated the influence of F^*-subgroups on p-nilpotency of finite groups, and obtained some sufficient conditions for a finite group to be nilpotent.

Key words: F^*-subgroups, 2-maximal subgroups, p-nilpotency

众所周知，素数幂阶子群及其补子群的性质对有限群的结构有着重要的影响. Arad 等在文献[1]中利用有限单群的分类定理，证明群 G 可解当且仅当 G 的每一个 Sylow 2-子群和每一个 Sylow 3-子群在 G 中可补. 郭文彬在文献[2]中给出 F-S-可补子群的概念，并且利用 F-S-可补子群获得，G 超可解当且仅当 G 的每一个 Sylow 子群的每一个极大子群在 G 中有超可解-S-可补. 缪龙在文献[3]中利用子群的 F-S-可补性获得了有限群的 p-幂零性的一些判定. 作为以上研究的继续，本文利用 Sylow 子群的极大子群和 2-极大子群，研究 F^*-子群对有限群结构的影响，得到有限群的 p-幂零性的若干充分条件.

文中所有群均为有限群，其中 $M<\cdot G$ 表示 M 是 G 的极大子群，U 代表超可解群系，N_p 代表 p-幂零群系，其他符号都是标准的，可以参见文献[4].

1　定义及引理

称群 G 的子群 H 在 G 中可补，如果存在 $K\leqslant G$，使得 $G=HK$，$H\cap K=1$. 设 F 是一个群类，称群 G 的子群 H 在 G 中 F-S-可补，如果存在 G 的一个子群 K，使得 $G=HK$ 且 $K/(K\cap H_G)\in F$.

定义 1.1　设 G 为有限群，F 是一个群类，$H\leqslant G$. 如果 G 中有正规子群 B，使得 $HB\trianglelefteq G$，对满足 $(q,|H|)=1$ 的任意素数 q，B 都包含 G 的一个 Sylow q-子群，且 $B/(B\cap H_G)\in F$，则称 H 为 G 的 F^*-子群.

与文献[2]的引理 2.1 类似，有

引理 1.1　设 $N\trianglelefteq G$，且 $K\leqslant G$，F 为子群闭和商群闭的群类，则

(1) 如果 H 为 G 的 F^*-子群，且 $H\leqslant K$，则 H 是 K 的 F^*-子群.

(2) 如果 H 为 G 的 F^*-子群，H 为 p-群，则 HN/N 是 G/N 的 F^*-子群.

(3) 如果 $N\leqslant H$，且 H/N 是 G/N 的 F^*-子群，则 H 是 G 的 F^*-子群.

引理 1.2[5]　设 N 是 G 的可解正规子群，如果 G 的每一个包含在 N 中的极小正规子群不包含于 $\Phi(G)$，那么 N 的 Fitting 子群 $F(N)$ 是包含在 N 中的 G 的极小正规子群的直积.

引理 1.3[4]　若 G 可解，则 $C_G(F(G))\leqslant F(G)$.

2　主要结果

定理 2.1　设 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$，其中 p 为 $|G|$ 的素因子，如果 P 的每一个极大子群都是 G 的 $N_p{}^*$-子群，则 $G/O_p(G)$ 是 p-幂零的.

证明　假设定理不真，设 G 为极小阶反例，则有

收稿日期：2009-12-09
修回日期：2010-05-11
作者简介：何家文(1982-)，男，硕士研究生，主要从事有限群论的研究工作。
* 广西科学基金项目(0991090)资助。

(1)$O_p(G)=1$.

如果 $O_p(G)=P$,则 $G/O_p(G)$ 是 p'-群,从而为 p-幂零群,矛盾.如果 $1<O_p(G)<P$,则由引理1.1知,$G/O_p(G)$ 满足定理假设.由 G 的极小性知 $G/O_p(G)\cong G/O_p(G)/O_p(G/O_p(G))$ 是 p-幂零的,矛盾.因此,$O_p(G)=1$.

(2)导出矛盾.

设 $P_1 <\!\!\cdot\, P$,由定理假设,P_1 是 G 的 $N_p{}^*$-子群,则存在 $B\trianglelefteq G$,使得 $P_1B\trianglelefteq G$,对满足 $q\neq p$ 的任意素数 q,B 都包含 G 的一个 Sylow q-子群,且 $B/(B\cap(P_1)_G)\in N_p$.由于 $(P_1)_G\leqslant O_p(G)=1$,$B\in N_p$.于是 $B_{p'}\ \mathrm{char}\ B\trianglelefteq G$.又 $B_{p'}=G_{p'}$,所以 $G_{p'}\trianglelefteq G$.故 G 为 p-幂零群.这是最后的矛盾.

定理2.2 设 G 是有限群,p 为 $|G|$ 的素因子且 $(|G|,p-1)=1$,则 G 是 p-幂零的,当且仅当存在 $N\trianglelefteq G$,使得 G/N 是 p-幂零的,且 N 的任一 Sylow 子群的每一个极大子群都是 G 的 N_p^*-子群.

证明 必要性显然,取 $N=1$,即可.我们只须证明充分性,假设结论不真,设 G 为极小阶反例,显然 $N\neq 1$,则有

(1)G 可解且 G 的包含在 N 中的极小正规子群唯一,且为初等交换 r-群,其中 r 为素数.

由 $(|G|,p-1)=1$,定理2.1及奇数阶群可解定理知,G 可解.设 N_1 是 G 的包含在 N 中的极小正规子群,则 N_1 是初等交换 r-群,其中 r 为素数.由 $(G/N_1)/(N/N_1)$ 是 p-幂零的及引理1.1知,G/N_1 对于 N/N_1 满足定理假设.根据 G 的极小性,有 G/N_1 是 p-幂零的.又 p-幂零群系是饱和群系,从而 N_1 为 G 的包含在 N 中的唯一极小正规子群.

(2)设 N_1 是 G 的包含在 N 中的唯一极小正规子群,则 $N_1=F(N)=C_N(N_1)$,并且存在 $M<\!\!\cdot\, G$,使得 $G=[N_1]M$.

显然有 $N_1\nleqslant\Phi(G)$.于是存在 $M<\!\!\cdot\, G$,使得 $G=[N_1]M$.由引理1.2知,$F(N)=N_1$ 及 $C_N(F(N))\geqslant F(N)$.由(1)知 N 可解,从而由引理1.3知,$C_N(F(N))\leqslant F(N)$,因此 $C_N(N_1)=N_1=F(N)$.

(3)最后矛盾.

如果 $p\nmid|N|$,由 G/N 是 p-幂零的,设 $G_pN/N\in \mathrm{Syl}_p(G/N)$,其中 $G_p\in\mathrm{Syl}_p(G)$.令 Q/N 是 G/N 的正规 p-补,则 $G/N=(G_pN/N)(Q/N)$,即 $G=G_pQ$.又 $G_p\cap Q=1$,$Q\trianglelefteq G$.于是 Q 为 G 的正规 p-补,矛盾.

如果 $p\mid|N|$,若 $p\neq r$,类似上述讨论,知 G 是 p-幂零群,矛盾,因此 $p=r$,N_1 是 G 的包含在 N 中的初等交换 p-群.由 N/N_1 是 p-幂零的,设 DN_1/N_1 是 N/N_1 的正规 p-补,其中 D 为 N 的 p'-Hall 子群,从而 $DN_1\trianglelefteq N$.令 $P\in\mathrm{Syl}_p(N)$ 且 $N_1\leqslant P$,则 $PD=PN_1D\leqslant N\leqslant G$.如果 $DP\leqslant G$,则由引理1.1知,DP 对于正规子群 DP 满足定理假设,由 G 的极小性知 DP 是 p-幂零的,从而 $D\trianglelefteq PD$ 且 $DN_1=D\times N_1$.于是 $D\leqslant C_N(N_1)=N_1$,矛盾.如果 $G=PD=N$,又 $N_1\leqslant P$,假设 $N_1\leqslant\Phi(P)$,由(2)知,$P=N_1(P\cap M)=P\cap M$.则 $N_1\leqslant P\leqslant M$,矛盾.因此存在 $P_1<\!\!\cdot\, P$ 且 $N_1\nleqslant P_1$.由于 P_1 是 G 的 $N_p{}^*$-子群,则存在 $B\trianglelefteq G$,使得 $P_1B\trianglelefteq G$ 且 $B/(B\cap(P_1)_G)\in N_p$,对于满足 $q\neq p$ 的任意素数 q,B 都包含 G 的一个 Sylow q-子群.如果 $(P_1)_G\cap B\neq 1$,由 N_1 的唯一极小性知 $N_1\leqslant P_1$,矛盾.因此 $(P_1)_G\cap B=1$,从而 $B\in N_p$.于是 $B_{p'}\trianglelefteq B$,即 $B_{p'}\mathrm{char}B$.又 $B_{p'}=G_{p'}$,所以 $G_{p'}\trianglelefteq G$,则 G 是 p-幂零的.这是最后的矛盾.

定理2.3 设 $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$,其中 p 为 $|G|$ 的素因子且 $(|G|,p-1)=1$,如果 P 的所有2-极大子群都是 G 的 $N_p{}^*$-子群,则 G 是 p-幂零的.

证明 假设定理不真,令 G 为极小阶反例,则有

(1)$O_p(G)=1$.

如果 $O_p(G)\neq 1$,与定理2.1证明过程的(1)类似可推出矛盾.

(2)导出矛盾.

如果 $|P|=p$,P 不存在2-极大子群.由 N/C 定理,$N_G(P)/C_G(P)\lesssim \mathrm{Aut}(P)$.又 $(|G|,p-1)=1$,从而 $N_G(P)=C_G(P)$.由 Burnside 定理知 G 是 p-幂零的.矛盾.

如果 $|P|\geqslant p^2$,此时 P 存在2-极大子群 P_2,$|P_2|\geqslant 1$.由定理假设,P_2 是 G 的 N_p^*-子群,则存在 $B\trianglelefteq G$,使得 $P_2B\trianglelefteq G$,对满足 $q\neq p$ 的任意素数 q,B 都包含 G 的一个 Sylow q-子群,且 $B/(B\cap(P_2)_G)\in N_p$.由于 $(P_2)_G\leqslant O_p(G)=1$,$B\in N_p$.于是 $B_{p'}\trianglelefteq B$,$B_{p'}\ \mathrm{char}\ B\trianglelefteq G$.又 $B_{p'}=G_{p'}$,故 $B_{p'}=G_{p'}\trianglelefteq G$,所以 G 是 p-幂零的.这是最后的矛盾.

定理2.4 设 G 是有限群,p 为 $|G|$ 的素因子且 $(|G|,p-1)=1$.则 G 是 p-幂零的,当且仅当存在 $N\trianglelefteq G$,使得 G/N 是 p-幂零的,且 N 的任一 Sylow 子群的每一个2-极大子群都是 G 的 $N_p{}^*$-子群.

证明 必要性显然,取 $N=1$,即可.我们只须证明充分性,假设结论不真,设 G 为极小阶反例.显然 $N\neq 1$,与定理2.2类似可以证明:

(1)G 可解,并且 G 的包含在 N 中的每一个极小正规子群 N_1 为初等交换 r-群,其中 r 为素数.

(2)G/N_1 是 p-幂零的,N_1 是 G 的包含在 N 中的唯一极小正规子群,并且 $N_1=F(N)=C_N(N_1)$.

(3)N_1 是 N 的 Sylow p-子群.

如果 $p \nmid |N|$，由 G/N 是 p-幂零的，易知 G 是 p-幂零的，矛盾，因此 $p \mid |N|$. 若 $p \neq r$，由 G/N_1 是 p-幂零群，知 G 是 p-幂零群，矛盾，因此 $p = r$，N_1 为 G 的包含在 N 中的初等交换 p-子群. 由于 N/N_1 是 p-幂零的，可设 DN_1/N_1 是 N/N_1 的正规 p-补，其中 D 为 N 的 p'-Hall 子群，从而 $N_1D \trianglelefteq N$. 设 $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$ 且 $N_1 \leqslant P$，则 $PD = PN_1D \leqslant N$. 如果 $DP < G$，则由引理 1.1 知，DP 对于正规子群 DP 满足定理假设，由 G 的极小性知 DP 是 p-幂零的，从而 $D \trianglelefteq PD$ 及 $N_1D = N_1 \times D$，于是 $D \leqslant C_N(N_1) = N_1$，矛盾. 如果 $G = PD = N$，又 $N_1 \leqslant P$，若 $N_1 < P$，又 $N_1D \trianglelefteq N = G$，由 Frattini 论断知，$G = N_1N_G(D)$. 由于 N_1 是 G 的唯一极小正规子群，可知 $D \ntrianglelefteq G$，因此 $N_1 \cap N_G(D) = 1$. 假设 $P_2 \in \mathrm{Syl}_p(N_G(D))$，则 $N_1P_2 \in \mathrm{Syl}_p(G)$. 如果 $P_2 <\cdot N_1P_2$，则 $|N_1| = p$，那么 $N_G(N_1)/C_G(N_1) \lesssim \mathrm{Aut}(N_1)$. 又 $(|G|, p-1) = 1$，从而 $G = N_G(N_1) = C_G(N_1)$，$N_1 \leqslant Z(G)$. 又 G/N_1 是 p-幂零的，所以 G 是 p-幂零的，矛盾. 因此，存在 P_1 是 N_1P_2 的 2-极大子群，使得 $P_2 \leqslant P_1$. 显然 $N_1 \not\trianglelefteq P_1$，因此 $(P_1)_G = 1$. 由定理假设存在 $B \trianglelefteq G$，使得 $P_1B \trianglelefteq G$，$B/(B \cap (P_1)_G) = B \in N_p$，且 $B_{p'} = G_{p'}$. 由 $B \in N_p$，知 $B_{p'} \trianglelefteq B$，即 $B_{p'} \,\mathrm{char}\, B$，于是 $B_{p'} = G_{p'} \trianglelefteq G$，从而 G 是 p-幂零的，矛盾，因此 $N_1 = P$.

(4) 最后的矛盾.

如果 $|N_1| = p$，则由 G/N 为 p-幂零的可知 G 是 p-幂零的. $|N_1| \geqslant p^2$，令 P_1 是 N_1 的 2-极大子群，由定理假设知，P_1 是 G 的 $N_p{}^*$-子群，则存在 $B \trianglelefteq G$，使得 $P_1B \trianglelefteq G$，$B/(B \cap (P_1)_G) \cong B \in N_p$，且 $B_{p'} = G_{p'}$. 由 $B \in N_p$，知 $B_{p'} \trianglelefteq B$，即 $B_{p'}$ char B. 于是 $B_{p'} = G_{p'} \trianglelefteq G$，则 G 是 p-幂零的. 这是最后的矛盾.

参考文献：

[1] Arad Z, Ward M B. New criteria for the solvability of finite groups[J]. J Algebra, 1982, 77: 234-246.

[2] Miao Long, Guo Wenbin. Finite groups with some primary subgroups F-S-supplemented[J]. Comm Algebra, 2005, 33(8): 2789-2800.

[3] Miao Long. On p-nilpotency of finite groups[J]. Bull Braz Mat Soc, 2007, 38(4): 585-594.

[4] 徐明曜. 有限群导引(上册)[M]. 第 2 版. 北京：科学出版社，2001.

[5] Li Deyu, Guo Xiuyun. The influence of c-normality of subgroups on the structure of finite groups Ⅱ[J]. Comm Algebra, 1998, 26: 1913-1922.

(责任编辑：尹　闯)

中国科学家揭示东亚人群源自非洲

随着大量 mtDNA 全基因组信息的积累，东亚人群的母系遗传结构已经得到较为清晰的认识。然而，科学研究中仍然存在一些 mtDNA 类型无法识别，虽然这些未定类型的分布频率很低，但是其系统发育地位究竟如何迄今仍不得而知。又由于东亚具有丰富且较为连续的古人类化石记录，因而该地区人群被认为可能是独立起源的或者来自古人类的遗传。虽然该观点被来自 Y 染色体的研究工作所否定，但是不同的声音认为，Y 染色体研究只能从父系角度排除该可能性，并不能否定存在母系贡献的可能。显然，如果现代东亚人群中确实存在源自古人类的母系遗传，那么这些类型则很可能分布于那些低频且迄今无法确定其系统发育地位的 mtDNA 类型之中。为解决该难题，中国科研人员收集了 84 个中国人群 6000 余份样本的 mtDNA 序列，从中甄别出近 200 个未定类型，采用 mtDNA 全基因组测序等手段确定所有未定类型的系统发育地位，并将结果应用于其他已发表的 5000 余份东亚人群 mtDNA 序列数据。事实上这些甄别出来的 mtDNA 未定类型均源自非洲起源的建群类型 M 或 N，没有发现可能追溯至古人类的母系遗传组分。

(据科学网)